

EXPLORACIÓN DE DIFICULTADES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES
MULTIPLICATIVOS (MWP) EN CONTEXTOS BILINGÜES EN ESTUDIANTES DE CUARTO GRADO EN BOGOTÁ,
COLOMBIA.

Cristian Camilo Piranquive Roncancio

Brayan Steven Prieto Velasquez



UNIVERSIDAD
La Gran Colombia

Vigilada MINEDUCACIÓN

Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias de la Educación

Universidad La Gran Colombia

Bogotá, D.C.

2026

Exploración de dificultades en la resolución de problemas verbales multiplicativos (MWP) en contextos bilingües en estudiantes de cuarto grado en Bogotá, Colombia.

Cristian Camilo Piranquive Roncancio

Brayan Steven Prieto Velasquez

Trabajo de Grado presentado como requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Juan Carlos Acevedo Giraldo

Director de tesis



UNIVERSIDAD
La Gran Colombia

Vigilada MINEDUCACIÓN

Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias de la Educación

Universidad La Gran Colombia

Bogotá, D.C.

2026

Dedicatoria

Esta tesis se la dedicamos a Dios por darnos la vida, salud y sabiduría en cada paso que damos, también la dedicamos a nuestros padres, quienes han estado para nosotros en todo momento y quienes nos han apoyado en toda circunstancia, sin condición alguna. A ustedes, gracias por tan maravilloso amor.

Brayan Steven Prieto Velasquéz

A ti mamá Fanny, que fuiste siempre la fuerza cuando me hacían falta, tu amor, tu apoyo y tu ejemplo fueron la fuerza que me sostuvieron. Eres mi matemática favorita, porque siempre multiplica con su amor y sumas motivación cuando nos hace faltaba. Gracias por cada apoyo y oración. Esto es por ti y para ti.

A mis hermanos, apoyo constante en mi camino, fuerza de en los días pesados y abrazo cálido cuando los problemas pesaban, me enseñaron que siempre hay solución cuando hay familia.

A ti papá Álvaro, espero que tu corazón sienta orgullo de tu hijo pequeño, el reflejo de tus años y de tus tiempos. Con tu bendición papá.

A Dios, quien sostuvo mi camino y me dio una segunda oportunidad de vida, para enseñar y ser ejemplo. Gracias por enseñarme que el problema no es el final, es el inicio de un gran aprendizaje si se sabe andar de tu mano. Gracias por traernos hasta aquí.

Cristian Camilo Piranquive Roncancio

Agradecimientos

Agradecemos a la docente Elena Tinoco por toda su orientación, enseñanzas y apoyo en el proceso de trabajo con la tesis.

Asimismo, al docente Juan Carlos Acevedo por sus palabras de motivación y aliento, la guía y el impulso para ser cada día mejores profesores.

También agradecemos a la estudiante de grado octavo, Sara González, por ayudarnos con la recopilación de datos, entrega de material a estudiantes e ideas desde otro punto de vista.

Por otro lado, a nuestra amiga Marcela Correa por sus consejos y apoyo en el proceso de trabajo con nuestra tesis.

Cristian Piranquive

Brayan Prieto

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN	8
ABSTRACT.....	10
CAPÍTULO I - INTRODUCCIÓN	12
1.2 Línea del Programa	19
LÍNEA GENERAL:.....	19
LÍNEA ESPECÍFICA	19
1.3 Objetivos	20
1.3.1 Objetivo General	20
1.3.2 Objetivos Específicos.....	20
1.4 Justificación.....	21
1.5 Antecedentes	25
Capítulo II. MARCO TEÓRICO	27
2.1 Resolución de problemas.....	29
2.2 ¿Es un ejercicio o es un problema?.....	32
2.3 ¿Se debería por tanto pasar este nivel de reproducción para avanzar a la resolución de problemas?	32
2.4 Ser Competente Matemáticamente:	34
2.5 Sobre la Ingeniería didáctica:.....	40
2.6 Categorías del error de Newman	41
2.7 Las estructuras multiplicativas de Vergnaud (1990).....	45
2.8 Las estrategias de resolución descritas por Ivars y Fernández (2016).....	46
Capítulo III: ASPECTOS METODOLÓGICOS.....	48
3.1. Metodología.....	48
3.1.1. Especificaciones de la Metodología.....	48
3.1.2 Delimitación Poblacional y Criterio de Muestreo Progresivo	51
3.2 Categorización.....	53
3.3 El Protocolo de Entrevista Clínica de Newman	55
CICLO 1	58
Ciclo II.....	65
CAPÍTULO IV: ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	67
4.1. Caracterización General de Desempeños Autónomos	67

4.2. Análisis de Obstáculos Lingüísticos Iniciales (Newman: Lectura y Comprensión)	69
4.3. El Rol de las Mediaciones Alternativas y el Translenguaje	71
4.4. Análisis Epistemológico y Cognitivo de las Estructuras:	73

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 <i>Estudiantes que tuvieron obstáculos iniciales y profundos</i>	¡Error! Marcador no definido.
Figura 2 <i>Triangulación de la Categorización en análisis de MWP</i>	53
Figura 3 <i>Estrategias Alternativas de Solución de problemas matemáticos</i> ..	¡Error! Marcador no definido.
Figura 4 <i>Representación los errores por pregunta</i>	¡Error! Marcador no definido.
Figura 5 <i>Porcentaje de respuestas entre correctas, incorrectas y en blanco</i> .	¡Error! Marcador no definido.

LISTA DE TABLAS

Tabla 1 <i>Similitudes entre el hacer docente- investigador y el ingeniero en el diseño de producto.</i>	
.....	41
Tabla 2 <i>Clasificación de problemas de tipo multiplicativo.</i>	46
Tabla 3 Matriz de caracterización de instrumentos de recolección de datos y su correspondencia con los anexos	50
Tabla 4 <i>Jerarquía de Newman para la ejecución de una tarea matemática.</i>	56

RESUMEN

El propósito de este estudio es explorar las dificultades que los estudiantes de educación básica podrían enfrentar al momento de abordar la resolución de problemas verbales multiplicativos, identificados en el presente trabajo como MWP (Math Word Problems), los cuales encuentran una relevancia en un entorno donde la matemática es enseñada en inglés. El estudio se lleva a cabo inicialmente con 100 estudiantes de grado cuarto del colegio bilingüe CEDAM, de Bogotá, Colombia, en donde se enseña bajo el enfoque de Aprendizaje Integrado de Contenidos y Lenguas Extranjeras (AICLE, o por sus siglas en inglés CLIL).

Metodológicamente, se adopta un enfoque cualitativo con alcance descriptivo- explicativo, adaptando la Ingeniería Didáctica de Michèle Artigue a la estructuración de secuencias de clase y los correspondientes ciclos de intervención. Se establece una Triangulación de tres marcos conceptuales para el análisis de las producciones de los estudiantes de grado cuarto: El Análisis de Errores de Newman (NEA) establecido como categoría primaria, en segunda instancia los campos conceptuales multiplicativos de Vergnaud, y las estrategias de resolución planteadas por Ivars y Fernández.

Posteriormente, en el presente estudio se estableció una población exploratoria macro de 100 estudiantes correspondientes a los cuatro cursos de cuarto grado (4°A, 4°B , 4°C y 4°D) de acuerdo a la distribución institucional del Colegio Bilingüe CEDAM (Bogotá, Colombia). Siguiendo a ello, teniendo en cuenta el proceso de focalización progresiva (Stake,1995) y atendiendo a un muestreo intencional por necesidad pedagógica (Patton,2015), se redujo la muestra estableciéndose en 50 estudiantes pertenecientes a los estudiantes que evidenciaron mayores obstáculos en la prueba de diagnóstico inicial, aplicando con ellos los ciclos de experimentación de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995) .

Finalmente, aplicando la triangulación cualitativa a profundidad y teniendo en cuenta la aplicación del protocolo de las entrevistas clínicas de Newman (1983), se seleccionó una submuestra

representativa de 26 estudiantes (Creswell,2014) , los cuales iniciaban grado quinto , lo cual permitió analizar en detalle la evolución de sus razonamientos y la efectividad de las mediaciones didácticas.

Los resultados revelaron, frente a la categorización antes nombrada que los estudiantes presentan inicialmente, dificultades críticas en la lectura y comprensión de los enunciados en inglés, por lo que fue necesario en algunos casos un andamiaje profundo. A lo anterior, se propusieron actividades didácticas alternativas que mitigaran las dificultades frente a la ansiedad que pudieran producir el cambio de idioma o la comprensión misma del problema, actuando como soporte conceptual en la diversificación de abordaje en la resolución de problemas multiplicativos en inglés como lengua extranjera. El proceso de aplicación de las etapas de la Ingeniería Didáctica de manera cíclica permite concluir que, en el grupo estudiado las dificultades de los estudiantes no se derivaban , en su gran mayoría , de la capacidad algorítmica u operativa para desarrollar operaciones de multiplicación o división, entrando estas dos dentro del mismo grupo de estudio según Vergnaud, sino de la decodificación lingüística frente a enunciados complejos, exponiendo la resolución de problemas como el punto crucial ya no solo la competencia matemática sino también lingüística.

El translenguaje (Translanguaging) o cambio de código jugó entonces un papel relevante en la mediación, permitiendo una construcción colaborativa de significados, señalando la necesidad de diseñar tareas matemáticas con consideraciones de la carga textual, contextos formativos claros y apoyos visuales estructurados.

Palabras clave: Dificultades de aprendizaje, matemáticas, inglés como lengua extranjera, resolución de problemas verbales, educación bilingüe, pensamiento multiplicativo., ingeniería didáctica, translenguaje.

ABSTRACT

The purpose of this study is to explore the difficulties that elementary school students face when solving multiplicative word problems, referred to herein as MWPs (Math Word Problems), in an educational context where mathematics is taught in English as a foreign language. The research was initially conducted with 100 fourth-grade students at the CEDAM bilingual School in Bogotá, Colombia, an institution utilizing the Content and Language Integrated Learning (CLIL) approach.

Methodologically, a qualitative approach with a descriptive – explanatory scope was adopted, adapting Michéle Artigue's Didactic Engineering (1995) to structure lesson sequences and their corresponding intervention cycles. A theoretical triangulation of three conceptual frameworks was established to analyze students' productions: Newman's Error Analysis (NEA) as the primary analytical category, Vergnaud's Multiplicative Conceptual Fields, and the solving strategies proposed by Ivars and Fernández (2016).

Regarding sample selection, an initial macro exploratory population of 100 students across four fourth-grade classrooms (4th A, 4th B, 4th C and 4th D) were established. Subsequently, following a progressive focusing process (Stake, 1995) and intentional sampling based on pedagogical need (Patton, 2015), the sample was narrowed to 50 students from the courses exhibiting the most significant obstacles on the initial diagnostic test, with whom active Didactic Engineering experimentation cycles were implemented. Finally, for in-Depth qualitative triangulation and the implementation of Newman's Clinical Interview protocol (1983), a representative sub-sample of 26 students entering fifth grade was selected (Creswell, 2014), allowing a detailed analysis of the evolution of their reasoning and the effectiveness of didactic mediations.

The results revealed that students initially exhibited critical difficulties in reading and comprehending word problems written in English, requiring deep pedagogical scaffolding. However, alternative interactive activities – such as role playing – mitigated foreign language anxiety and enhanced comprehension. The cyclic application of Didactic Engineering stages leads to the conclusion that students' difficulties did not largely stem from algorithmic or operational capabilities to perform multiplication or division, but rather from linguistic decoding when facing complex statements. Translanguaging and code – switching played a pivotal role in meaning negotiation, underscoring the necessity of designing mathematics tasks that carefully consider textual load, provide clear formative contexts, and incorporate structured visual supports.

Keywords: learning difficulties, mathematics, English as foreign language, word problem solving, bilingual education, multiplicative thinking, didactic engineering, translanguaging.

CAPÍTULO I - INTRODUCCIÓN

Cuando hablamos de enseñanza de las matemáticas en entornos bilingües, nos estamos encontrando con uno de los desafíos pedagógicos más significativos en el sector educativo en Colombia, donde el inglés, de acuerdo con los lineamientos del proyecto Nacional de Bilingüismo, es considerado como lengua Extranjera. Esto adquiere una relevancia singular cuando se considera la complejidad intrínseca frente a la construcción de conceptos y significados que de manera simultánea se encuentran en el desarrollo de competencias matemáticas y lingüísticas. Lograr que, estas dos competencias suenen en la armonía pedagógica en el concierto de la educación matemática requiere de la afinación de los instrumentos, de estudiar a quienes los interpretan y a quienes, como director de orquesta orientan la tonada.

En este contexto nace la necesidad de identificar y analizar las dificultades que presentan los estudiantes de grado cuarto del Colegio Bilingüe CEDAM, durante la resolución de problemas verbales multiplicativos en inglés, y aparece la pregunta: ¿Qué dificultades presentan los estudiantes de grado cuarto, en un contexto de inglés como lengua extranjera, al resolver problemas verbales de tipo multiplicativo?, se plantea por tanto una necesidad de identificar las dificultades de los estudiantes en la resolución de problemas verbales multiplicativos en Inglés.

El seguimiento realizado a grado cuarto de primaria del Colegio Bilingüe CEDAM, permite identificar las dificultades que son recurrentes tanto en comprensión como resolución de problemas matemáticos; aquellas dificultades aparentemente trascienden las dificultades del pensamiento aritmético y numérico; a causa de que la interpretación del inglés incorpora nuevas y diferentes habilidades lingüísticas.

En entornos escolares bilingües, los estudiantes pueden llegar a encontrarse con barreras de carácter cognitivo en el establecimiento de conexiones frente a la estructura conceptual de la matemática en conexión con la codificación de la lengua extranjera, lo cual devela dificultades en el alumnado, entrando en el foco de la investigación en educación matemática.

Es por esto por lo que, el presente trabajo se centra en comprender esas dificultades en la resolución de problemas verbales y ayudar a los estudiantes a tener mejores herramientas y estrategias en la comprensión y resolución de problemas matemáticos, a través de factores didácticos y lingüísticos del proceso enseñanza-aprendizaje.

Con el fin de cumplir este propósito, el presente texto se articula en seis capítulos principales. En el Capítulo I se dará una contextualización del problema de investigación, el correspondiente planteamiento del problema y la pregunta de investigación que orientó el trabajo, acompañado de los objetivos y la justificación que sustenta el trabajo. A continuación, en el Capítulo II se encontrará el sustento teórico, dado en tres ejes conceptuales: La resolución de Problemas en la educación matemática bilingüe, la jerarquía de errores de Newman (1977), los campos conceptuales multiplicativos planteados por Vergnaud (1990) y las estrategias de resolución de problemas por Ivars y Fernández (2016).

Por otra parte, el Capítulo III busca de manera detallada establecer lo metodológico del estudio, cuyo diseño tiene como base la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), el uso de un muestreo progresivo y la aplicación del Análisis de Errores de Newman a través de la aplicación de un protocolo de entrevistas clínicas. En el Capítulo IV se encontrarán los resultados vistos desde un enfoque cualitativo, analizando las producciones escritas y verbales de los participantes desde la triangulación expuesta en el marco teórico. Como cierre, el Capítulo V consolida las conclusiones y recomendaciones del estudio

teniendo en cuenta la pregunta de investigación y los objetivos propuestos, mientras que el Capítulo VI permite tener el soporte bibliográfico junto con los anexos correspondientes.

1.1 Planteamiento del problema

La enseñanza de la matemática en contextos bilingües constituye un desafío creciente en el sistema educativo colombiano, especialmente debido a la limitada producción investigativa en este campo en comparación con otras áreas del conocimiento. Vargas (2023) realizó una revisión documental e histórica que evidencia cómo la mayoría de los estudios se centran en la enseñanza y el aprendizaje de segundas lenguas, mientras que los aspectos propios de la educación matemática reciben una atención marginal. El autor señala que, aunque enfoques como el Aprendizaje Integrado de Contenidos y Lenguas Extranjeras (AICLE) buscan equilibrar el desarrollo del lenguaje con el aprendizaje disciplinar, las investigaciones existentes tienden a privilegiar la dimensión lingüística sobre el contenido matemático. Esta tendencia puede limitar la reflexión alrededor de la naturaleza de los objetos matemáticos y de la forma en que se construye el conocimiento en contextos bilingües.

Dentro de la educación matemática, la resolución de problemas constituye un eje fundamental en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Jitendra et al. (2019) sostienen que la resolución de problemas desempeña un papel esencial en los primeros años de la vida escolar, no solo en el ámbito académico sino también en el desarrollo de habilidades resolutivas para la toma de decisiones. Del mismo modo, Jitendra et al. (2009), citando a Verschaffel et al. (2007), destacan la estrecha conexión de los problemas verbales con la realidad, señalando que esta forma de trabajo promueve la comprensión del significado de las operaciones y fortalece la competencia aritmética. En consonancia, el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) indica que la formulación, el tratamiento y la resolución de problemas fomentan un ejercicio reflexivo que impulsa al estudiante a modificar estrategias y a generar nuevos planteamientos. Sin embargo, el MEN (2006) advierte que no basta con proponer ejercicios rutinarios, sino que el abordaje de situaciones problema complejas y contextualizadas resulta esencial para el desarrollo del pensamiento matemático en sus diversas manifestaciones.

A pesar de su relevancia, diferentes investigaciones evidencian que los estudiantes presentan múltiples dificultades al abordar la resolución de problemas. Godino (2004) señala que estas dificultades pueden manifestarse en el conocimiento factual, la eficiencia procedimental o la comprensión conceptual, lo que refleja tensiones en la construcción del conocimiento matemático.

En este panorama, los problemas verbales multiplicativos plantean retos particulares, ya que exigen no solo comprender el contexto de la situación, sino también establecer relaciones cuantitativas precisas. Ivars y Fernández (2016) afirman que, a partir de tercer grado de primaria, los estudiantes tienden a sustituir estrategias informales, flexibles y ligadas al sentido numérico por el uso mecánico del algoritmo de multiplicación. Esta transición temprana hacia procedimientos algorítmicos puede llegar a debilitar, en ocasiones, la comprensión de las relaciones entre las cantidades implicadas lo cual eventualmente se asocia con errores como la aplicación de estrategias aditivas incorrectas o el uso del algoritmo inverso. Asimismo, el empleo de una operación no garantiza la comprensión del significado que modela, aspecto crucial en los problemas de estructura multiplicativa.

Bajo esta perspectiva, cabe precisar que este estudio no busca restar valor a la apropiación y aplicación de los algoritmos tradicionales; por el contrario, los reconoce como recurso indispensable para asegurar la precisión del cálculo y liberar carga cognitiva durante la tarea matemática. En esta primera instancia, desde la perspectiva de Faerch y Kasper (1986), el conocer del procedimiento dota al estudiante de la capacidad necesaria para ejecutar operaciones específicas asociadas a diferentes conceptos. En concordancia con ello, Goñi Zabala (2008) señala que el uso de reglas y algoritmos rutinarios, los cuales son propios del nivel de reproducción, resultan de gran utilidad al momento de reducir la carga cognitiva del estudiante frente a una tarea matemática, como lo es la resolución de problemas. De este modo, esta estructuración de habilidades procedimentales básicas actúa como

recurso primario en el andamiaje del desarrollo posterior de competencias superiores, como lo es la resolución de problemas, destaca Goñi Zabala (2008).

Sin embargo, de acuerdo con lo planteado Cantoral (2005), el uso mecanizado del algoritmo como única estrategia en la resolución de problemas verbales resulta insuficiente, puesto que se requiere pasar del lenguaje natural en el que estos vienen planteados a una representación formal del mismo para dar una solución acertada. Así, el estudiante podría manifestar destreza mecánica en su ejecución, sin que esto implique necesariamente la comprensión de las relaciones cuantitativas implícitas ni el que se esté logrando transferir la formalización a situaciones contextuales.

En sintonía con este límite, advierte el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) que si no se realiza un abordaje de situaciones problema en contexto y con un nivel escalado de complejidad, no bastará con solo proponer ejercicios de cálculo rutinario, siendo imperativo para desarrollar la competencia matemática entrar en sus diversas manifestaciones en los tipos de tareas.

Es por tanto necesario en la estructuración de una transición didáctica en cuanto a la educación matemática coherente, puesto que el dominio y aplicación del algoritmo procedimental en la multiplicación y división resultan insuficientes para asegurar el éxito en la resolución de problemas bilingües y el desarrollo del pensamiento matemático en sus diversas manifestaciones.

Ante ello, las dificultades se intensifican en los contextos bilingües, donde la lectura y comprensión de los enunciados en inglés añade un nivel adicional de complejidad. Los obstáculos lingüísticos y didácticos pueden influir en la identificación del sentido matemático de las operaciones, dificultando el acceso al contenido conceptual. Por tanto, la resolución de problemas verbales se ve afectada tanto por las demandas cognitivas propias del contenido como por las mediaciones pedagógicas y lingüísticas inherentes a la enseñanza en una segunda lengua.

Esta situación cobra especial relevancia en el caso del Colegio Bilingüe CEDAM, institución ubicada en la localidad de Los Mártires, en la ciudad de Bogotá, clasificada como Colegio Bilingüe Nacional según la tipología de Rodríguez (2011). Esta clasificación se sustenta en el hecho de que sus estudiantes presentan exámenes internacionales de certificación al culminar sus estudios, su proyección académica es mayoritariamente nacional y el cuerpo docente está conformado por profesores colombianos bilingües. En el área de matemáticas, las clases se imparten en inglés conforme al enfoque AICLE adoptado institucionalmente. La implementación de este modelo varía según el grado escolar, el nivel de competencia lingüística de los estudiantes y las dinámicas de cada grupo. Por esta razón, es común recurrir a una mediación entre el inglés y el español, especialmente en situaciones que exigen mayor claridad conceptual.

Con respecto a ello, para Cummins (2002) reconocer esta alternancia lingüística constituye una estrategia pedagógica que favorece la comprensión tanto conceptual como operativa de los contenidos. No obstante, el seguimiento pedagógico realizado en los grados de educación básica, particularmente en cuarto grado, evidenció dificultades persistentes por parte de los estudiantes en la comprensión y resolución de tareas matemáticas, especialmente aquellas vinculadas con las operaciones básicas y los problemas verbales. Estas dificultades no se explican únicamente por debilidades en el pensamiento numérico o en las habilidades aritméticas, sino también por las mediaciones didácticas y lingüísticas presentes en el proceso de enseñanza. En este escenario, surge la necesidad de identificar con mayor precisión las dificultades que enfrentan los estudiantes en la resolución de problemas verbales multiplicativos en inglés dentro de los procesos del aula bilingüe, teniendo en cuenta no solo las limitaciones procedimentales propias de la disciplina, sino también su estrecha relación en las complejidades de decodificar y resignificar las tareas en inglés como lengua extranjera.

En este contexto la pregunta de investigación a abordar será:

¿Qué dificultades presentan los estudiantes de grado cuarto en un contexto de inglés como lengua extranjera, al resolver problemas verbales de tipo multiplicativo?

1.2 Línea del Programa

En concordancia con lo establecido en el programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad La Gran Colombia, la presente investigación se ubica bajo los siguientes lineamientos (:

LÍNEA GENERAL: Postura crítica hacia la construcción del conocimiento matemático

LÍNEA ESPECÍFICA: Teaching processes of mathematics in a foreign language (English)

Este trabajo de investigación se articula con la línea en mención, ya que se centra en la enseñanza de matemáticas en inglés en el Colegio Bilingüe CEDAM, bajo el enfoque AICLE. Aborda las dificultades que enfrentan los estudiantes al resolver problemas multiplicativos, influenciadas tanto por aspectos matemáticos como por barreras lingüísticas al trabajar en una lengua extranjera.

Adicionalmente, este proyecto se encuentra en sintonía con el interés por analizar los fenómenos didácticos que surgen cuando el conocimiento matemático se construye en contextos bilingües. De esta forma, el proyecto contribuye al estudio de la enseñanza de las matemáticas en inglés en escenarios reales del sistema educativo colombiano.

El presente trabajo pretende servir de apoyo a la enseñanza de contenidos matemáticos en inglés bajo el enfoque AICLE, aportando al desarrollo de estrategias pedagógicas para el aprendizaje integrado de la disciplina y la lengua extranjera, así como al fortalecimiento de la investigación sobre bilingüismo y la exploración de nuevas dinámicas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Identificar algunas dificultades que presentan los estudiantes de grado cuarto del colegio bilingüe CEDAM en la resolución de problemas verbales multiplicativos en un contexto de inglés como lengua extranjera.

1.3.2 Objetivos Específicos

- ✓ Analizar referentes teóricos sobre problemas verbales multiplicativos en contextos bilingües, considerando las naturalezas multiplicativas de Vergnaud.
- ✓ Diseñar tareas matemáticas de problemas verbales multiplicativos coherentes con las actividades institucionales, para su análisis desde la Ingeniería Didáctica.
- ✓ Identificar las dificultades de los estudiantes en la resolución de problemas, clasificándolas según las categorías de Newman para el análisis de errores.
- ✓ Proponer actividades para mejorar la resolución de problemas verbales multiplicativos, con base en las dificultades encontradas.

1.4 Justificación

La enseñanza de la matemática en contextos bilingües resulta un campo emergente poco estudiado que, aunque se encuentra en crecimiento, lo que evidencia la urgencia de profundizar en su investigación dentro de la educación matemática. Al respecto, Vargas-Zambrano (2023) señala que las investigaciones orientadas al desarrollo de la matemática en escenarios donde el medio instruccional es el inglés como lengua extranjera son indispensables para atender de forma efectiva las demandas de una integración interdisciplinar en el aula colombiana.

Igualmente, Moschkovich (2020), afirma que la investigación sobre dinámicas bilingües y multilingües en el aprendizaje de las matemáticas se encuentra en fase de desarrollo temprano. Por esta razón, la autora sugiere que se considere la investigación en educación matemática en estos campos desde una perspectiva teórica nutrida por hallazgos de disciplinas como la lingüística y la antropología. En sintonía con este panorama, Vargas-Zambrano (2023), advierte que la documentación referente a la matemática bilingüe en Colombia ha mantenido un marcado énfasis en lo lingüístico, evidenciando la necesidad de generar aportes teóricos específicamente hacia la didáctica de matemática bilingüe. Bajo esta mirada, se añade por parte de la autora la importancia de no entrar a reiterar mitos o preconcepciones sobre supuestas limitaciones del bilingüismo, sino promover un diálogo académico constituido por quienes estudian los procesos cognitivos de la disciplina matemática y quienes estudian las particularidades de los alumnos bilingües y multilingües.

Frente a las ventajas que da la enseñanza de la matemática en inglés, Moschkovich (2020) asume una postura optimista, al señalar que es prioritario “tener en cuenta las ventajas que el bilingüismo puede aportar al aprendizaje de las matemáticas”.

Dresser (2012), en el prólogo del libro *“Exploraciones sobre el aprendizaje de lenguas y contenidos en programas bilingües: Una indagación en la escuela primaria”* afirma que cuando se habla de la enseñanza y del aprendizaje de contenidos académicos por medio del inglés como lengua extranjera, el diseño y la ejecución de programas bilingües resultan fundamentales. Al abordar las implicaciones respecto al dominio de la lengua académica y el rendimiento que los estudiantes puedan presentar en la medición de los desempeños, se encuentra una estrecha relación.

Al respecto, la autora señala que algunos sectores consideran que el enfoque de aprendizaje del inglés por contenidos académicos, como las matemáticas ha dejado de concebirse como una herramienta complementaria para adquirir un carácter de necesidad en una sociedad globalizada. Esto se debe a que, con mayor frecuencia, se alude a este idioma como un recurso que permite abordar temas de carácter interdisciplinar, favoreciendo de forma simultánea el desarrollo de competencias lingüísticas. De este modo, se encuentra una relación valiosa para la educación matemática, en tanto que la actividad matemática puede servir de soporte para el aprendizaje del inglés, la lengua extranjera también viabiliza la aproximación a los conceptos matemáticos desde una perspectiva diferente.

Esta interdisciplinariedad cobra mayor relevancia al evaluar las dificultades intrínsecas de la disciplina. Según Jitendra et al. (2009), sobre el desarrollo de destrezas, mencionan que “la resolución de problemas verbales y la comunicación matemática se consideran áreas problemáticas para muchos alumnos, así como para sus profesores”. Lo anterior adquiere un peso significativo cuando se analizan las implicaciones cognitivas y didácticas asociadas dadas por la planificación, ejecución, adecuación de la solución, determinación del resultado matemático y la comunicación de la respuesta.

Faerch y Kasper (1986) destacan la importancia de articular el conocimiento declarativo (conocimiento de conceptos y principios) y de procedimientos (asociados a destrezas y acciones). Para estos autores, resulta fundamental que el estudiante encuentre claridad tanto en *qué*, -definido por el entendimiento de los conceptos – como en el *cómo*- que se manifiesta en la capacidad del estudiante de llevar a la acción conocimientos relacionados con los conceptos. No obstante, en su prólogo, Dresser (2012), al recuperar planteamientos de August y Hakuta (1997), indica que la integración de los conocimientos descritos puede llegar a ser problemática en el aula, debido a que se presentan diferentes expectativas y demandas para cada área de contenido. Sumado a las bases epistemológicas y las dificultades referidas, se adiciona al integrar el *qué* y el *cómo*, es decir las tensiones epistemológicas y procedimentales se adicionan a la complejidad cognitiva que surge cuando el estudiante bilingüe debe resolver problemas de estructura multiplicativa al tiempo que muestra la suficiencia en la comunicación en inglés como lengua extranjera.

Dada la escasez de los estudios dados en cuanto a educación matemática bilingüe en Colombia, el campo se reduce aún más al considerar la investigación guiada a la resolución de problemas, escenario que demanda la movilización simultánea de competencias lingüísticas y propias de la disciplina matemática. Al respecto, según Goñi (2008), debido a que no existe una tarea con la capacidad de enmarcar todos los aprendizajes necesarios para una educación armónica, se hace indispensable analizar los tipos de tareas que se realizan y la relación directa con los tipos de aprendizaje que estas conllevan. El autor sostiene que estas tareas -como una semilla- pueden dar oportunidades de aprendizaje potencial, cuyo desarrollo y consolidación dependen, en gran medida de las metodologías implementadas en el aula (p. 132). Por consiguiente, la resolución de problemas constituye una oportunidad de estudio que enriquece el campo de la educación matemática, entendiéndola como una actividad que debe plantearse de manera intencionada en clase y que requiere dedicación de tiempo (p. 133).

En específico, las investigaciones enfocadas en la multiplicación se encuentran de manera más generalizada dentro de los diferentes teóricos recopilados Ivars y Fernández (2016), quienes hacen un rastreo del interés creciente por la resolución de problemas multiplicativos y la tipificación de la manera de abordar los problemas por parte del estudiante. Por su parte, Alghamdi et al. (2019) examinan el conocimiento matemático implicado en la multiplicación como un asunto que integra la comprensión de otras estructuras de soporte como las razones, la pendiente, la tasa de cambio y las proporciones, las cuales resultan fundamentales para el desarrollo de aprendizajes matemáticos posteriores. Al trasladar la resolución de problemas a un contexto de enseñanza bilingüe, se abre un valioso abanico de posibilidades de investigación, en tanto que se enriquece la didáctica de la matemática en escenarios bilingües mediante el uso de los marcos de resolución de problemas de estructura multiplicativa.

Al respecto, si bien es cierto que existen numerosas investigaciones en cuanto a resolución de problemas y las dificultades asociadas, siendo estos aportes teóricos y metodológicos los que constituyen el punto de partida de esta investigación, sin pretender hacer a un lado los conocimientos. Por el contrario, estos cimientos teóricos abren la posibilidad de estudiar un escenario particular del Colegio Bilingüe CEDAM, el cual permite analizar un fenómeno novedoso que surge al incorporar la variable de la enseñanza de las matemáticas donde el inglés no es la lengua materna de los estudiantes, sino un medio de instrucción en desarrollo.

Ante este panorama, la presente investigación no pretende replicar los estudios tradicionales sobre el aprendizaje de la multiplicación, sino comprender cómo se manifiestan estas dificultades cuando el estudiante se enfrenta al desafío simultáneo de decodificar el enunciado en inglés como lengua extranjera y ejecutar el procedimiento matemático en el contexto específico del Colegio Bilingüe CEDAM.

1.5 Antecedentes

En el colegio CEDAM, a partir de los resultados de las pruebas diagnósticas aplicadas en el primer periodo del año 2024, el desempeño histórico en pruebas trimestrales de ese año y de años anteriores, y en general, los resultados académicos de los estudiantes de grado cuarto, se ha evidenciado algunas dificultades al resolver problemas multiplicativos. Dado que la institución adopta una modalidad bilingüe bajo el enfoque de Aprendizaje Integrado de Contenidos y Lengua Extranjera (AICLE), el dominio lingüístico del inglés constituye una variable de alta relevancia para comprender cómo los estudiantes abordan tanto la lectura de los enunciados escritos como la interpretación de las situaciones matemáticas planteadas en las tareas de *Math Word Problems* (MWP)

Al respecto, en su investigación sobre el desarrollo de destrezas en la escuela básica, Jitendra et al. (2009) señalan que la resolución de problemas no se reduce a la planeación y ejecución mecánica de cálculos aritméticos, (asociados a esquemas de acción, conocimientos estratégicos y procedimentales), sino que demanda de forma obligatoria la adecuación de la solución a la situación problemática original, la determinación de la razonabilidad del resultado matemático y la comunicación asertiva de la respuesta. En el contexto del bilingüismo en desarrollo del Colegio CEDAM, estos planteamientos adquieren un valor fundamental, pues revelan la necesidad de articular con precisión *el qué conceptual* (identificando relaciones semánticas expresadas en inglés en el enunciado) *con el cómo procedimental* (la selección y ejecución del algoritmo matemático correspondiente).

A lo largo de las últimas décadas, la investigación en educación matemática ha tomado c interés por el estudio de la resolución de problemas, considerándola, Según Goñi (2008), como una de las manifestaciones más evidentes del desarrollo de la competencia matemática. Es, por tanto, la resolución de problemas constituye un eje fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En esta línea, Jitendra et al. (2009) destacan la estrecha conexión de la resolución de problemas verbales con la realidad de los estudiantes, constituyendo un componente esencial de las

actividades escolares desde los primeros años de la educación básica y continúa siendo relevante en etapas posteriores. En este sentido, la resolución de problemas no solo influye en el ámbito escolar y en el aprendizaje inicial de las matemáticas, sino que también contribuye al desarrollo de habilidades necesarias para enfrentar situaciones cotidianas y tomar decisiones fundamentadas, siendo así en una herramienta clave para la vida. Citando a Verschaffel et al. (2007), los autores enfatizan que el abordaje de los problemas verbales permite a los estudiantes comprender el significado de las operaciones involucradas en una situación contextualizadas, lo cual tiene impacto directo en el desarrollo de su competencia aritmética.

En el ámbito normativo nacional, el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) respalda esta postura al indicar que la formulación, el tratamiento y la resolución de problemas son macroprocesos que permiten desarrollar en el estudiante una actitud perseverante e inquisitiva, impulsándolo a desplegar una serie de estrategias que le llevarán a la búsqueda de soluciones, reflexionando sobre los procesos desarrollados y proponer nuevos planteamientos. No obstante, el MEN (2006) advierte³ que para consolidar el pensamiento matemático en sus diversas manifestaciones, los docentes deben evitar el uso exclusivo de problemas rutinarios extraídos de textos escolares y, en su lugar, planificar de manera sistemática situaciones problema complejas, atractivas y contextualizadas que desafíen las capacidades cognitivas y lingüísticas de los educandos.

Capítulo II. MARCO TEÓRICO

El estudio de la resolución de problemas en el contexto de la enseñanza de las matemáticas impartida en inglés como lengua extranjera, requiere una aproximación a la conceptualización del estudiante frente a sus competencias matemáticas y sus competencias en el inglés como segunda lengua. Teniendo en cuenta las condiciones de mediación ante ello y las exigencias presentadas a nivel normativo e institucional, resulta fundamental abordar las consideraciones frente a aspectos de competencia, desde el ser competente en matemáticas y ser competente en lenguas, analizando cómo ambas dimensiones coexisten en el aula bilingüe. A partir de la revisión de la literatura, se evidencia que las didácticas aplicadas en matemáticas y en inglés, aunque comparten algunas similitudes, presentan particularidades metodológicas propias que exigen concertar acuerdos didácticos orientados a optimizar los procesos de resolución de problemas en este escenario específico.

Al respecto, el Ministerio de Educación Nacional (MEN ,2006, p 49) señala que se ha despertado un interés en las investigaciones y reflexiones teóricas en torno al concepto de competencia en la comunidad de investigadores en educación matemática. Bajo esta perspectiva, el documento oficial enfatiza que las competencias “no se alcanzan de manera espontánea, sino que requiere de condiciones de aprendizaje enriquecidas por situaciones problemáticas significativas y comprensivas, las cuales brindan la posibilidad de avanzar en estos niveles de competencia cada vez más complejos” (p. 49).

Por lo tanto, un acercamiento a los términos dados en el Ser Matemáticamente Competente tenemos que encontrar una relación íntima con los fines de la educación matemática en cada uno de los niveles, a expresarse en el presente trabajo en grado cuarto de primaria (Chamorro & Chamorro Plaza, 2003,p.13) En este sentido, se asume que la matemática una actividad humana condicionada por la cultura y la historia (MEN, 2006, p.46). En esta práctica social, los sujetos movilizan sistemas de representación y hacen uso de recursos lingüísticos y expresivos con el fin de realizar planteamientos y

buscar soluciones de carácter interno y externo a las matemáticas (MEN,2006, p.46). Este dinamismo, motivado por la necesidad de proponer respuestas pedagógicas y soluciones a estos problemas reales, permiten el surgimiento de técnicas, reglas y perspectivas que socialmente son destacables y compartidas. (p.46)

En conexión con ello, el conocimiento matemático se compone de dos dimensiones fundamentales: el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental, la cuales señalan nuevos derroteros al interpretar la noción de ser matemáticamente competente. De acuerdo con el Ministerio de Educación Nacional (MEN,2006), esta noción aplicada de competencias se encuentra directamente relacionada con el «saber qué, el saber qué hacer y el saber cómo, cuándo y por qué hacerlo» (p. 49). Esta conceptualización sirve de sustento al considerar el ejercicio mismo de la resolución de tareas, el cual constituye el foco principal de este trabajo dentro de un contexto bilingüe. Dicho proceso demanda, entre otros aspectos, identificar el núcleo del saber que se está resolviendo, reconocer qué procedimientos se deben llevar a cabo y comprender cómo realizarlos de manera reflexiva dentro de un contexto determinado.

Sumado a ello, cuándo consideramos la visión desde lo matemático y/o lingüístico, la resolución de problemas empieza a abrirse en un abanico de posibilidades más allá de la somera comprensión del funcionamiento de las operaciones dentro del problema o las palabras claves (*Keywords*). Estas últimas ayudan a reconocer el tipo de problema, pero no en todos los casos demarca eficiencia en el desarrollo de problemas frente al abordaje de los estudiantes. Ante lo anterior es pertinente identificar componentes teóricos claves en pro de dar respuesta oportuna al planteamiento del presente trabajo.

2.1 Resolución de problemas

Para propiciar el desarrollo de un estudiante matemáticamente competente, la tarea matemática se constituye como el instrumento fundamental de mediación. Si bien coexisten diversas tipologías de tareas en el aula, la resolución de problemas se destaca por ser una actividad de alta exigencia cognitiva que trasciende la mera ejecución algorítmica y la reproducción procedimental. En escenarios de educación bilingüe, este proceso adquiere una complejidad particular, pues demanda no solo la decodificación lingüística del enunciado, sino la transición comprensiva desde el contexto verbal hacia el planteamiento matemático formal, integrando la interpretación de datos para activar pensamientos matemáticos específicos. Al respecto, de acuerdo con Chamorro y Chamorro Plaza (2003), la tarea escolar debe estructurarse en torno a un objetivo de aprendizaje nítido frente a un contenido disciplinar, donde la interacción de los estudiantes configure tanto el desarrollo de su propia competencia como el propósito mismo de la enseñanza (p. 4).

Según Chamorro, las características dadas a la tarea matemática y sus interacciones entre alumno, maestro y contenido matemático determinarán los niveles de exigencia cognitiva y social como facilitadores de un determinado aprendizaje. Una crítica constante, que también puede ser una dificultad en el desarrollo frente a la resolución de problemas, es encaminar esta tarea solo hacia la escucha del problema y un único camino correcto, usualmente dado a través de algoritmos, reduciendo así la solución a una colección de procedimientos de cálculo. “El significado dado a la actividad matemática por parte del alumno (lo que hace con la tarea para resolverla, sea individual o en grupo) será diferente si las actividades son del tipo de formulación, representación, resolución y/o comunicación de problemas matemáticos a partir de una situación” (Chamorro & Chamorro Plaza, 2003, p.5)

Según el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2017), la resolución de problemas se define como un macroproceso, lo que significa que su abordaje debe ser permanente y transversal a lo largo de los diferentes niveles escolares y de los diversos tipos de pensamiento matemático. Bajo esta perspectiva, se constituye como un eje dinamizador que acompaña y estructura todos los aprendizajes disciplinares. Ante esto, resulta indispensable cuestionarse si la resolución de problemas es simplemente una temática más dentro del plan de estudios o si, por el contrario, representa el eje integrador del currículo. La respuesta a este interrogante define el enfoque didáctico: o bien se reduce la actividad escolar al adiestramiento en trucos o pistas superficiales de cálculo, o se asume como un espacio reflexivo que moviliza y articula los saberes de los estudiantes para solucionar situaciones complejas.

En esta línea, la resolución de problemas fomenta de manera activa el desarrollo del pensamiento crítico, al incorporar componentes esenciales como el razonamiento, el análisis reflexivo y la construcción estructurada de argumentos, todos ellos determinantes para el éxito en el ámbito escolar (Boonen et al., 2013; Depaepe et al., 2010; Hickendorff, 2013). Al respecto, de acuerdo con Jitendra et al. (2009), los modelos teóricos enfocados en la resolución de problemas verbales (word problems) comparten dos fases esenciales. La primera de ellas consiste en la representación y comprensión del problema, lo que exige al estudiante construir un modelo mental coherente de la situación planteada a partir del reconocimiento de esquemas matemáticos. Este proceso preliminar requiere no solo identificar de manera precisa la información numérica y lingüística relevante, sino también descifrar las relaciones cuantitativas subyacentes en el enunciado escrito.

En consecuencia, el proceso resolutor trasciende la simple planeación y ejecución técnica de carácter puramente procedimental y aritmético. Como señalan Depaepe et al. (2010) y Mayer y Hegarty (1996), resolver un problema verbal de estructura multiplicativa demanda un engranaje cognitivo complejo que abarca la adecuación de la solución matemática a la situación problemática original, la verificación de la razonabilidad del resultado y la posterior capacidad de comunicar la solución obtenida de forma asertiva. Así, la competencia matemática no se evidencia únicamente en la precisión del cálculo algorítmico, sino en la capacidad semántica y lingüística de decodificar y dar sentido al enunciado.

Esta separación entre los conceptos y los pasos mecánicos altera profundamente la visión tradicional sobre las capacidades lógico-matemáticas de los estudiantes. No es suficiente con memorizar una fórmula de multiplicar; se necesita que el alumno comprenda la razón de su uso. De esta forma, el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) describe la competencia como un tejido de saberes donde el alumno vincula el «saber qué, el saber qué hacer y el saber cómo, cuándo y por qué hacerlo». En las aulas de cuarto de primaria del Colegio CEDAM, este vínculo se hace evidente frente a los enunciados bilingües. Para no depender de recetas memorizadas en inglés, el alumno necesita moverse con soltura entre los tres campos que plantea Godino (2004). Estos campos exigen, en primer lugar, el plano de los datos explícitos del enunciado, seguido de la destreza para calcular de forma correcta, y finalmente, la comprensión conceptual que le permite comprobar si su respuesta tiene lógica en la vida real.

2.2 ¿Es un ejercicio o es un problema?

Al entrar en la definición de ejercicios, Goñi (2008) lo define como “aquella tarea en la que el estudiante debe aplicar lo que se le ha enseñado recientemente (aplicando el nivel de reproducción) y que están también descritas en el nivel de reproducción (p56). Lo anterior implica la utilización de procedimientos y algoritmos rutinarios, así como la manipulación de expresiones y fórmulas y la realización de cálculos. Estos son conocidos por estudiantes y por docentes en este tipo de tarea. Los ejercicios, sin temor a duda son una de las mayores constantes de la vida escolar. ¿Por qué hacemos esta definición al momento de hablar de problemas? El autor nos expresa que “en algunos casos son casi el único tipo de tarea que se hace porque muchas de las tareas denominadas problemas no lo son en realidad, sino que son ejercicios disfrazados de problemas” (Goñi 2008, p57). Cabe aclarar que, los ejercicios y los problemas son puestos como tarea, pero que no todas las tareas son ejercicios o problemas, ni todas las tareas son problemas.

2.3 ¿Se debería por tanto pasar este nivel de reproducción para avanzar a la resolución de problemas?

De ninguna manera, puesto que el nivel de reproducción establece las bases operativas necesarias para acceder a niveles de complejidad superior. Saltarse esta etapa podría acarrear dificultades significativas en el desarrollo posterior de problemas, tal como se abordará más adelante desde la perspectiva de Godino (2004). Ejercitarse en matemáticas resulta un paso indispensable, ya que sin construir de forma adecuada las habilidades de nivel básico —entendidas como un recurso disponible en todo momento— no resulta fácil dominar competencias de rango superior (Goñi Zabala, 2008).

No obstante, existe una fuerte crítica por parte del cuerpo docente sobre el uso excesivo de ciertos tipos de tareas, como los ejercicios rutinarios. Esta práctica, sumada a la saturación de contenidos en el currículo, reduce considerablemente el tiempo disponible para la resolución de

problemas. En este sentido, Goñi Zabala (2008) advierte que «el porcentaje no nos dirá solamente qué se hace (ejercicios), sino qué no se podrá hacer por falta de tiempo» (p. 57). Esta utilización masiva de tareas mecánicas puede ser uno de los factores principales de la aversión que algunos estudiantes manifiestan hacia las matemáticas. Según explica el autor:

Esta utilización masiva de ejercicios en los que prima la aplicación mecánica de reglas y algoritmos memorizados sin comprensión es la responsable de la imagen que para muchos estudiantes tienen las matemáticas y está en el origen de muchas de las actitudes negativas suscitadas. (Goñi Zabala, 2008, p. 58)

Frente a la postura de considerar obsoletas las competencias asociadas a estos aprendizajes por una supuesta falta de uso en los entornos personal, social y profesional, conviene precisar que la crítica de Goñi Zabala (2008) se orienta específicamente a la escasa utilidad del cálculo escrito de cantidades grandes en la actualidad. Por el contrario, el autor rescata el cálculo oral y estimativo como un pilar fundamental para el desarrollo de competencias básicas en diversos contextos.

Esta orientación se ve reflejada en los lineamientos del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006), los cuales señalan que en grados como tercero y cuarto de primaria se otorga un peso significativo al manejo del cálculo escrito. Si bien este aprendizaje es necesario, resulta crucial no emplear los ejercicios de forma indiscriminada. Ante este escenario, la resolución de problemas emerge como el vehículo idóneo para transitar hacia niveles superiores de pensamiento matemático. Asimismo, en el contexto del presente estudio, cobra especial relevancia el uso del libro de texto guía institucional, el cual integra problemas, ejercicios, experiencias y juegos que, bajo una adecuada mediación didáctica, contribuyen significativamente al aprendizaje de las matemáticas en una segunda lengua.

Al abordar el concepto formal de problema, Goñi Zabala (2008) retoma los planteamientos del proyecto PISA (OCDE), en los cuales se define la competencia matemática como «la capacidad de utilizar el conocimiento matemático en un contexto» (p. 59). Asimismo, el autor examina las acepciones de la Real Academia Española (RAE), destacando aquella que entiende el problema como el «planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos», junto con otras definiciones complementarias como «cuestión que se trata de aclarar» o «proposición o dificultad de solución dudosa». Al concebir el problema dentro de la categoría general de las tareas escolares, Goñi Zabala llega a una conclusión central: la competencia matemática equivale, en última instancia, a la capacidad de resolver problemas. Esta postura ubica a la tarea denominada "problema" en el corazón mismo de la actividad matemática escolar.

Para ilustrar esta idea, el autor plantea una analogía con la preparación de un atleta guiado por su entrenador. El deportista se ejercita de manera fraccionada y mediante diversas rutinas para alcanzar su meta; sin embargo, este entrenamiento cobra sentido únicamente cuando se orienta de forma integral a enfrentar la competencia final. Frente a la pregunta de qué relación guarda este paralelismo con la enseñanza de las matemáticas, Goñi Zabala (2008) señala que la prueba del atleta equivale a la resolución de problemas: así como el propósito de todo el entrenamiento deportivo es lograr el máximo rendimiento en la competencia, para el estudiante de matemáticas el objetivo de la formación y la ejercitación previa es alcanzar el máximo desempeño al resolver problemas en contexto.

2.4 Ser Competente Matemáticamente:

Para MEN (2006 pag. 49) “Las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos”

La competencia matemática encuentra su desarrollo a través de la actividad matemática a lo largo del tiempo, ligado al desarrollo escalonado de la comprensión del contenido matemático. Según Chamorro & Chamorro Plaza, 2003: “Cuando se comprenden las nociones y procedimientos matemáticos se pueden utilizar de manera flexible adaptándose a situaciones nuevas y permitiendo establecer relaciones entre ellos y ser utilizados para aprender nuevo contenido matemático”. Esta comprensión lleva a entender el significado, la funcionalidad de los procedimientos y su correlación.

“Dotar de sentido a la expresión «ser matemáticamente competente» está relacionado con los fines de la educación matemática de la etapa, y por tanto contextualizado en un momento en el tiempo. El currículo de matemáticas de la etapa de Primaria expresa en términos de capacidades las finalidades de la formación. Muchas veces la noción de competencia se vincula a una componente práctica «ser capaz de hacer...» y se vincula a saber cuándo, cómo y por qué utilizar determinados instrumentos. Especificar diferentes dimensiones que puedan ayudar a caracterizar el término «ser matemáticamente competente» es relevante para que sea tenido en cuenta por el maestro. El maestro debe organizar el contenido matemático para enseñarlo (planificar) con unos objetivos en mente y, también, debe interpretar las producciones de los alumnos desde las cuales pueda realizar inferencias sobre el aprendizaje conseguido. Así, tanto en la planificación de la enseñanza, durante la gestión de las interacciones con sus alumnos, como en la interpretación y análisis de sus producciones, el maestro debe ser explícito en lo que va a considerar competencia matemática de sus alumnos.” (Chamorro & Chamorro Plaza, 2003, 13)

Chamorro & Chamorro Plaza, 2003 plantea algunos aspectos que pueden dar luces en las dimensiones del ser competente matemáticamente:

“Comprensión conceptual de las nociones, propiedades y relaciones matemáticas. La comprensión conceptual se vincula a la posibilidad de establecer relaciones entre conceptos y procedimientos matemáticos en situaciones de resolución de problemas.”

Desarrollo de destrezas procedimentales de carácter general y, en particular, las que permiten realizar los procesos de construcción.

Pensamiento estratégico: formular, representar y resolver problemas. En este sentido, ser capaces de plantearse problemas nuevos, representarlos mentalmente y resolverlos implica superar los aspectos particulares de la situación.

Capacidades de comunicar y explicar matemáticamente. La capacidad de explicar y comunicar matemáticamente lo realizado implica usar las nociones y procesos matemáticos en la comunicación y explicación permitiendo desarrollar su competencia comunicativa.

Actitudes positivas en el alumno en relación con sus propias capacidades matemáticas. La posibilidad de admitir diferentes niveles de sofisticación en las respuestas permite que alumnos con diferentes capacidades matemáticas puedan generar, en sus grupos, resoluciones de la tarea planteada.... puede permitir que los diferentes alumnos lleguen a tener confianza en sí mismos y en su capacidad matemática permitiendo la mejora de los propios procedimientos de construcción y valorando positivamente la incorporación de información por parte de los alumnos.” (Chamorro & Chamorro Plaza, 2003, 14)

Goñi Zabala (2008) plantea una relación estrecha entre ser competente en matemáticas y la resolución de problemas, partiendo de la premisa que, para desarrollar competencia matemática la realización de tareas requerirá el uso y desarrollo de conocimientos matemáticos, siendo la que mejor sintetiza todas las demás poniendo en juego la competencia matemática: la resolución de problemas. Lo anterior no quiere decir que solo se deban solucionar problemas de manera diaria para desarrollar la competencia matemática, puesto que se sugiere que se pueda combinar con diferentes tipos de tareas para conseguir desarrollar los factores básicos necesarios.

Uno de los desafíos es desarrollar destrezas en cuanto a la resolución de problemas verbales y la comunicación matemática puesto que son áreas problemáticas para muchos alumnos, así como para los profesores según EACEA 2011 y OCDE 2010. En el caso de la OCDE, cuando se habla de las tareas orientadas al aprendizaje de la matemática, según lo investigado por Goñi Zabala (2008), las pruebas PISA son usadas como referente en varios estudios sobre competencias y desempeño matemático.

Se tipifica en tres niveles el aprendizaje matemático acorde al orden de dificultad: El primer nivel se denomina “Nivel de Reproducción, donde se tiene en cuenta “los procedimientos y algoritmos rutinarios, la manipulación de expresiones y fórmulas y la realización de cálculos, estas las relaciona Goñi con el término de “ejercicios”, siendo estos los que ocupan una mayor parte de lo recibido en la enseñanza escolar de las matemáticas.

“En el nivel de Reproducción se considera aquellas tareas cuya resolución implica la utilización de procedimientos y algoritmos rutinarios, la manipulación de expresiones y fórmulas y la realización de cálculos “Goñi

Como segundo nivel se encuentra “nivel de conexión”, el cual es un paso de lo meramente procedimental, a una interpretación de la información dada por el problema reconocimiento elementos del primer nivel que puede tomar para solucionar, y la utilización de relaciones entre conceptos matemáticos. Este nivel, afirma Goñi, requiere de actuar con mayor autonomía y mostrar una comprensión de su propia acción superior al nivel anterior.

“El nivel de conexión implica la interpretación de la información, la identificación de los elementos matemáticos pertinentes y la utilización de relaciones entre los diversos conceptos matemáticos. “Goñi

Como último nivel se encuentra el nivel de Reflexión que es la aplicación del pensamiento creativo a la resolución de problemas. Esto también conlleva a la capacidad de justificación y argumentación del camino dado para resolver el problema

Frente a lo dicho por Goñi en cada nivel planteado por la OCDE, la incorporación frente al análisis y ejecución de la presente investigación es pertinente que:

En el nivel de reproducción, se presta atención al carácter porcentaje de la tarea, en el cómo se desarrollan los procedimientos y algoritmos rutinarios, pues esto puede aligerar la carga cognitiva frente a la resolución de problemas. Ejemplo de ello, podría ser el manejar los espacios correspondientes al ejecutar el algoritmo de la multiplicación o al sumar puesto que al operar de manera desordenada podría afectar los resultados. Otra parte podría ser el desconocimiento de las tablas de multiplicar, que hace parte de los DBA de grado 3,4 y 5 y que de no desarrollarse puede inclinar el esfuerzo a recordar el uso de estas y no comprender su funcionalidad o como llegar a ellas de otras maneras

Frente al segundo nivel “nivel de Conexión o relación” es importante ahondar en él como los estudiantes interpretan la información, y cómo relacionan las palabras o información dada con elementos matemáticos claves para el desarrollo del problema. En inglés existen diversas corrientes dadas a la identificación de palabras claves que den un indicio en la identificación de lo que se necesita para resolver el problema. Teóricos como Polya, hablan de la identificación del problema con mayor claridad. Sin embargo, hay una interrogante frente a lo dicho por Goñi que podría ser de ayuda en el proceso de resolver problemas de palabras en inglés ¿Cuál es en nivel de Autonomía y comprensión que tiene un estudiante al momento de resolver un problema de palabras? ¿Cuánto es necesario el maestro en ello al momento de dar las pautas necesarias para su desarrollo? ¿El estudiante lo podría desarrollar por sí solo con los conocimientos con los que cuenta o requiere de una instrucción previa y un reconocimiento claro de la información? y si comprende la información ¿Podrá desarrollar el problema siempre o requiere de una combinación con su destreza matemática?

En el último nivel, el nivel de reflexión, se desprenden algunos a priori sobre la resolución de problemas, en este nivel se habla del pensamiento creativo en matemáticas y la capacidad de justificar y argumentar correctamente los caminos seguidos en la resolución de problemas.

Consideramos lo dicho por Goñi(2008) en desarrollo de competencia matemática, quien afirma que “ cualquier clasificación sobre el grado de dificultad de los aprendizajes y sobre la relación entre este grado de dificultad y las tareas asociadas es problemática, ya que los factores que inciden en estas clasificaciones son muchos, y es muy difícil hacer una disección clara de los mismos... ”, en la búsqueda de teóricos y referentes documentales se encuentran diferentes corrientes y clasificaciones del aprendizaje en relación a la resolución de problemas. Goñi se orienta a la propuesta del proyecto PISA, la cual considera sencilla y práctica, y que está ajustada, a su parecer a un buen análisis de las operaciones cognitivas, recomendando no solo conocerla sino utilizarla.

2.5 Sobre la Ingeniería didáctica:

La ingeniería didáctica nace como fruto de un análisis didáctico serio en un escenario de enseñanza- aprendizaje donde se determinan las variables didácticas, que controladas por el profesor permiten a los alumnos realizar elecciones u anticipaciones, tomar decisiones, llevar a cabo acciones y comunicaciones que puedan permitir la prueba, y la validación, frente al análisis y la investigación (Chamorro Plaza, 2005, p. 31).

Con respecto a lo anterior, una visión dada por la Didáctica de la Matemática como una “ciencia de diseño” tiene una reflexión importante con respecto al papel de los educadores. Lesh y Sriramn (2010, p.124) citado por Godino, J. D et al. (2019, p. 1) mencionan que:

“¿Deberían los educadores matemáticos considerarse a sí mismos como psicólogos educativos aplicados, psicólogos cognitivos aplicados, o científicos sociales aplicados? ¿Se deberían ver como científicos, al igual que en el campo de la física, o de otras ciencias puras? ¿O más bien como ingenieros u otros científicos orientados al diseño, cuya investigación se apoya sobre múltiples perspectivas prácticas y disciplinares – y cuyo trabajo está guiado por la necesidad de resolver problemas reales, además de la de elaborar teorías relevantes? (Lesh y Sriramn, 2010, p. 124).

Así, los autores se cuestionan cómo debe actuar el educador en su labor frente a su ejercicio en la enseñanza- aprendizaje de las matemáticas, la investigación vista como ciencia por Godino, J. D et al. (2019, pag 1) “orientada al diseño de procesos y recursos para mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. A lo anterior se destaca el actuar como ingeniero dentro del proceso de enseñanza - aprendizaje, enmarcando la ingeniería didáctica en la dirección de perspectiva práctica “cuyo trabajo está guiado por la necesidad de resolver problemas reales”. (Lesh y Sriramn, 2010, p. 124).

La Ingeniería didáctica entra en la escena de la didáctica de la matemática a comienzos de la década de los 80 con el propósito de dar un acercamiento al abordaje del trabajo didáctico en comparación al trabajo del ingeniero. La ingeniería didáctica es un enfoque metodológico de Investigación que propone diseñar, implementar, analizar y revisar en similitud con el proceso técnico-científico propio de una ingeniería. Podemos encontrar las siguientes similitudes.

Tabla 1

Similitudes entre el hacer docente- investigador y el ingeniero en el diseño de producto.

	En el trabajo didáctico se diseñan secuencias didácticas teniendo en
Diseño	cuenta referentes teóricos y necesidades frente al aprendizaje, similar al diseño de productos o sistemas para resolver problemas técnicos.
	Genera modelos pertinentes a la enseñanza - aprendizaje tomando
Modelación	como referentes teorías didácticas, mientras que el ingeniero modela sistemas físicos o tecnológicos mediante el uso de ciencias aplicadas
	Siendo el aula el escenario, se llevan al hecho propuestas didácticas
Experimentación	en contextos reales, similar a lo que hace el ingeniero al realizar un prototipo y lo que espera al realizar pruebas a un producto.
	Subsiguiente al diseño, modelación y experimentación se realiza un
Validación y Retroalimentación	proceso de ajuste del producto, en este caso se dan los ajustes a la secuencia en base a lo observado y al análisis de aprendizaje, similar a como el ingeniero mejora después de las pruebas de funcionamiento el diseño de su producto o sistema.

Nota. Adaptado de Ingeniería didáctica (Parte 1) [Video] por Aprendamos de todo, 2020

2.6 Categorías del error de Newman

El Análisis de Errores de Newman (Newman's Error Analysis, NEA) propone que resolver un problema verbal exige superar una serie de pasos ordenados. Si el estudiante se traba en alguno de estos niveles, comete un fallo específico que permite ubicar exactamente dónde se rompió el proceso

de solución (Newman, 1977). Uzuriaga et al. (2025) señalan que los estudios basados en este modelo pueden abordarse desde enfoques cualitativos o cuantitativos. De hecho, Musyadad y Martadiputra (2021) emplean un diseño descriptivo para rastrear estas fallas en el aula. Por esta razón, se retoma la propuesta original de Newman (1977), la cual evalúa tanto la decodificación lectoescritora como la destreza aritmética del alumno a través de cinco fases: lectura, comprensión, transformación, desarrollo del proceso y codificación

Las categorías se describen a continuación:

Lectura (Reading error). En este primer paso el estudiante lee y decodifica las palabras y los símbolos presentes en el problema. La dificultad se produce cuando, al momento de analizar las palabras o símbolos de un problema escrito presenta una falla en el reconocimiento por parte del sujeto que soluciona dicho problema, la cual puede producir una falla en el rumbo dado a la solución del problema. Al abordar la lectura de un texto en matemáticas el estudiante evidencia la necesidad de reconocer palabras o símbolos que se pueden encontrar algunas veces en tablas, gráficas y/o diagramas. Para este punto pueden ser aplicadas estrategias de la enseñanza de la lectura aplicadas a la comprensión de la lectura del problema matemático o a la lectura de preguntas de matemáticas. Singh, Rahman y Hoon (2010).

Al entrar en campo de la lectura como posible factor de error, se puede presentar errores por omisión o interpretaciones erróneas considerando el uso del idioma teniendo el inglés como medio de instrucción, revelando dificultades del en la dimensión lingüística. A lo anterior la manera simultánea o particular pueden darse dificultades específicas en el contenido matemático, ya que el vocabulario tiene un carácter específico, aunque éste trate de alinearse a su aplicación en la vida cotidiana. Por otro lado, la dificultad de la lectura se puede presente por otra parte en la dimensión de lo cognitivo- didáctico, vislumbrando los obstáculos y significados que los estudiantes pueden llegar a construir. Adicional, este

nivel jerárquico establece el error frente al uso o no uso de las imágenes que contenga el texto y el uso adecuado de los datos convirtiéndose en lecturas incorrectas.

Comprensión (*Comprehension error*). En este paso el estudiante da sentido a lo que ha leído. En este paso el estudiante requiere encontrar relaciones entre los elementos del problema. El estudiante puede leer el enunciado, entrando superficialmente en la situación problematizadora, aun logrando leer la pregunta dada, pero sin entender cuál es el requerimiento de esta, fracasando en la resolución de la situación presentada al no poder indicar el requisito de la pregunta. El estudiante puede tener comprensión de lectura y conocer en el caso del contexto bilingüe algunas expresiones, pero pueden encontrarse con vocabulario matemático específico y esto exige de su competencia para distinguir cómo utilizar una palabra en contexto.

Para Prakitipong y Nakamura (2006) los dos primeros pasos (Lectura y Comprensión) dan cuenta de la comprensión del estudiante frente a la pregunta o cuestionamiento en el contexto matemático correctamente. En esta primera concepción del problema se puede suponer que se requiere una lectura comprensiva, un entendimiento a nivel lingüístico y una relación del lenguaje natural y el lenguaje matemático.

Transformación (**Transformación error**): En esta etapa, el estudiante convierte el enunciado en lenguaje natural a una representación matemática formal, identificando qué operaciones o secuencias de cálculo se requieren para resolver la situación planteada (Newman, 1977). El error de transformación ocurre cuando, a pesar de haber comprendido la pregunta, el alumno no logra determinar la estructura operacional o el algoritmo adecuado para llegar a la solución.

En este nivel, las dificultades suelen evidenciarse en la aplicación de estrategias rígidas o rutinarias que no se ajustan a la estructura real del problema, así como en el uso de procedimientos incoherentes o incompletos (Ivars & Fernández, 2016). De igual forma, se observan fallas al gestionar las

variables, las unidades de medida o los cambios de representación requeridos para avanzar hacia el cálculo efectivo.

Habilidad de proceso (*Process skill error*). En este punto es donde el estudiante realiza las operaciones matemáticas. En cuanto a los errores relacionados con la jerarquía de habilidades de proceso, los estudiantes no solo incurren en fallos frente a la elección del método o estrategia, lo cual puede conducir a un cálculo incorrecto, sino también en relación con la ejecución del procedimiento matemático. Se pretende entonces identificar, según los tipos de problema, qué dificultades de interpretación se presentan por parte de los estudiantes y cuál es su capacidad para tomar decisiones sobre el proceso adecuado en el manejo de los datos. Lo anterior permite observar que algunos estudiantes pueden identificar correctamente los datos, pero, aun comprendiendo el problema, ya sea directamente en la segunda lengua o mediante su mediación al español a través de un cambio de código, continúan presentando dificultades al momento de decidir el procedimiento correcto para la transformación de los datos.

Según Singh, Rahman y Hoon ,2010 se identifica un error en la habilidad de proceso cuando, aunque el estudiante identificó la operación a realizar o la secuencia de operaciones de manera acertada, al utilizarla en el alcance de la solución de problemas se encuentra que el procedimiento no se realizó de manera correcta. El estudiante identifica la operación correcta pero presenta dificultades evidenciadas en errores de carácter aritmético, errores de carácter procedimental o soluciones incompletas.

Codificación (*Encoding error*). El estudiante registra el resultado final de manera apropiada. El estudiante resuelve correctamente el problema, pero no logra expresar la respuesta en una forma adecuada. El estudiante puede dar respuestas que denotan cierta habilidad matemática pero no responden a la pregunta formulada o responde de manera incompleta.

A estas cinco categorías originales (Newman, 1977), la literatura posterior añadió dos adicionales: ha añadido dos más:

Descuido (Carelessness). Introducida por White (2005), se refiere a los casos en que el estudiante comete un error en la prueba escrita, pero demuestra en la entrevista que domina el procedimiento. El error se debe a falta de atención más que a una carencia conceptual o procedimental. Este error puede ser un error de lectura o un error de comprensión

Argumento defectuoso (*Flawed argument*). Descrito por Clements & Ellerton (1996), se da cuando el estudiante obtiene la respuesta correcta, pero a partir de un razonamiento incorrecto o incompleto, lo que revela deficiencias conceptuales pese al resultado aparentemente exitoso.

2.7 Las estructuras multiplicativas de Vergnaud (1990).

Dentro de su teoría de campos conceptuales, Vergnaud define las estructuras multiplicativas como aquellas situaciones que exigen multiplicación, división o combinaciones de ambas. Estas se agrupan en tres grandes tipos:

Comparación multiplicativa: cuando una cantidad se expresa como múltiplo o fracción de otra.

Isomorfismo de medidas (proporcionalidad): cuando se relacionan dos magnitudes mediante una razón o tasa.

Producto de medidas (producto cartesiano): cuando se requiere calcular el número de combinaciones posibles entre elementos de dos o más conjuntos

Esta clasificación es clave para caracterizar la naturaleza conceptual de los problemas analizados y para comprender la complejidad cognitiva que implican.

Tabla 2*Clasificación de problemas de tipo multiplicativo.*

Categoría	Tipo	Incógnita
	Multiplicación	Total de objetos
Isomorfismo de medidas	División Partitiva	Número de objetos por grupo
	División medida	Número de grupos
Comparación multiplicativa (Un único espacio de medidas)		Una medida (cantidad comparada)
	Multiplicación	
	División	Una medida (cantidad referente)
Producto de medidas	División	Un escalar
	Multiplicación	Medida producto (cantidad compuesta; se conocen las 2 medidas elementales o componentes)
	División	Una medida elemental (uno de los componentes)

*Nota. Adaptada de Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativas.***2.8 Las estrategias de resolución descritas por Ivars y Fernández (2016).**

Estos autores, apoyados en el marco de Vergnaud, distinguen tanto estrategias correctas como estrategias incorrectas en la resolución de problemas multiplicativos:

Estrategias correctas: modelización gráfica, conteo, uso de hechos numéricos, aplicación del algoritmo estándar y razonamiento avanzado.

Estrategias incorrectas: uso del algoritmo inverso, aplicación de relaciones aditivas inadecuadas, empleo indiscriminado de todos los datos, combinación incompleta (1 a 1) y respuestas sin sentido matemático.

Este doble enfoque permite situar la actuación de los estudiantes en un continuo que va desde procedimientos incipientes y errores recurrentes hasta estrategias formales y fundamentadas, aportando así información complementaria al NEA.

Capítulo III: ASPECTOS METODOLÓGICOS

3.1. Metodología

La presente investigación, se diseñó y desarrolló bajo un enfoque descriptivo- explicativo. Este tipo de diseño es idóneo para aproximarse a la comprensión de fenómenos educativos complejos en su escenario natural, permitiendo identificar, describir y analizar las dificultades cognitivas y lingüísticas que experimentan los estudiantes de grado cuarto de educación primaria al enfrentarse a la resolución de problemas verbales multiplicativos (MWP, por sus siglas en inglés, Math Word Problems) en inglés como lengua extranjera.

3.1.1. Especificaciones de la Metodología

El estudio tiene como fundamento metodológico la Ingeniería Didáctica de Michelle Artigé, Dando una perspectiva que permite concebir, diseñar, experimentar y analizar de manera sistematica las situaciones dadas en la enseñanza y aprendizaje en el contexto del aula bilingüe. Al respecto Douady (1996, p.241) sostiene que:

“... el término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase.”

Se requiere un análisis previo de las dificultades presentadas en el desarrollo de Math Word Problems (MWP) en contextos de educación Bilingüe siendo el inglés la lengua extranjera, esto con el fin de procurar alcanzar el objetivo general y aportar a los conocimientos dados alrededor de la pregunta de investigación. La investigación será cualitativa con un enfoque descriptivo-explicativo adaptado a la metodología de la Ingeniería didáctica, dado esto a los factores a estudiar frente a las dimensiones Epistemológica, Cognitiva y Didáctica en un análisis preliminar. Ante los abundantes recursos dados en resolución de problemas verbales (Math Word Problem) pero escasos frente al abordaje en inglés como lengua extranjera. Esto requiere considerar un análisis previo del estado del arte en referencia a la resolución de problemas en contextos bilingües siendo el inglés la lengua extranjera.

Para dar respuesta al objetivo generar de la investigación y abordar los aspectos matemáticos frente a los lingüísticos en el aula Bilingüe bajo el enfoque AICLE que tiene el Colegio CEDAM, se estructuró una ruta de recolección de datos alineada con las fases de la Ingeniería Didáctica. Los instrumentos diseñados para cada momento fueron organizados de manera secuencial de acuerdo con el propósito pedagógico, momento de aplicación dentro de los ciclos de investigación y su correspondencia con los anexos presentados

Prueba Diagnóstica Escrita (Anexo1): Basada en el libro de texto guía de la institución. Aplicada en la fase a priori del Ciclo I para identificar el desempeño inicial de los estudiantes y las barreras del vocabulario académico o técnico en inglés.

Secuencia de juego de Roles – Role Play (Anexo 2): Actividad interactiva de simulación de contextos y uso de material concreto. Implementada en el Ciclo I para reducir la ansiedad lingüística y favorecer la comprensión conceptual mediante el andamiaje interactivo.

Problemas Bilingües – Estudiantes en el Rol de Docente (Anexo 3): Situación de andamiaje en la que cada estudiante formula, explica y justifica en inglés un problema multiplicativo ante sus pares.

Prueba con Niveles de Newman y Entrevistas Clínicas (Anexo 4): Test Escrito individual acompañado de consignas verbales estandarizadas. Aplicado en la fase de evaluación autónoma del Ciclo II para caracterizar y categorizar cualitativamente los puntos de ruptura cognitiva y lingüística.

Prueba de Estructuras Multiplicativas de Vergnaud (Anexo 5) Instrumento enfocado en analizar el comportamiento cognitivo del estudiante ante problemas de isomorfismo de medida, comparación multiplicativa y producto cartesiano.

Tabla 3.

Matriz de caracterización de instrumentos de recolección de datos y su correspondencia con los anexos

Instrumento	Propósito Pedagógico	Ciclo	Anexo
Prueba Diagnóstica Escrita	Diagnosticar desempeños iniciales y barreras léxicas basadas en el libro de texto guía.	Ciclo I (Fase <i>A priori</i> y Diagnóstico)	Anexo 1
Juego de Roles (Role Play)	Disminuir la ansiedad lingüística y promover la interacción con material concreto.	Ciclo I (Fase de Intervención Didáctica)	Anexo 2
Estudiante en Rol de Docente	Facilitar el andamiaje entre pares mediante la formulación y explicación oral de problemas.	Ciclo I (Fase de Socialización)	Anexo 3
Prueba y Entrevistas de Newman	Identificar la etapa exacta de ruptura del error (Lectura a Codificación).	Ciclo II (Evaluación Autónoma)	Anexo 4
Estructuras de Vergnaud	Evaluar el esquema cognitivo según la naturaleza del problema multiplicativo.	Ciclo II (Análisis Epistemológico)	Anexo 5

Nota. Elaboración propia basada en la ruta metodológica del estudio.

3.1.2 Delimitación Poblacional y Criterio de Muestreo Progresivo

El estudio partió con una población inicial de 100 estudiantes los cuales pertenecían a grado cuarto de educación básica primaria del Colegio Bilingüe CEDAM, los cuales se encontraban distribuidos en cuatro grados cuarto (4°A, 4°B, 4° C y 4° D). En coherencia con el enfoque cualitativo y el marco de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995), el proceso de selección muestral no buscó como foco de atención una representabilidad estadística de carácter probabilístico; en su lugar, se priorizó la validación local de una secuencia de enseñanza en escenarios reales de aula. Bajo este principio, la muestra se estructuró bajo un diseño de focalización progresiva (*Progressive focusing*) (Stake, 1995) y muestreo intencional orientado por criterios de necesidad pedagógica (Patton, 2015), desarrollado en tres momentos metodológicos:

1.Fase exploratoria Macro (N=100): En un primer momento, se administró la prueba diagnóstica inicial, la cual fue diseñada a partir del libro de texto institucional, esta se aplicó a la totalidad del grado cuarto. Este barrido permitió cartografiar el estado general del pensamiento multiplicativo y determinar la interferencia que podía tener la interacción del inglés como lengua extranjera en la población global.

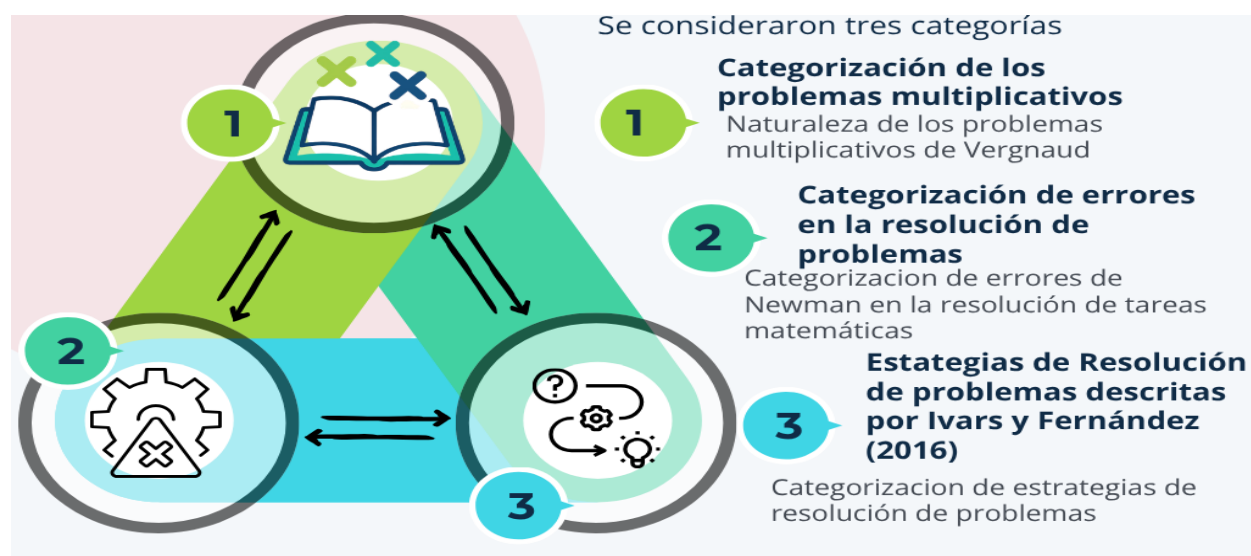
2. Fase de Experimentación e Intervención (n=50): El diagnóstico inicial puso de manifiesto dos cursos que concentraban las barreras más persistentes en la decodificación semántica del inglés y la estructuración cuantitativa. Con el propósito de intervenir allí donde el obstáculo didáctico resultaba más severo, se seleccionaron estos dos grupos (50 alumnos) como muestra de trabajo activo. Con ellos se focalizaron los andamiajes del taller de Role Play (Anexo 2) y la posterior aplicación del Test MWP escrito (Anexo 3).

3. Fase de Análisis Clínico en Profundidad (n=26): Asumiendo el alto nivel de exigencia operativa que demanda la transcripción, codificación y categorización de las interacciones verbales en el enfoque cualitativo (Creswell, 2014), se delimitó una submuestra de 26 estudiantes para la aplicación individual del protocolo de Entrevistas Clínicas de Newman (1983). Tal reducción permitió indagar cualitativamente en los puntos de ruptura cognitiva y registrar el progreso en la autonomía matemática de los participantes.

3.2 Categorización

En el presente estudio, el análisis de las producciones de los estudiantes no se limitó a un registro meramente cuantitativo de los aciertos y desaciertos. Por el contrario, se estableció una triangulación teórica que permite comprender de manera holística el proceso de resolución de problemas verbales multiplicativos (MWP) en un entorno de educación bilingüe. Esta triangulación, ilustrada en la figura 2, de manera dinámica busca articular tres dimensiones esenciales teniendo en cuenta el aprendizaje matemático y lingüístico: la Jerarquía de errores de Newman (1977), los campos conceptuales de Vergnaud (199.) y las estrategias de resolución de problemas identificadas por Ivars y Fernández (2016).

Figura 1 Triangulación metodológica para de categorías para el análisis de problemas verbales multiplicativos (MWP)



Nota. Diagrama de elaboración propia basado en la articulación teórica de los campos conceptuales de Vergnaud (1990), el análisis de errores de Newman (1977) y las estrategias de resolución de Ivars y Fernández (2016)

En primer lugar, el Newman Error Analysis (NEA) se adopta como la categoría de análisis primaria. Su elección se justifica por su capacidad diagnóstica secuencial, la cual resulta de gran relevancia al momento de abordar como opera el aula donde el inglés es el medio de instrucción. Dado que los dos primeros niveles del NEA (Lectura y Comprensión) evalúan directamente la decodificación semántica y la interpretación del enunciado, este marco permite identificar si el punto de quiebre de las dificultades está en un origen lingüístico o si se localiza en etapas posteriores relacionadas estrictamente con el contenido de la tarea matemática (Transformación, Procesamiento y Codificación).

En segundo lugar, esta categoría principal se complementa con la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990). Esta dimensión teórica aporta una visión epistemológica al momento de clasificar los problemas propuestos por su naturaleza conceptual (Isomorfismo de medida, comparación multiplicativa y producto cartesiano) y el nivel de complejidad cognitiva implícito en cada uno de ellos. La articulación de Vergnaud permite analizar si los errores clasificados por Newman en la fase de "transformación" se deben a una persistencia cognitiva del estudiante dentro de las estructuras aditivas, impidiéndole concebir la multiplicación como una relación multiplicativa o proporcional.

Finalmente, se incorporan las categorías de Ivars y Fernández (2016) Para caracterizar las estrategias específicas que los estudiantes puedan usar en sus actividades de trabajo en resolución de problemas. Esta dimensión posibilita una clasificación detallada entre los procedimientos correctos (como la modelización grafica o el conteo) y los incorrectos (como el uso indiscriminado de todos los datos o la aplicación de adiciones inadecuadas). De este modo, se relacionan los tres referentes conceptuales configurando la matriz de análisis para identificar las dificultades de los estudiantes de grado cuarto frente al pensamiento multiplicativo.

3.3 El Protocolo de Entrevista Clínica de Newman

Como se anticipó en la ruta metodológica, las dificultades lingüísticas y operatorias que experimentan los niños a menudo permanecen ocultas tras una hoja de respuestas escrita o un ejercicio dejado en blanco. Por esta razón, el análisis de las producciones escritas (documentado en los Anexos 1, 2 y 3) no fue pasivo; se complementó cualitativamente mediante la aplicación de la Entrevista de Indagación Clínica Individual de Newman

Esta técnica de entrevista busca que el docente-investigador actúe como un mediador que ayuda a exteriorizar los razonamientos matemáticos y las barreras semánticas del alumno mediante la verbalización. Para garantizar la replicabilidad del diagnóstico y evitar sesgos de interpretación en el aula bilingüe, la interacción verbal durante las entrevistas clínicas individuales se estructuró estrictamente sobre el protocolo de consignas estandarizadas propuesto por Newman (1983) en su manual metodológico *Strategies for diagnosis and remediation*:

Lectura (Reading): "Por favor, léame la pregunta. Si no conoce alguna palabra, omítala". (Evaluación de la decodificación de grafemas y vocabulario bilingüe elemental).

Comprensión (Comprehension): "Dígame qué le pide la pregunta". (Evaluación de la traducción conceptual del enunciado a la lengua materna).

Transformación (Transformation): "Dígame cómo encontrará la respuesta". (Evaluación de la selección del esquema multiplicativo adecuado).

Habilidades de proceso (Process skills): "Muéstreme qué hacer para obtener la respuesta. Dígame qué está haciendo mientras trabaja"(Evaluación de la ejecución algorítmica y operatoria de la multiplicación).

Codificación (Encoding): "Ahora escriba la respuesta a la pregunta". (Evaluación de la representación formal y coherente de la solución hallada).

En la Tabla 3 se resume la jerarquía de Newman aplicada en este estudio, vinculando los indicadores conductuales de cada nivel en las tareas matemáticas diseñadas para el aula regular del Colegio CEDAM.

Tabla 4

Jerarquía de Newman para la ejecución de una tarea matemática.

1. Reading	2. Comprehension	3. Transformation	4. Process Skill	5. Encoding
Please read the question to me. If you don't know a word, leave it out.	Tell me what the question is asking you to do.	Tell me how you are going to find the answer.	Show me what to do to get the answer. 'Talk aloud' as you do it, so that I can understand how you are thinking.	Now, write down your answer to the question
Indicador:	Indicador:	Indicador:	Indicador:	Indicador:
Decodificación lingüística elemental y pronunciación.	Traducción semántica (Traslanguaging) del requisito matemático.	Selección de la estructura multiplicativa adecuada.	Ejecución del algoritmo y computo de la operación.	Registro formal y escrito de la respuesta matemática.

Nota. Adaptada de Strategies for diagnosis and remediation, por M.A. Newman, 1983, Harcourt Brade Jovanovich.

Con el propósito de respaldar el seguimiento riguroso en la caracterización de los participantes en cada etapa, la información se procesó a través de tres momentos interconectados. En la etapa inicial de **registro**, cada prueba escrita dio lugar a un instrumento físico individual (Hoja de trabajo), el cual se complementó con la ficha de observación directa empleada en las entrevistas clínicas. En este soporte se transcribieron, de forma literal las notas de campo o las observaciones dadas por los estudiantes, sus explicaciones verbales principales y las conductas observables ante las cinco consignas estandarizadas del protocolo de Newman (1983). Posteriormente, la **codificación** del punto de punto de ruptura adoptó la premisa jerárquica del modelo de Newman (1977). Bajo este criterio, se asignó a cada estudiante una única categoría de error asociada al primer nivel de falla identificado durante la resolución. Así, cuando un alumno manifestaba un bloqueo en la etapa de lectura o en la de comprensión, el desempeño se catalogaba en dicho escaño, prescindiendo del análisis de las fases posteriores al no haberse alcanzado la estructura matemática del enunciado.

Finalmente, para la sistematización y análisis, la información recabada de la muestra (n=50) se compiló en la matriz general de datos en Excel. En este instrumento se registraron, de forma pormenorizada por ítem, la identificación del estudiante, la estructura multiplicativa involucrada (Vergnaud, 1990), el nivel de error diagnosticado (Newman, 1977), la estrategia desplegada (Ivars & Fernández, 2016) y las anotaciones cualitativas derivadas de la observación. La consolidación de esta matriz constituyó la base para calcular las frecuencias y porcentajes que se presentaran en el Capítulo IV.

CICLO 1

Actividades diagnósticas

A priori : en esta etapa se caracterizó el desempeño inicial de los estudiantes para así prever los posibles obstáculos cognitivos y lingüísticos que podrían enfrentar al resolver problemas multiplicativos en inglés. Para esto se hizo un análisis de los contenidos las estructuras sintácticas y las demandas conceptuales de las actividades presentes en el libro de texto guía del grado cuarto. A partir de la literatura en didáctica de la matemática y de Las observaciones que se realizaron anteriormente se logró determinar que la principal barrera no radicaba únicamente en la operación aritmética de la multiplicación, sino en la decodificación del lenguaje textual al lenguaje matemático. Al ser en inglés su segundo idioma, términos clave de la estructura multiplicativa (Times as many, each, product o equally shared) suelen generar un tipo de confusión de orden semántico.

Algunos problemas del libro que implicaron tanto multiplicación como razón o tasa fueron seleccionadas. Por ejemplo, dentro del isomorfismo de medidas se plantean situaciones como: si un objeto cuesta x , ¿cuánto cuestan n objetos?; mientras que en comparación multiplicativa se encuentran enunciados como: Sara tiene el triple de canicas de pedro. Al analizar este tipo de problemas, se observó que el libro de texto demanda que el estudiante tenga un nivel avanzado de comprensión lectora en inglés para identificar las relaciones cuantitativas presentes en el enunciad. Esto suele ocultar los errores procedimentales como errores de traducción o de lectura.

Toda esta información nos sirvió para estructurar una primera prueba diagnóstica que estaba basada estrictamente en el formato del libro, con el fin de medir el impacto real de la barrera idiomática en un entorno familiar para el alumno.

Experimentación: En esta fase se realizó un estudio con los cuatro cursos de grado cuarto, con un total de 50 estudiantes de la institución educativa. Es importante resaltar que estos estudiantes cuentan

con un nivel de competencia en inglés en desarrollo, es decir, se ubican en un nivel A2 (**usuario básico o intermedio-bajo**), según los estándares del Marco Común Europeo de Referencias para lenguas (MCER), quienes reciben la asignatura de matemáticas en inglés como segunda lengua.

La recolección de los datos se extendió durante un período de tres semanas que contaron como dos ciclos académicos (constan de 6 días cada uno) sin interrupciones en las clases de matemáticas. Así los estudiantes aprovecharon estos espacios para llevar a cabo la prueba. Cabe resaltar que cada bloque tiene una duración de 45 minutos.

Se aplicó una prueba diagnóstica inicial extraída del libro de texto de forma individual la intención de esta era recolectar escritos y tomar notas sobre preguntas recurrentes que hacían los alumnos de cuarto grado en relación con el vocabulario a partir de esto se logró implementar también un taller estructurado en parejas. El propósito de este fue fomentar la discusión en voz alta para entender cómo los estudiantes trataban de generar un significado Al momento de Traducir el problema de inglés a la lengua materna que en este caso es el español para así darle una solución idónea

Una vez recolectadas las producciones escritas y las observaciones que Se realizaron en la fase de experimentación y en la fase a priori, se realizó un análisis del comportamiento real de los alumnos frente a los problemas propuestos. Se contrastó lo planificado en la fase a priori, evidenciando que algunos aspectos funcionaron. Uno de ellos fue la extracción de problemas del libro de texto, dado que la resistencia inicial de los estudiantes hacia la prueba disminuyó un poco al reconocer el formato visual y el tipo de problemas. Otro de ellos estuvo relacionado con el trabajo en parejas durante el taller, ya que esto facilitó la manifestación de sus estrategias de traducción y el andamiaje entre pares para superar ese obstáculo del vocabulario.

Por otro lado, la fase diagnostica permitió identificar ciertas dificultades vinculadas al uso de las situaciones problemas extraídas del libro de texto. Aunque los estudiantes estaban familiarizados con el

formato gráfico y la estructura habitual de dichos ejercicios, la extensión de los enunciados y el uso de un vocabulario técnico en inglés representaron un obstáculo inicial.

De acuerdo con el protocolo de Newman (1983), esta complejidad léxica generó bloqueos en las dos primeras etapas del proceso de resolución (lectura y comprensión). Si bien la omisión o no respuesta por parte de los alumnos puede estar asociada a varios factores como la fatiga cognitiva, la inseguridad procedimental, el análisis cualitativo de las entrevistas clínicas reveló que, en un número significativo de casos, la principal dificultad no estaba presente en no manejar el algoritmo multiplicativo, sino en la imposibilidad de interpretar la estructura semántica en la segunda lengua. Un claro ejemplo de la barrera lingüística conceptual se evidenció en la falta de entendimiento de uso de expresiones multiplicativas como: “three times as many as”. fue confundida como una adición de 3.

Sin embargo, basándonos en estas observaciones a posteriori el instrumento original del libro de texto fue modificado para transformarse en un taller diagnóstico más elaborado y específico. Los cambios que decidimos incluir fueron: una reducción de la carga textual (las oraciones complejas en inglés fueron simplificadas) sin perder esa estructura matemática; la inclusión de soportes visuales, es decir, se añadieron diagramas de barras y otras representaciones pictóricas del problema para así favorecer la comprensión del problema para el estudiante.

Roleplay (Juego de roles)

A priori: Continuo al taller diagnóstico, se llevó a cabo un Role Play, con el propósito de representar situaciones reales relacionadas con problemas multiplicativos y favorecer la comprensión mediante la interacción y la experiencia práctica

La inclusión de esta actividad respondió a la necesidad de disminuir el nivel de abstracción presente en algunos problemas escritos, observando que aproximadamente el 38% de los estudiantes no presenta obstáculos significativos en los niveles de lectura y comprensión del enunciado.

Para desarrollar el Role Play, se tuvo presente escenarios para que los estudiantes representaran situaciones de compra y venta, agrupación de objetos y distribución de elementos, permitiendo que se sintieran en un escenario cotidiano y a su vez el poder observar cómo interpretaban las relaciones multiplicativas.

Experimentación: Esta actividad fue diseñada para que cada estudiante asumiera el rol de docente, preparando y presentado ante sus compañeros un problema verbal multiplicativo redactado en inglés. Esta actividad se pensó como una situación de andamiaje, es decir, un apoyo temporal para que los alumnos realizaran una tarea que aún no dominaban de manera autónoma.

Con una semana de antelación, se indicó a cada estudiante que debía inventar o adaptar un problema multiplicativo en inglés. Las siguientes instrucciones fueron dadas: el problema Como parte de la estrategia didáctica, se le pidió a los estudiantes redactar un problema verbal de estructura multiplicativa en inglés , usando un vocabulario acorde a su nivel escolar en la lengua (A2), para la presentación de la actividad se dieron las siguientes instrucciones: formular el enunciado del problema en inglés empleando el léxico matemático visto y trabajado en la unidad, explicar paso a paso la estrategia de resolución elegida , justificando de forma explícita la elección de la operación multiplicativa frente a otras operaciones (como la adición repetida), los estudiantes tendrán un tiempo máximo de 5 minutos utilizando carteleras de apoyo o el tablero.

El día que la actividad tomó lugar, los estudiantes se ubicaron en sus puestos habituales, se dispuso un espacio al frente del salón para que cada expositor pudiera utilizar el tablero o carteleras. El

orden de las exposiciones se sorteó para garantizar la participación equitativa, y cada estudiante contó con un tiempo máximo de 5 minutos para presentar el problema y explicar su solución.

Durante esta actividad, la función de los autores consistió en observar y registrar aspectos como, el enunciado del problema, las estrategias que el estudiante utilizó para explicar la solución (dibujos, esquemas, lenguaje cotidiano, etc.), y dificultades en la comunicación oral en inglés. Al finalizar cada presentación, se dio un espacio de preguntas entre los compañeros, moderado por los investigadores.⁷ Por otro lado, se garantizó que todos los estudiantes tuvieran la oportunidad de exponer, incluso aquellos que mostraron inseguridad inicial. En este tipo de situaciones, se le dio un apoyo cercano al alumno, pero sin resolver el problema; aplicando a (Vygotsky, 1978) *“el aprendizaje ocurre primero a nivel social y luego a nivel individual, lo cual justifica el trabajo colaborativo y la interacción entre pares durante la actividad”*.

A posteriori

Modificación

Este tipo de actividad permitió evaluar la efectividad que tiene la comunicación y socialización de estrategias en comparación con la rigidez o exigencia que tiene una prueba escrita. Hubieron cosas que funcionaron y otras que no funcionaron tanto, pero hablando de las que funcionaron se puede decir que la corporalidad y el uso de un material concreto actuaron como un excelente andamiaje lingüístico. Los estudiantes que dejaban en blanco la expresión *“Times or equally shared”* en el taller o en el libro de corporalidad y el uso de un material concreto actuaron como un excelente andamiaje lingüístico. Los estudiantes que dejaban en blanco la expresión *“Times or equally shared”* en el taller o en el libro de texto comprendieron mejor el concepto y el significado de estas expresiones. Al momento de explicarlo en su roleplay usando juguetes, carteleros, entre otras cosas, es decir, el juego o actividad de roleplay disminuyó drásticamente la ansiedad hacia el segundo idioma.

Algo que no funcionó muy bien fue que se pudo identificar que continuaba persistiendo la dificultad conceptual en la comparación multiplicativa es decir en ejercicios de comparación multiplicativa los estudiantes seguían presentando una confusión además algo que no ayudó mucho fue el ruido Ambiental de la actividad esto hizo por momentos que los alumnos se desconcentran y no le prestaran mucha atención a los conceptos o términos precisos en inglés que expresaban multiplicación y algunas veces se tuvo que resolver los problemas exclusivamente en español.

Prueba de isomorfismo

A priori : Para llevar a cabo la prueba de isomorfismo; se tuvo principalmente en consideración, lo dicho por (Vergnaud 1991) *“el isomorfismo de medidas constituye una de las principales estructuras del pensamiento multiplicativo y suele representar dificultades importantes para los estudiantes”*; de allí se desprendió un taller basado en problemas de isomorfismo de medidas, con preguntas diseñadas para analizar si los estudiantes lograban establecer relaciones entre dos magnitudes y comprender correspondencias proporcionales entre cantidades relacionados a cantidad-precio, correspondencia entre medidas y número de grupos y elementos; todo organizado progresivamente, iniciando con ejercicios de menor complejidad y avanzando.

Esta prueba fue creada con el fin de evaluar la capacidad de los estudiantes, para reconocer estructuras similares en diferentes problemas; basándose en literatura previamente expuesta en esta investigación, que indicaba que este tipo de problemas presentan niveles de dificultad relativamente más bajos en comparación con otras estructuras multiplicativas (comparación multiplicativa o producto cartesiano). Los enunciados fueron redactados con un nivel de inglés adecuado al grado cuarto, utilizando estructuras gramaticales sencillas y vocabulario recurrente (números, objetos cotidianos, precios, medidas).

Experimentación: En esta fase se describe cómo se llevó a cabo la recolección de los datos en el aula. El objetivo principal fue observar y registrar cómo reaccionaban los estudiantes al leer y resolver los problemas de división y multiplicación de isomorfismo en inglés.

Es necesario considerar que el estudio se realizó con estudiantes de los cuatro cursos de cuarto grado, cuyas edades estaban entre los 9 y 10 años, en un entorno de educación bilingüe. Su competencia lingüística se clasifica en un nivel A2 (usuario básico intermedio-bajo) de acuerdo con el Marco Común Europeo de Referencia para las Lenguas (MCER). En este nivel, los alumnos identifican vocabulario y expresiones cotidianas; sin embargo, enfrentan dificultades al abordar sintagmas complejos o enunciados extensos, lo que genera bloqueos durante el proceso de traducción e interpretación semántica del inglés al español.

La aplicación de la prueba diagnóstica permitió evidencias cualitativas sobre los obstáculos epistemológicos y lingüísticos que enfrentan los estudiantes al resolver problemas de carácter multiplicativos en una segunda lengua. El análisis no permitió evidenciar tres patrones de desempeño significativo:

Dificultades de decodificación y comprensión semántica (Niveles 1 y 2 de Newman): Se observó que la falta de respuestas no se debió a la falta de tiempo o desinterés, sino a la presencia de brechas léxicas.

Prevalencia de esquemas aditivos (Vergnaud, 1990): Ante la dificultad para transformar el enunciado en un modelo multiplicativo, un grupo representativo de estudiantes recurrió a la suma repetida como estrategia de sustitución.

Uso de representaciones semióticas y recursos gráficos: Los estudiantes tuvieron la oportunidad de emplear esquemas y gráficos lo cual permitió identificar que los estudiantes con mayor éxito procedimental fueron aquellos que utilizaron representaciones pictóricas intermedias para construir el significado del problema antes de ejecutar el algoritmo numérico.

A posteriori: Este test nos permitió analizar que hubieron cosas que funcionaron o que los estudiantes hicieron bien. Como por ejemplo los ejercicios donde se daba una multiplicación directa donde el valor unitario estaba muy explícito por ejemplo un paquete contiene seis lápices la mayoría de los estudiantes lograron resolverlo con una facilidad increíble logrando sortear las barreras que existen entre los idiomas y entendiendo así con claridad la tasa unitaria pero también hubieron cosas que no funcionaron muy bien o que los estudiantes no lograron resolver ya que. Pues habían ciertos problemas de división y no lograron darle una solución muy correcta debido a que no entendían muy bien el significado del cociente en inglés confundieron la magnitud del grupo con la magnitud del objeto por grupo también se identificó que la falta de comprensión en el léxico de verbos de partición provocó que los estudiantes restaran los números o multiplicaran los datos presentados mostrando que existe una ruptura entre el análisis de las magnitudes de Vergnaud.

Ciclo II

Test (MWP)

La construcción de esta prueba se fundamentó en un diagnóstico previo de las condiciones didácticas, cognitivas y epistemológicas del contexto de aplicación. A partir de la revisión del libro de texto del colegio y de exploraciones diagnósticas preliminares, se identificó que la barrera idiomática, específicamente el vocabulario matemático en inglés como (*times as many, each o equally shared*) oculta las verdaderas dificultades operatorias de los estudiantes. Este análisis previo justificó el motivo por el cual se decidió diseñar un instrumento con una carga textual reducida y estructuras gramaticales adaptadas al nivel A2, para así garantizar que lo que se iba a revisar era efectivamente la comprensión matemática y no exclusivamente la competencia lectora en lengua extranjera.

El instrumento(test) se estructuró seleccionando cuidadosamente problemas que abarcan las naturalezas multiplicativas de Vergnaud. Se diseñaron preguntas específicas para isomorfismo de medidas, que son problemas de proporción directa y valor unitario, problemas de comparación multiplicativa, que son situaciones que relacionan cantidades mediante un escalar y situaciones de producto cartesiano, que son problemas donde se combinan magnitudes.

La presente investigación se basa en la ingeniería didáctica (Artigue, 1995). Para la recolección de la información en la fase de análisis preliminar y diagnostico (a priori) , se diseñaron e implementaron dos instrumentos principales: la prueba diagnóstica individual y la entrevista clínica de indagación.

La prueba tuvo como propósito caracterizar las producciones iniciales escritas por los alumnos y así analizar e identificar los obstáculos lingüísticos y cognitivos asociados los problemas multiplicativos en una segunda lengua. La prueba se aplicó a 50 estudiantes de cuarto grado que fueron promovidos al grado de quinto dentro de su entorno y horario habitual de clase, durante un bloque aproximadamente de 90 minutos, esto con la finalidad de garantizar un ambiente familiar y conocido para los estudiantes frente a la segunda lengua (inglés).

Se establecieron las siguientes directrices durante la aplicación de la prueba, se tenía que desarrollar de forma individual, se permitía uso de dibujos, esquemas o algoritmos como estrategias válidas para la resolución de los problemas en las hojas entregadas.

Para evaluar la efectividad y así dar respuesta a la pregunta de investigación, los datos se analizaron haciendo una triangulación teórica:

Se examinó cada respuesta incorrecta o en blanco bajo el modelo de Newman. Se categorizó si el bloqueo ocurrió por incapacidad de decodificación lingüística (Niveles 1 y 2: Lectura y Comprensión), por fallos al plantear la operación matemática (Nivel 3: Transformación), o por errores puramente algorítmicos (Niveles 4 y 5: Habilidades de proceso y codificación).

Los errores categorizados por Newman se interpretaron dentro del marco de Vergnaud. Por ejemplo, se validó si el uso reiterado de la suma en problemas de isomorfismo evidenciaba una permanencia en el campo conceptual de las estructuras aditivas, confirmando así las dificultades estructurales subyacentes más allá de la barrera del idioma inglés

En primer lugar, se implementó una sesión de roleplay de problemas multiplicativos descrita y mencionada anteriormente. En esta dinámica, los estudiantes asumieron el rol de docente para presentar un enunciado en inglés y socializar como lo resolvieron. Haciendo uso de las pautas de andamiaje ya establecidas.

CAPÍTULO IV: ANÁLISIS DE RESULTADOS

El análisis de los datos recolectados durante las fases de experimentación de los Ciclos I y II de la Ingeniería Didáctica se estructuró a partir de una triangulación metodológica y teórica. Este proceso permitió contrastar el desempeño escrito de los 50 estudiantes de grado cuarto del Colegio Bilingüe CEDAM con sus explicaciones verbales y actitudes conductuales registradas en el trabajo de campo. Para ello, se articularon las categorías del análisis de errores de Newman (1977), la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990) y la caracterización de estrategias de Ivars y Fernández (2016)

4.1. Caracterización General de Desempeños Autónomos

Al consolidar las producciones escritas obtenidas de manera individual en la prueba escrito bilingüe del Ciclo II (Anexo 3), se obtuvo la distribución general de desempeños presente en la Figura 5

Figura 2

Porcentaje de respuestas entre correctas, incorrectas y en blanco (diagnóstico)



Nota. Elaboración propia.

Como se aprecia en la Figura 5, únicamente el 27% de las tareas matemáticas propuestas fueron resueltas de manera correcta por los estudiantes de forma autónoma. Por el contrario, un 42% de las respuestas fueron incorrectas y un preocupante 31% de las preguntas se dejaron en blanco (omisiones). Desde la perspectiva de la Ingeniería Didáctica, este panorama de resultados confirma que, al retirar los andamiajes interactivos de la fase lúdica del Ciclo I, emergen con fuerza los puntos de ruptura cognitiva y lingüística en los estudiantes. El elevado índice de omisiones (31%) e incorrecciones (42%) demuestra que la resolución de problemas verbales multiplicativos (MWP) en una segunda lengua (inglés) no puede abordarse mediante la enseñanza mecánica de algoritmos. Esto se debe a que el proceso de traducción del lenguaje natural al lenguaje matemático añade una sobrecarga a la memoria de trabajo de los alumnos, aspecto que se analiza cualitativamente en las siguientes secciones a la luz del modelo de Newman.

4.2. Análisis de Obstáculos Lingüísticos Iniciales (Newman: Lectura y Comprensión)

El análisis sistemático bajo el modelo de Newman (1977) arrojó que las dificultades iniciales se concentran de manera prioritaria en la decodificación semántica del problema. La Figura 1 revela que el 62% de los estudiantes presentaron barreras críticas en los niveles iniciales de Lectura y Comprensión del enunciado en lengua extranjera, o requirieron de un andamiaje didáctico sumamente profundo para poder iniciar la tarea.

Tabla 5

Sistematización general de errores por categoría de Newman (N = 50 estudiantes)

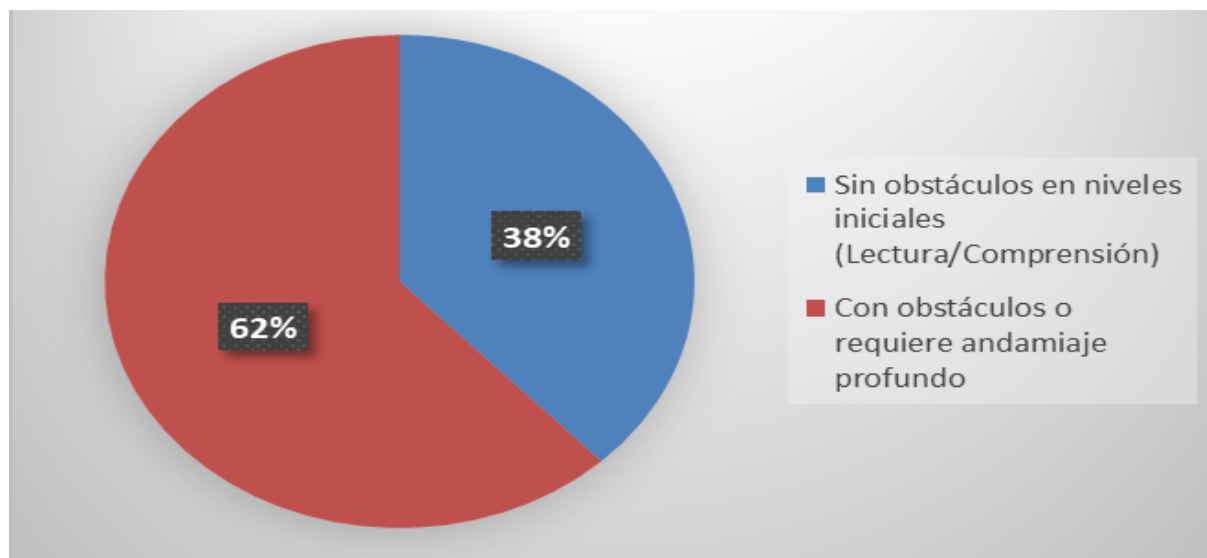
Criterio / Nivel de Newman	Indicador de Desempeño	N.º de Estudiantes	Porcentaje (%)
Sin Obstáculo	Superan satisfactoriamente los niveles de Lectura y Comprensión.	19	38 %
Nivel 1: Lectura (<i>Reading</i>)	Dificultad para decodificar vocabulario técnico en inglés (<i>times as many, each</i>).	16	32 %
Nivel 2: Comprensión (<i>Comprehension</i>)	Lee el enunciado pero no reconoce la demanda matemática de la situación .	15	30 %
Subtotal Obstáculos Iniciales	Estudiantes con barreras en Lectura o Comprensión (Andamiaje requerido).	31	62 %
Nivel 3: Transformación (<i>Transformation</i>)	Comprende el problema pero aplica esquemas aditivos o no selecciona la operación .	9	18 %

Nivel 4: Habilidad de Proceso (<i>Process Skill</i>)	Selecciona la operación, pero comete errores en la ejecución del algoritmo .	7	14 %
Nivel 5: Codificación (<i>Encoding</i>)	Resuelve el cálculo, pero no expresa la respuesta en las unidades requeridas .	5	10 %
Resolución Autónoma Exitosa	Resuelve la tarea de manera autónoma, correcta y completa.	13	27 %
Total Analizado	Muestra total de participantes de grado cuarto .	50	100 %

Nota. Elaboración propia basada en las pruebas escritas y entrevistas clínicas del Ciclo II.

Figura 3

Estudiantes que tuvieron obstáculos iniciales y profundos

Cantidad de estudiantes

Nota. Elaboración propia (ver anexo 1)

Al contrastar cualitativamente este 62% con los registros de la fase diagnóstica recopilados en el Anexo 1, se identifica que el léxico técnico del texto guía escolar genera bloqueos semánticos inmediatos. En las pruebas escritas del Anexo 1, expresiones de comparación multiplicativa como "three times as many" (tres veces más que) fueron interpretadas por la mayoría de los niños como una relación aditiva (asumiendo que debían sumar el número 3 a la cantidad dada).

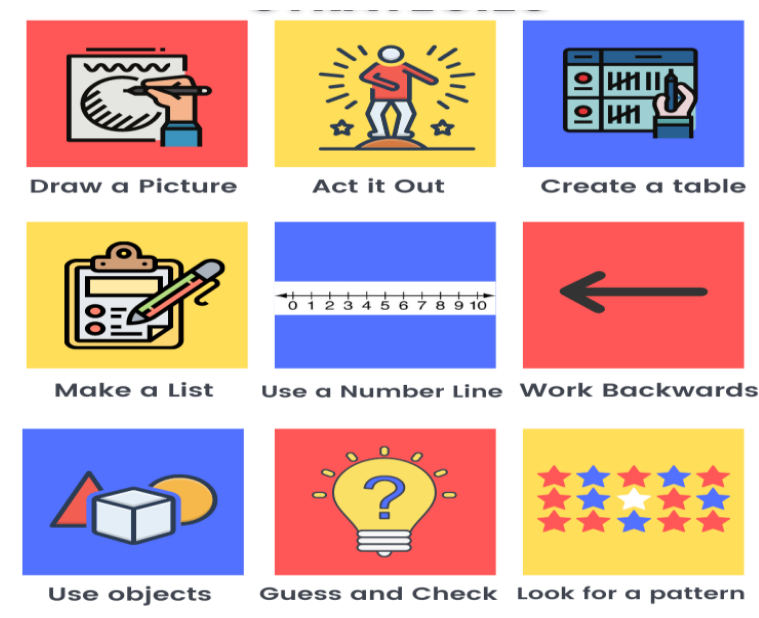
4.3. El Rol de las Mediaciones Alternativas y el Translenguaje

Este fenómeno de confusión semántica se asocia con el nivel de inglés en desarrollo de los estudiantes (clasificado como A2 según el Marco Común Europeo de Referencia) . En las encuestas de percepción cualitativa integradas en la Prueba con niveles de Newman (Anexo 4) , redactadas en su lengua materna para evitar la limitación expresiva, los estudiantes manifestaron sentirse "asustados" o "bloqueados por la cantidad de palabras en inglés". De acuerdo con Prakitipong y Nakamura (2006), los errores en estos dos primeros niveles impiden que el estudiante acceda a la verdadera estructura

matemática del problema, lo que demuestra que el obstáculo en el Colegio CEDAM es inicialmente de mediación lingüística y didáctica antes que puramente aritmético.

Frente a los obstáculos identificados en el diagnóstico, la experimentación del Ciclo I introdujo metodologías no tradicionales, específicamente el taller lúdico interactivo de juego de roles (Role Play), cuyos soportes físicos se encuentran en el Anexo 2 y 3 . La efectividad de esta fase se puede explicar a través de las estrategias alternativas de solución consolidadas en la Figura 3 .

Figura Math Problem Solving Strategies



Nota. Adaptado de Math problem Solving Strategies. Prolearning (2020)

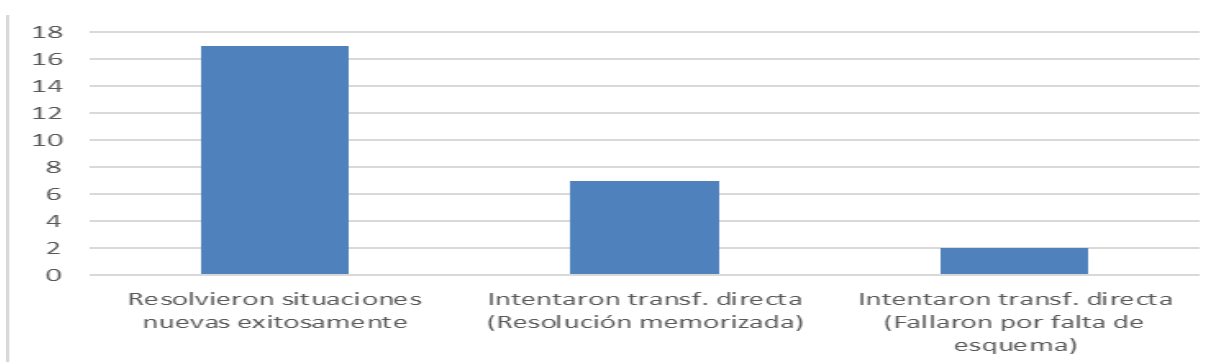
Las observaciones de campo sistematizadas en el Anexo 2 demuestran que la incorporación de estrategias lúdicas de la Figura 3, tales como "Act it out" (Dramatizarlo) y "Use objects" (Usar objetos/material concreto), permitieron sortear los dos primeros niveles de error de Newman. Al simular escenarios de tienda bilingüe (donde unos asumían el rol de clientes y otros de tenderos, intercambiando juguetes y productos), la densidad textual del inglés se redujo drásticamente. En este

espacio interactivo, el fenómeno del translenguaje (translanguaging) emergió como un recurso cognitivo legítimo. Los estudiantes pasaban de manera fluida del español al inglés para negociar significados, lo que disminuyó la ansiedad lingüística y les permitió concentrar sus recursos intelectuales en la relación numérica de las cantidades. Así, un estudiante que dejó en blanco el problema escrito en el papel por no reconocer el conector de reparto "equally shared", pudo ejecutar con total autonomía y éxito físico la distribución equitativa de los juguetes en el tablero del Anexo 2, demostrando que el andamiaje social y concreto precede a la formalización matemática escrita en entornos bilingües.

4.4. Análisis Epistemológico y Cognitivo de las Estructuras:

Una vez superadas o andamiadas las dificultades lingüísticas, el análisis de los errores en las etapas de Transformación y Habilidades de Proceso de Newman reveló retos de carácter conceptual ligados a la naturaleza del problema multiplicativo. La Figura 4 ilustra la distribución cualitativa de los errores específicos detectados ante problemas de Producto de Medidas (combinatoria) según la clasificación de Vergnaud (1990)

Figura 4 Distribución de Errores en Pregunta de Naturaleza Combinatoria



Nota. Elaboración propia. (ver anexo 5)

De los estudiantes que lograron comprender lingüísticamente el requerimiento de la pregunta combinatoria (Anexo 5), la Figura 4 muestra los siguientes comportamientos cognitivos.

- 17 estudiantes lograron resolver situaciones nuevas de manera exitosa, aplicando el razonamiento de producto cartesiano de forma estratégica
- 7 estudiantes intentaron realizar una transferencia directa basándose en una resolución memorizada del algoritmo de multiplicación, sin comprender por qué operaban las cantidades
- 2 estudiantes intentaron una transferencia directa, pero fallaron completamente debido a la total ausencia de un esquema multiplicativo

Al contrastar estos resultados con las producciones escritas y las transcripciones de las entrevistas del Anexo 5 (en su sección "estudiante en rol de docente"), se identifica un obstáculo didáctico profundo en las fases de Transformación de Newman. Ante problemas multiplicativos de producto cartesiano, los estudiantes que fallaron recurrieron de manera sistemática a la aplicación de relaciones aditivas inadecuadas (suma de las magnitudes dadas).

Siguiendo a Vergnaud (1990), este comportamiento demuestra que, aunque el bilingüismo añade complejidad, existe un obstáculo cognitivo subyacente: la permanencia de los estudiantes en el campo conceptual de las estructuras aditivas. Al no haber construido un esquema de relación cuaternaria o de composición de espacios de medidas, los alumnos imitan mecánicamente el algoritmo multiplicativo o retroceden a la suma intuitiva cuando la estructura semántica de la pregunta exige coordinar dos dimensiones distintas simultáneamente. Esto evidencia que el dominio técnico del algoritmo de multiplicación no es sinónimo de competencia matemática en resolución de problemas.

Estructura de Datos de la Investigación Didáctica

Obstáculos Iniciales (Lectura y Comprensión) - N = 26 estudiantes

Categoría de Estudiantes	Porcentaje (%)	Cantidad de Estudiantes
Sin obstáculos en niveles iniciales (Lectura/Comprensión)	38%	10
Con obstáculos o requiere andamiaje profundo	62%	16

Capacidad de Transferencia de la Estrategia Gráfica - N = 26

Resultado de Transferencia	Cantidad de Estudiantes	Porcentaje (Calculado)
Resolvieron situaciones nuevas exitosamente	17	65,4%
Intentaron transf. directa (Resolución memorizada)	7	26,9%
Intentaron transf. directa (Fallaron por falta de esquema)	2	7,7%
Total Muestra	26	100%

Desempeño en Pregunta Combinatoria (Producto de Medidas) - N = 26

Tipo de Respuesta	Porcentaje (%)	Cantidad Estimada
Respuestas Correctas	27%	7
Respuestas Incorrectas	42%	11
Omisiones (En Blanco)	31%	8
Total	100%	26

CAPÍTULO V - CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Sobre la articulación de referentes teóricos (Objetivo Específico 1) Nuestra primera tarea fue cruzar las naturalezas multiplicativas de Vergnaud (1990) con los contextos de aprendizaje bilingüe. Concluimos que el marco de Vergnaud es indispensable para entender que no todos los problemas multiplicativos exigen el mismo esfuerzo intelectual.

A partir de los resultados analizados, pudimos notar que los problemas de Isomorfismo de Medidas (proporcionalidad simple, donde hay una tasa clara y unitaria) son mucho más naturales para el estudiante. Los niños los resuelven con mayor fluidez porque la relación cuantitativa es directa, lo que les ayuda a superar más rápido la interferencia del inglés.

Por el contrario, las tareas de Producto de Medidas (combinatoria) exigen que el estudiante coordine mentalmente dos magnitudes distintas para generar una nueva. Aquí es donde la teoría nos dio la razón: al no tener consolidada esta estructura matemática de escala y producto, los alumnos aplican lo que Ivars y Fernández (2016) denominan "estrategias aditivas inadecuadas". Por lo tanto, concluimos que la teoría de los campos conceptuales debe ser el eje orientador de la didáctica en el aula, pues permite graduar la dificultad matemática antes de complejizar el idioma de instrucción.

Sobre el diseño de tareas bilingües y la Ingeniería Didáctica (Objetivo Específico 2) El proceso de diseño y rediseño de tareas nos demostró que el libro de texto escolar institucional, lejos de facilitar el aprendizaje, se convierte en muchas ocasiones en un obstáculo didáctico. Al realizar el análisis a priori bajo la metodología de la Ingeniería Didáctica, descubrimos que los problemas comerciales saturan al estudiante con enunciados kilométricos llenos de un inglés formal que no corresponde a su nivel cognitivo real.

La gran lección de este diseño (evidenciada en la transformación del Anexo 1 al Anexo 2) es que para evaluar la competencia matemática en una segunda lengua es necesario simplificar la carga textual y potenciar el uso de andamios visuales. Cuando adaptamos las guías acortando las oraciones e introduciendo diagramas de barras o representaciones pictóricas de las magnitudes, el rendimiento y la confianza de los estudiantes aumentaron significativamente. Reducir el texto no significa empobrecer la matemática; al contrario, permite que el estudiante se concentre en estructurar la correspondencia y la proporcionalidad de los números.

b) En cuanto al análisis de referentes teóricos encontramos que, en el contexto colombiano, aunque se viene implementando el bilingüismo fortalecido desde su enseñanza en lengua extranjera en colegios bilingües, sigue existiendo una necesidad de estudio de las dificultades dadas en problemas multiplicativos, puesto que los referentes teóricos establecidos suelen estar separados o invocados al lenguaje en mayor porcentaje. Al estudiar los problemas frente las naturalezas dadas por Vergnaud permite categorizar y dar una relevancia a las dificultades.

Algunos de los estudios se enfocan en la solución lingüística, tomando como derrotero la competencia en el idioma, mientras que otros estudios permiten ver que hay otros factores a tener en cuenta en este tipo de estudios.

c) Frente al diseño de tareas matemáticas de problemas multiplicativos en coherencia a las actividades institucionales, se presentó un apoyo de los materiales institucionales y se realizó un proceso frente a la ingeniería, permitiendo diseñar actividades de constante evaluación para minimizar las dificultades presentadas al momento de solucionar MWP de orden Multiplicativo. De lo anterior es de considerar un diagnóstico inicial para el diseño de las tareas, puesto que la Resolución de problemas es una de las tareas que pondrá sobre la mesa las competencias matemáticas. La Flexibilización de las actividades permite que los estudiantes diversifiquen su visión de las estrategias de abordaje de los problemas.

d) A lo anterior se da una triada entre el cómo se presenta el problema, como se aborda del problema y las dificultades o errores presentados al momento de solucionar los problemas. Al usar la ingeniería didáctica se logró hacer un ciclo constante de mejora frente a las dificultades presentadas por los estudiantes.

e) Se hallaron dificultades cuando se aplicaban pruebas donde el estudiante no tenía una ayuda grafica o no había un lenguaje comprensible. También se encontró dificultades al momento de solucionar algunos problemas multiplicativos. Y estos variaban de acuerdo a su naturaleza. Por lo cual implico realizar no solo pruebas o acercamientos a la resolución desde el papel o la prueba sino diversificar los acercamientos dados a los MWP.

f) Las dificultades que se encontraron en el uso de las categorías de Newman para el análisis de errores, donde se encontraron errores de lectura y comprensión, siendo estos comunes en los análisis lingüísticos, ante ellos se concluye que el uso de lenguaje conocido y representaciones graficas ilustrativas pueden disminuir las dificultades dadas en ellos. Por otro lado, las dificultades dadas por la transformación y el proceso se pueden trabajar desde la comprensión de las naturalezas de veranad.

g) El Diseño de tareas y el abordaje son importantes, pero también lo es en este punto el andamiaje dados en la resolución de problemas. Por último, a los estudiantes se les podría dificultar dar respuesta a la pregunta, si esta requiere de análisis más allá de las operaciones, al exigir esta, así como las otras partes del proceso un intercambio cognitivo entre no solo el lenguaje sino los conocimientos aplicados ponen en juego las competencias en matemáticas y en inglés como lengua extranjera.

h) Aunque para algunos autores el traducir o pasar de un idioma a otro pueda ser una dificultad, se evidenció que en el análisis de errores algunos estudiantes lograron superar estas dificultades en la mediación de código o el translenguaje (*translanguaging*), pasando del español al inglés y del inglés al español, esto permitiendo que los problemas fuesen abordados mientras fortalecían sus dos competencias.

CAPÍTULO VI: REFERENCIAS

Aprendemos de todo. (18 de mayo de 2020). Ingeniería didáctica. Parte 1 [Video]. YouTube.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica. Recuperado de <https://core.ac.uk/download/12341268.pdf>

Artigue, M. (1995). *Ingénierie didactique*. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises en didactique des mathématiques* (pp. 27-39). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Cantoral, R. (2005). *Desarrollo del pensamiento matemático* (1.ª ed., 225 pp.). México: Trillas.

Chamorro, M. d. C., & Chamorro Plaza, M. d. C. (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Pearson Educación.

Calderón, D. I., & León Corredor, O. L. (2012). La ingeniería didáctica como metodología de investigación del discurso en el aula. En *Lenguaje y Educación: Perspectivas metodológicas y teóricas para su estudio* (pp. 71-104). Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Cummins, J. (2002). *Lenguaje, poder y pedagogía: niños y niñas bilingües entre dos fuegos*. Ediciones Morata, S.L.

Creswell, J. W. (2014). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (4.ª ed.). SAGE Publications.

Douady, R. (1996). Rapports enseignement-apprentissage: Dialectique outil-objet, jeux de cadres. En R.

Douady (Ed.), *Ingénierie didactique et évolution des rapports au savoir mathématique* (pp. 23-54). La Pensée Sauvage.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 103–131.

Faerch, C y Kasper, G. (1986). Procedural Knowledge as a Component of Foreign Language Learners' Communicative Competence. *AILA Review*

Goñi Zabala, J. M.a. (2008). *3-2 Ideas Clave. El desarrollo de la competencia matemática*. EDITORIAL GRAO.

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, Á., Estepa, A., Lacasta, E., & Wilhelmi, M. R. (2013, febrero). *La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño* [Ponencia en CERME 8, Grupo de Trabajo 16]. In B. Ubuz, Ç. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2810–2819). Middle East Technical University & ERME. Disponible en http://www.ugr.es/~jgodino/eos/Godino_CERME_2013.pdf

Godino, J. D., & Batanero, C. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros* [Manual del Proyecto Edumat-Maestros]. Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

Ivars, P., & Fernández, C. (2016). *Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años*. *Educación matemática*, 28(1), 9-38.

<https://doi.org/10.24844/em2801.01>

Jitendra, A. K., Star, J. R., & Starosta, K. (2009). Improving seventh grade students' learning of ratio and proportion: The role of schema-based instruction. *Contemporary Educational Psychology*, 34(3), 250–264. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2009.06.001>

Jitendra, A. et al. (2007). Mathematical word problem solving in third-grade classrooms. *The Journal of Educational Research*, 100(5), 283–302.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas* (Guía No. 22). Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional. ISBN 958-691-290-6. (pag. 46 -94)

Ministerio de Educación Nacional. (2017). *Mallas de aprendizaje: Matemáticas, grado 4*. República de Colombia.

Moschkovich, J.N. (2020). Bilingual/Multilingual Issues in Learning Mathematics. In: Lerman, S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_16

Newman, M. A. (1983). *Strategies for diagnosis and remediation*. Harcourt Brace Jovanovich.

Newman, A. (1977). *An analysis of sixth-grade pupils' errors on written mathematical tasks*. Victorian Institute for Educational Research.

Patton, M. Q. (2015). *Qualitative research & evaluation methods: Integrating theory and practice* (4.^a ed.). SAGE Publications.

Prakitipong, N. & Nakamura, S. (2006). *Analysis of Mathematics Performance of Grade Five Students in Thailand Using Newman Procedure*. Retrieved August 14th, 2008 from home.hiroshima-u.ac.jp/cice/9-1prakitipongnakamura.pdf

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. SAGE Publications.

Truscott de Mejía, A.-M. (2012). *Exploraciones sobre el aprendizaje de lenguas y contenidos en programas bilingües: una indagación en la escuela primaria*. Universidad de los Andes, Centro de Investigación y Formación en Educación (CIFE).

Vargas-Zambrano, L. C. (2023). Un planteamiento de investigación sobre la historia de la enseñanza de las matemáticas en segunda lengua en Colombia. Y. Morales-López & M. Picado Alfaro (Eds.), *Memorias del VII Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática*, 116–125. <https://www.researchgate.net/publication/380827625> Un planteamiento de investigación sobre la historia de la enseñanza de las matemáticas en segunda lengua en Colombia