

**DISEÑO Y VALIDACIÓN DE UN JUEGO DE MESA FUNDAMENTADO EN EL MODELO 3UV PARA
LA APROXIMACIÓN A LOS USOS DE LA VARIABLE**

Cristian David Meneses Insuasty



Licenciatura en matemáticas

Facultad de Ciencias de la Educación

Universidad la Gran Colombia

Bogotá

2026

**DISEÑO Y VALIDACIÓN DE UN JUEGO DE MESA FUNDAMENTADO EN EL MODELO 3UV PARA LA
APROXIMACIÓN A LOS USOS DE LA VARIABLE**

Cristian David Meneses Insuasty

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de licenciado en matemáticas

Directora: Luz Elena Tinoco Robledo



Licenciatura en matemáticas

Facultad de Ciencias de la Educación

Universidad la Gran Colombia

Bogotá

2026

Dedicatoria

A mi familia, cercana como lejana, por su apoyo y acompañamiento recurrente durante mi proceso educativo. Su presencia constante y su respaldo fueron de gran importancia para llegar hasta este punto. Este logro ha sido posible gracias a ellos.

Agradecimientos

A las personas que conocí durante mi intercambio académico en Brasil, por compartir sus conocimientos, experiencias y consejos en torno al diseño e invitarme a explorar las experiencias que ellos crearon. Sus aportes me motivaron a continuar con el desarrollo de este recurso.

A los docentes que hicieron parte de mi formación, desde el colegio hasta la universidad, por apoyarme, por transmitirme sus conocimientos e incentivar me a seguir por el camino de la educación matemática.

A mi directora de trabajo de grado, Luz Elena Tinoco, por su ayuda y dedicación durante el desarrollo de esta investigación. Su apoyo fue fundamental para la realización de este proyecto.

Tabla de contenido

Resumen	7
Abstract	7
1. Introducción	8
2. Planteamiento del problema	10
3.1. Objetivo general	14
3.2. Objetivos específicos	14
3.3. Línea del programa:	15
4. Justificación	15
5. Antecedentes	20
6. Marco teórico	24
Álgebra:	24
Álgebra escolar	25
Álgebra inicial y la transición entre aritmética y álgebra	26
Dificultades en el aprendizaje del álgebra	28
Variable:	30
Modelo 3UV de Ursini y Trigueros	31
Representaciones semióticas	33
Juegos de mesa como recurso didáctico:	34
7. Metodología	35
7.1 Enfoque y tipo de investigación	35
7.2. Diseño metodológico	36
7.3. Fases de la propuesta	37

7.3.1 Fase 1: Preparación del experimento	37
7.3.2 Fase 2. Experimento de diseño	38
7.3.3 Fase 3. Análisis retrospectivo	38
7.4 Relación entre fases, objetivos específicos y actividades	40
7.5 Cronograma de actividades	43
Análisis de resultados.	43
Fase de preparación del experimento	43
Parte 1: Análisis de dificultades, antecedentes y diagnóstico	43
Parte 2: Diseño del juego	45
Fase de experimento del diseño	48
Ciclo 1: Estudiantes de licenciatura en matemáticas	48
Ciclo 2: Juicio de expertos	53
Ciclo 3: Experimentación en grado cuarto y séptimo	57
Conclusiones	67
Bibliografía	71
Anexos	76

Lista de figuras

Figura 1.	Prototipo del juego de mesa.....	48
Figura 2.	Implementación con estudiantes de licenciatura en matemáticas.....	51
Figura 3.	Estudiante menciona las fortalezas del juego.....	53
Figura 4.	Estudiante menciona las dificultades del juego.....	53
Figura 5.	Sugerencias del estudiante hacia el recurso.....	53
Figura 6.	Implementación con grado cuarto.....	59
Figura 7.	Implementación con grado séptimo.....	64

Lista de tablas

Tabla 1. Variable como incógnita (I).....	32
Tabla 2. Variable como número general (G).....	33
Tabla 3. Variable como parámetro o en relación funcional (F).....	33
Tabla 4. Relación entre fases, objetivos específicos y actividades.....	41

Resumen

La presente investigación tuvo como propósito adaptar y validar un juego de descarte, fundamentado en el modelo 3UV de Ursini y Trigueros, para favorecer el abordaje de los distintos usos de la variable en estudiantes que se encuentran en proceso de transición al pensamiento algebraico. El estudio se desarrolló con un enfoque cualitativo, mediante la metodología de investigación basada en Diseño (IBD), que orientó el diseño, la validación y el refinamiento progresivo del recurso didáctico. Para ello, se realizó una revisión teórica sobre la noción de la variable y el modelo 3UV, se diseñó y adaptó el juego, se validó mediante juicio de expertos y, posteriormente, se implementó con estudiantes de educación básica.

Los resultados permitieron realizar ajustes que fortalecieron la pertinencia conceptual, didáctica y funcional del juego, además de obtener evidencias sobre su potencial como recurso para favorecer el reconocimiento de los diferentes usos de la variable en situaciones de juego. En este sentido, la investigación aporta una propuesta didáctica, fundamentada en el modelo 3UV, que puede contribuir a la enseñanza de la variable en el álgebra escolar.

Palabras clave: Variable, didáctica de las matemáticas, modelo 3UV, juego de mesa, IBD, pensamiento algebraico.

Abstract

This study aimed to adapt and validate a discard card game based on Ursini and Trigueros' 3UV model to support students in developing an understanding of the different uses of variables during

their transition to algebraic thinking. The research adopted a qualitative approach within the Design-Based Research (IBD) methodology, which guided the design, validation, and progressive refinement of the educational resource. To this end, a theoretical review of the concept of variable and the 3UV model was conducted, the game was designed and adapted, validated through expert judgment, and subsequently implemented with elementary school students.

The results led to a series of refinements that strengthened the game's conceptual, didactic, and functional relevance, while also providing evidence of its potential as a teaching resource to promote students' understanding of the different uses of variables in game-based learning situations. Overall, this study offers a didactic resource grounded in the 3UV model that may contribute to the teaching and learning of variables in school algebra.

Key words: variable, didactics, 3UV model, board game, Design-Based Research, algebraic thinking.

1. Introducción

La transición de la aritmética al álgebra constituye uno de los momentos más importantes en el aprendizaje de las matemáticas, ya que durante este proceso los estudiantes comienzan a construir nuevas formas de razonamiento que les permiten reconocer regularidades, establecer relaciones, formular generalizaciones e interpretar el significado de las expresiones algebraicas (Kieran, 1989; Godino et al., 2012). En este proceso, la variable ocupa un lugar fundamental, aunque con frecuencia se introduce como una letra que representa un número desconocido; su significado depende del contexto matemático en el que se utilice. Desde el modelo 3UV propuesto por Ursini y Trigueros (2006), la variable puede asumir tres usos principales: como incógnita específica, como número general y como variable en relación funcional. Comprender estos usos permite interpretar con mayor profundidad las expresiones algebraicas y desarrollar formas de razonamiento propias del

pensamiento algebraico.

A pesar de los avances en la investigación sobre la enseñanza del álgebra, diferentes estudios coinciden en que la comprensión de la variable constituye una dificultad para muchos estudiantes. Entre los aspectos más reportados se encuentran la tendencia a interpretar las letras únicamente como incógnitas, el predominio del razonamiento aritmético en situaciones algebraicas y las dificultades para generalizar patrones o interpretar relaciones funcionales. Incluso estas dificultades pueden persistir más allá de la educación básica y presentarse en estudiantes universitarios (Herrera et al., 2016; Ursini y Trigueros, 2006; Valencia, 2015).

En este sentido, las dificultades asociadas al aprendizaje de la variable no se deben únicamente a las características de los estudiantes, sino también a la forma en que tradicionalmente se ha enseñado el álgebra. Diversos autores señalan que el énfasis en la aplicación de procedimientos y en la manipulación de símbolos ha limitado la construcción de significados en torno a los objetos algebraicos (Rojas y Vergel, 2018; Kaput, 2000b). Frente a esta situación, diferentes investigaciones resaltan la necesidad de implementar metodologías activas que sitúen al estudiante en un rol más participativo y favorezcan aprendizajes significativos.

Dentro de estas metodologías, los juegos de mesa han despertado un interés creciente como recurso didáctico en la enseñanza de las matemáticas. Su incorporación al aula favorece la participación de los estudiantes, promueve la interacción entre pares y genera espacios en los que es posible discutir estrategias, argumentar respuestas y construir conocimiento de manera conjunta. Aunque diferentes investigaciones han evidenciado resultados favorables en el aprendizaje matemático mediante el uso de juegos y han contribuido al desarrollo de competencias propias del pensamiento algebraico (Álvarez, 2017; Espinoza, 2021; Fraga-Varela et al., 2021).

A partir de lo anterior, esta investigación tiene como propósito diseñar y validar un juego de mesa fundamentado en el modelo 3UV que favorezca la aproximación a los diferentes usos de la variable en estudiantes que transitan de la aritmética al álgebra escolar. Para ello, se adopta la Investigación Basada en Diseño (IBD), una metodología que permite diseñar, implementar, analizar y refinar progresivamente el recurso didáctico a través de diferentes ciclos de implementación. Este proceso comprende el diseño del juego, su validación con expertos, la implementación con estudiantes y el análisis de los resultados obtenidos, con el fin de realizar los ajustes necesarios y valorar su potencial como recurso para la enseñanza de la variable.

Finalmente, este documento presenta el desarrollo de la investigación, desde el planteamiento del problema y los referentes teóricos que la sustentan, hasta la descripción del proceso metodológico, el diseño y la validación del juego, el análisis de los resultados obtenidos y las conclusiones derivadas del estudio.

2. Planteamiento del problema

En las instituciones educativas, tanto de nivel básico como de nivel superior, es común observar que, cuando los estudiantes se aproximan a conceptos matemáticos o de otras áreas del conocimiento de manera poco significativa, se generan escenarios o se producen aprendizajes centrados únicamente en la aplicación de procedimientos. Como señalan Zapata et al. (2010, p. 16), si durante el aprendizaje inicial de un concepto el estudiante no tiene la oportunidad de realizar un proceso de abstracción o conceptualización propio, es posible que la información no se asimile a su estructura cognitiva, lo que dificulta su posterior recuperación.

Esta situación se evidencia en las dificultades reportadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra, especialmente al inicio de su estudio formal. Socas (1997) reúne estas dificultades en ocho principios generales relacionados con la comprensión de la aritmética por parte de los

estudiantes, la naturaleza y el significado de los símbolos y las letras, el propósito de la actividad algebraica, la naturaleza de las respuestas y el uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento (p.21). Desde esta perspectiva, las dificultades no se limitan a la manipulación de expresiones, sino también a la comprensión de los significados que representan los símbolos y las letras. En esta misma línea, Rojas y Vergel (2018, p.22) señalan que los estudiantes pueden realizar procedimientos algebraicos sin comprender plenamente los sentidos asociados a las expresiones.

Estas dificultades no se deben exclusivamente a aspectos cognitivos de los estudiantes, sino que también pueden estar vinculadas a factores curriculares y didácticos. En algunas prácticas escolares se privilegia el trabajo con símbolos, reglas y procedimientos, mientras que procesos como la generalización, la comprensión de lo desconocido y la construcción de significado no siempre se tematizan lo suficiente. Al respecto, Rojas y Vergel (2018) sostienen que dichas dificultades “podrían estar más relacionadas con la escasa tematización que se hace desde el contexto escolar en relación con la generalización y con lo no determinado o lo desconocido” (p. 22).

La problemática adquiere una importancia particular al abordar el concepto de variable, debido a los distintos significados que puede asumir. Según Herrera López et al. (2016), el aprendizaje del álgebra escolar continúa siendo un problema no resuelto, pues estudiantes de distintos niveles educativos presentan dificultades para comprender los diversos aspectos y usos de las variables. Desde el modelo 3UV de Ursini y Trigueros (2006), se reconocen tres usos fundamentales: la variable como incógnita específica, como número general y como variable en relación funcional (p.7).

En definitiva, lo anterior permite comprender que el concepto de variable depende del contexto matemático en el que se utilice. No basta con manipular símbolos o aplicar procedimientos algebraicos; es necesario interpretar lo desconocido, identificar regularidades, simbolizar relaciones y reconocer la variación entre magnitudes, como sostienen Ursini et al. (2006). Lo cual implica que la comprensión de la variable no se logra de inmediato, sino que se construye de forma progresiva mediante distintas experiencias y niveles de razonamiento algebraico.

Esta construcción gradual puede entenderse a partir de los niveles de algebrización planteados por Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012, p. 507). Estos niveles van desde situaciones en las que todavía no se evidencia un razonamiento propiamente algebraico hasta formas más avanzadas donde los estudiantes generalizan, formalizan y operan con expresiones. Algunos autores, como Molina (2006), Socas (1997) y Kaput (2000b), se centran en las primeras aproximaciones al pensamiento algebraico y en la estrecha relación entre ambos campos. Desde este enfoque, la generalización, la identificación de regularidades, la expresión de relaciones y el empleo de diferentes representaciones pueden abordarse tanto antes como durante la presentación formal del simbolismo algebraico.

Investigaciones como la de Valencia (2015, pp. 29, 31 y 34) muestran que un número importante de estudiantes no logra comprender el significado de la variable en distintos contextos ni sus diversos usos. También se observa una tendencia a realizar procedimientos mecánicos con símbolos algebraicos, lo que evidencia una comprensión superficial del lenguaje algebraico y de las relaciones que este conlleva. Esto coincide con las críticas a una enseñanza del álgebra centrada principalmente en la memorización de procedimientos y en la manipulación simbólica.

Con el propósito de reconocer cómo se manifiesta esta problemática en el contexto particular de la investigación, se aplicó una prueba diagnóstica a estudiantes de grado noveno del Colegio Lausana, adaptada del trabajo de Gómez (2015) siguiendo los fundamentos del modelo 3UV propuesto por Ursini et al. (2005). El instrumento incluyó tareas relacionadas con la traducción del lenguaje natural al algebraico, la interpretación de letras en ecuaciones y expresiones algebraicas, el reconocimiento de cantidades desconocidas, la generalización de patrones y el análisis de relaciones funcionales. Asimismo, se emplearon registros verbales, numéricos, figurales, tabulares y simbólicos, con el fin de indagar no solo en la ejecución de procedimientos, sino también en la capacidad de establecer relaciones entre distintas formas de representación.

Las tareas de la prueba se relacionaron con los tres usos de la variable planteados por el modelo 3UV de Ursini. Algunos de los resultados mostraron dificultades para traducir situaciones verbales a

expresiones algebraicas y un predominio de procedimientos aritméticos sobre el razonamiento algebraico. También se observó que los estudiantes logran reconocer algunas regularidades, pero presentan limitaciones para formular una generalización con la figura “n”. En las relaciones funcionales, los estudiantes reconocen que una variable cambia cuando la otra cambia; sin embargo, no precisan dicha variación ni la correspondencia entre ambas. En algunas tareas, se observó la tendencia a reducir la letra como incógnita, mientras que, en otras, no logra asignar una letra para representar una medida variable, y a partir de ella construir una expresión general.

Estos resultados permiten reconocer que las dificultades aparecen también en las interpretaciones, las representaciones y los procedimientos empleados por los estudiantes. Así, aunque los estudiantes ya han tenido contacto con contenidos algebraicos, persisten dificultades para interpretar, diferenciar y emplear los distintos usos de la variable.

Frente a este panorama, sería importante explorar estrategias didácticas que favorezcan la participación de los estudiantes y la construcción de significado en torno a las nociones algebraicas. Por ejemplo, los juegos de mesa ofrecen posibilidades para promover el razonamiento, la toma de decisiones, la autonomía y la interacción entre los participantes (Espinoza, 2021, pp. 44-45, 108-109). Además, al incorporar reglas y situaciones de juego, favorecen procesos de argumentación, validación de procedimientos y discusión de estrategias (Bishop, 1998; Fraga-Varela et al., 2021; Maimó et al., 2021), generando ambientes de aprendizaje dinámicos que dan pie a la exploración de relaciones, la comparación de expresiones y la justificación de sus decisiones.

Algunas investigaciones han señalado aportes favorables de los juegos de mesa al aprendizaje matemático, en relación con la participación, el desarrollo de habilidades lógico-matemáticas y la comprensión de algunos contenidos algebraicos (Álvarez, 2017; Espinoza, 2021; Fraga Varela, Vila Couñago y Martínez Piñeiro, 2021; Monsalve, 2025). Sin embargo, en la revisión no se identificaron propuestas lúdicas orientadas específicamente a la iniciación al álgebra que articulen los tres usos de la variable planteados por el modelo 3UV.

Esta situación representa una oportunidad tanto para la investigación como para el desarrollo de propuestas didácticas. Por ello, se propone adaptar y validar un juego de descarte que permita abordar la variable como incógnita específica, como número general y como variable en relación funcional. El propósito no es únicamente que los estudiantes realicen operaciones algebraicas, sino que también puedan reconocer, comparar e interpretar los distintos sentidos de la variable en situaciones de juego.

A partir de lo anterior, se formula la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo adaptar y validar un juego de descarte, fundamentado en el modelo 3UV, que favorezca el abordaje de los diferentes usos de la variable en estudiantes que se encuentran en procesos de iniciación del pensamiento algebraico?

3. Objetivos

3.1. Objetivo general

Adaptar y validar un juego de descarte fundamentado en el modelo 3UV, como recurso didáctico para favorecer la aproximación a los usos de la variable como incógnita, número general y relación funcional.

3.2. Objetivos específicos

- Analizar los fundamentos conceptuales, epistemológicos y didácticos propios de la noción de variable y de sus usos.
- Diseñar un prototipo de juego de descarte fundamentado en el modelo 3UV, orientado al abordaje de los tres usos de la variable: incógnita específica, número general y variable en relación funcional.
- Adaptar y refinar un juego de descarte fundamentado en el modelo 3UV, a través de ciclos de diseño e implementación.

- Validar la pertinencia conceptual, didáctica y funcional del juego mediante el juicio de expertos e implementación con estudiantes de educación básica.
- Analizar las fortalezas, dificultades y posibilidades de mejora del juego a partir de las evidencias obtenidas durante las fases de diseño, validación e implementación.

3.3. Línea de investigación del programa:

Línea 2: Mediaciones para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

Cuenca de conocimiento III: La enseñanza de las matemáticas como mediación entre realidades socioeducativas y la formulación de estrategias pedagógicas orientadas a la promoción de la equidad y la inclusión.

4. Justificación

Este proyecto se orienta al diseño de un recurso didáctico dirigido a estudiantes de educación básica, particularmente en la fase de transición de la aritmética al álgebra. En esta etapa el concepto de variable representa un obstáculo epistemológico importante, ya que el aprendizaje del álgebra implica un cambio desde el pensamiento numérico hacia formas de razonamiento más abstractas (Álvarez, 2017; Serres, 2011; Kieran, 1989). Algunos estudios muestran que esta dificultad no se limita a los primeros años de escolaridad. Por el contrario, la comprensión de la variable y sus usos continúa presentando dificultades incluso en el ámbito universitario donde estudiantes emplean el razonamiento aritmético por encima del algebraico (Herrera et al., 2016; Ursini y Trigueros, 2006). En este sentido, esta propuesta busca contribuir a superar las dificultades asociadas a una enseñanza del álgebra concebida como un contenido tardío y desvinculado de las experiencias previas. Kaput (2000b, p. 2) advierte que este enfoque puede convertir al álgebra en un factor de exclusión educativa, al limitar el acceso de los estudiantes a oportunidades académicas y profesionales. En consecuencia, si el estudiante no logra comprender el significado de las expresiones algebraicas y de los símbolos que las componen, es probable que presente dificultades conceptuales para desarrollar

el razonamiento algebraico y avanzar a niveles más complejos de algebrización (Godino et al., 2012, pp. 495-496). Asimismo, las dificultades asociadas a la comprensión de la variable no pueden atribuirse únicamente a factores individuales del estudiante. Diversos autores señalan que estas problemáticas también se relacionan con aspectos curriculares y didácticos, especialmente cuando la enseñanza privilegia la aplicación de reglas y procedimientos por encima de la construcción de significados, la generalización y la interpretación de relaciones matemáticas (Rojas y Vergel, 2018, pp. 20, 22-23). Investigaciones como las de Ursini y Trigueros (2006) y Herrera et al. (2016) muestran que esta problemática se relaciona con la dificultad de los estudiantes para darle significado a la variable, lo que los lleva, en muchos casos, a un uso mecánico de la misma. Estas dificultades conceptuales pueden incidir en la dimensión afectiva, generando frustración, inseguridad y baja confianza académica en el aprendizaje del álgebra (Álvarez, 2017, p. 33).

Estas problemáticas también se reflejan en los resultados de pruebas estandarizadas como PISA. En el año 2022, el 71 % de los estudiantes colombianos se ubicó por debajo del nivel 2 en matemáticas, lo que indica que presentan dificultades para interpretar y utilizar conceptos matemáticos en diferentes contextos (ICFES, 2024). En relación con ello, Valencia (2015, pp. 89-91) señala que las limitaciones en la comprensión de la variable y de sus diversos usos no son transitorias. De manera similar, el estudio de Ursini y Trigueros (2006, pp. 173-175) muestra que estas dificultades persisten incluso en estudiantes universitarios de ingeniería, quienes, a pesar de cursar asignaturas de matemáticas avanzadas, presentan dificultades para emplear la variable como incógnita, como número general y como variable en una relación funcional.

De manera complementaria, los resultados de la prueba diagnóstica aplicada a estudiantes del colegio Lausana permitieron identificar dificultades que coinciden con las reportadas en la literatura, entre las que se evidenciaron dificultades en la generalización de patrones, la interpretación de relaciones funcionales y la traducción entre el lenguaje verbal y el algebraico. Asimismo, se observó que los estudiantes tienden a recurrir a procedimientos aritméticos al enfrentar a situaciones que

requieren razonamiento algebraico, lo que refleja una comprensión limitada del concepto de variable. Asimismo, se observaron confusiones respecto al significado de las letras en contextos matemáticos y un elevado número de omisiones en las tareas de mayor complejidad; esto se puede deber a que existe inseguridad o bloqueo frente al álgebra. Este comportamiento puede estar relacionado con las dificultades para atribuir significado a las expresiones algebraicas descritas por Ursini y Trigueros (2006), así como con las dificultades en la comprensión de los problemas matemáticos señalados por Álvarez (2017). Asimismo, esta situación se puede analizar desde la perspectiva de los obstáculos epistemológicos definidos por Bachelard (2000) y desde el trabajo en educación matemática de Brousseau (1983), ya que según Bachelard (2000) para que un estudiante aprenda un concepto nuevo debe ir en contra o enfrentarse a un conocimiento anterior. Esto quiere decir que, el estudiante debe abandonar su conocimiento general de la aritmética para pasar a un sistema de símbolos abstractos perteneciente al álgebra. Por otro lado, la resistencia a adquirir conocimiento nuevos se relaciona con lo abordado en Brousseau (1983), ya que están directamente conectados al desarrollo y madurez del estudiante, quien debe realizar procesos de abstracción a los cuales aún se está adaptando. Además, estos bloqueos se ven reforzados por decisiones curriculares o por estrategias de enseñanza que han fomentado una transición entre la aritmética y el álgebra de manera brusca o meramente procedimental. Estas evidencias permiten inferir que los estudiantes presentan dificultades para comprender y utilizar la variable en sus diferentes usos, situación que refuerza la necesidad de diseñar estrategias didácticas que favorezcan la construcción de significados algebraicos.

Para dar respuesta a estas problemáticas, algunas investigaciones indican la importancia de las metodologías activas promoviendo una participación significativa de los estudiantes, en las que se comporte como foco central. En este sentido, Espinoza (2021, p. 29), señala que las prácticas rutinarias en la enseñanza de las matemáticas pueden reducir la motivación, ya que limitan las oportunidades de observación y de experimentación en actividades de aprendizaje significativo. En ocasiones, la enseñanza tradicional del álgebra fomenta percepciones negativas hacia las

matemáticas, al presentar los conceptos mediante procedimientos mecánicos y símbolos desprovistos de significado (Kaput, 2000b, p. 2).

Así, el uso de juegos de mesa se plantea como una estrategia didáctica para impartir sesiones de clase más lúdicas con el objetivo de afianzar el concepto de variable y promover la construcción de nuevos significados asociados a la misma. La efectividad de este recurso está respaldada por la literatura, que reporta mejoras significativas en la fluidez operativa y en la corrección de errores matemáticos. En concordancia con lo mencionado anteriormente, Fraga-Varela et al. (2021, pp. 10-12), en una investigación realizada con estudiantes de primaria, evidenciaron que la implementación de juegos serios y de estrategias de gamificación favoreció significativamente el desarrollo de la fluidez matemática.

Estos resultados presentan el uso de estrategias lúdicas como una alternativa didáctica para reforzar el aprendizaje de las matemáticas, lo cual da sustento al juego de mesa. Esta idea está sustentada por Monsalve (2025, pp. 24 y 49), quien afirma que los juegos de mesa facilitan la motivación, la participación y la transición del pensamiento aritmético al algebraico, al favorecer la comunicación matemática y el uso de distintas formas de representación. Sin embargo, no se debe entender esta transición como la introducción de letras y expresiones simbólicas, sino como un proceso gradual de álgebrización en el que los estudiantes construyen formas de razonamiento matemático cada vez más sofisticadas (Godino et al., 2012). Esto resulta relevante en las etapas iniciales del álgebra, pues permite que los estudiantes exploren relaciones, formulen conjeturas y justifiquen sus afirmaciones, lo cual constituye una actividad distinta de la mera ejecución mecánica de algoritmos (Kieran, 1989). Por ello, el juego se plantea como una estrategia que promueve la motivación de los estudiantes, permitiéndoles superar algunas de las dificultades que interfieren en su aprendizaje (Álvarez, 2017). Por otra parte, el uso de juegos favorece el desarrollo de habilidades como la comunicación, la argumentación y el trabajo colaborativo. Estas habilidades caracterizan la actividad matemática como una práctica social y cultural; de hecho Bishop (1998) define el juego como una de las seis actividades matemáticas universales. Al mismo tiempo, fortalecen los procesos cognitivos implicados

en el aprendizaje de las matemáticas y contribuyen a que el estudiante asuma un papel activo en su proceso de aprendizaje (Espinoza, 2021; Monsalve, 2025).

A partir de lo anterior, la estrategia se fundamenta en el modelo 3UV propuesto por Ursini y Trigueros (2006), el cual permite abordar el carácter multifacético de la variable y las capacidades que deben tener los estudiantes para comprender el significado de la variable, a partir de tres usos principales: como incógnita específica, número general y variable en relación funcional. Este modelo resulta pertinente porque no reduce la variable a una letra que debe despejarse, sino que permite analizar los diferentes significados que adquiere en distintos contextos matemáticos. De acuerdo con Herrera et al. (2016), la comprensión de los conceptos algebraicos implica interpretar y relacionar diversas formas de representación, por lo que es necesario construir experiencias que ayuden a los estudiantes a transitar entre el lenguaje natural, los procesos aritméticos y el razonamiento algebraico.

Así, el juego de mesa se considera un recurso didáctico que promueve la participación activa, la toma de decisiones, la argumentación y la construcción de significados matemáticos. Según la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, presentada por da Silva (2020), el aprendizaje dependerá de la relación que el estudiante establezca entre los nuevos contenidos y su estructura cognitiva previa. Por eso, una estrategia basada en el juego puede permitir que los estudiantes aborden la variable desde situaciones más dinámicas, en las que no solo manipulen símbolos, sino que también interpreten relaciones, comparen representaciones y justifiquen sus decisiones.

Desde el punto de vista epistemológico, la variable es reconocida como un concepto básico para el desarrollo del pensamiento algebraico (Ursini y Trigueros, 2006; Kieran, 1989), ya que permite representar valores desconocidos, expresar generalizaciones y establecer relaciones. Desde una perspectiva ontológica, el conocimiento matemático no se entiende como la memorización de procedimientos, sino como la construcción de significados que aparecen con las representaciones, situaciones problemas y formas de comunicación (Godino et al., 2012).

Con lo desarrollado hasta aquí, se evidencian beneficios en el uso de juegos de mesa en la enseñanza de las matemáticas (Álvarez, 2017; Espinoza, 2021; Monsalve, 2025), pero se identifica una oportunidad de desarrollo didáctico para el diseño de recursos fundamentados en el modelo 3UV. Esta oportunidad justifica la adaptación de un juego de descarte que articule la dimensión lúdica con el objeto matemático orientada al reconocimiento y a los usos de la variable.

Así, la adaptación de un juego de mesa a partir del modelo 3UV busca incorporar elementos lúdicos en el aula, y abordar las dificultades identificadas en la comprensión de la variable y de sus usos, buscando la participación activa del estudiante y la construcción de aprendizajes significativos desde una perspectiva pedagógica.

Finalmente, la validación e implementación del recurso permitirá realizar ajustes que fortalezcan su pertinencia. De este modo, la investigación busca aportar al diseño de recursos didácticos teóricamente fundamentados para la enseñanza de la variable, brindando una alternativa que articule los principios del modelo 3UV y el fortalecimiento del pensamiento algebraico.

5. Antecedentes

Ursini y Trigueros (2006) analizaron si la comprensión de la variable mejora a medida que los estudiantes avanzan en su formación matemática. El estudio se realizó con 40 estudiantes mexicanos: 13 de tercer grado de secundaria, 17 de reciente ingreso a la universidad y 10 de quinto semestre de Economía e Ingeniería. La metodología se basó en la aplicación de cuestionarios diseñados a partir del modelo 3UV y en entrevistas para profundizar en las respuestas. Los resultados muestran avances en los estudiantes universitarios, pues logran resolver con mayor éxito ciertas tareas algebraicas. Aun así, persisten dificultades para reconocer y utilizar la variable en diferentes contextos, especialmente cuando esta representa una relación funcional.

En la misma línea, Herrera et al. (2016) analizaron la comprensión del concepto de variable en 48 estudiantes de bachillerato de una institución privada del estado de Veracruz, México, pertenecientes a segundo, cuarto y sexto semestre (equivalentes a la educación media en el sistema educativo colombiano). La investigación, de carácter descriptivo, se desarrolló mediante la aplicación de un cuestionario compuesto por tres problemas y de entrevistas individuales orientadas a profundizar en las formas de resolución de los estudiantes. Los autores encontraron que las dificultades en la comprensión y uso de la variable persisten a lo largo del bachillerato, especialmente en la conversión del lenguaje natural o figural al lenguaje aritmético y algebraico, lo cual deja en evidencia que el avance de escolaridad no garantiza una mejor comprensión de los usos de la variable.

Valencia (2015) evidenció dificultades significativas en la comprensión del concepto de variable en estudiantes de séptimo grado de la Institución Educativa Antonio Derka Santo Domingo, en Medellín. La investigación se desarrolló desde un enfoque cualitativo, mediante un estudio de casos y un análisis de experiencias, con una muestra de 35 estudiantes de entre 13 y 15 años. El estudio muestra que los estudiantes presentan dificultades para reconocer las diferentes interpretaciones de la variable, establecer conexiones entre distintas representaciones y comprender el significado de los símbolos algebraicos, dado que el grado séptimo constituye uno de los primeros momentos en los que los estudiantes abordan formalmente el álgebra escolar, lo que hace pertinente continuar investigando estrategias didácticas a este nivel educativo.

Desde una perspectiva teórica sobre la iniciación del aprendizaje del álgebra, Serres (2011) analiza qué se entiende por álgebra escolar y cómo se relacionan el lenguaje algebraico, el pensamiento algebraico y el concepto de variable. A diferencia de otros antecedentes, este trabajo no se centra en una población específica, sino que realiza una revisión conceptual sobre las implicaciones didácticas de iniciar a los estudiantes en el álgebra. La autora sostiene que el desarrollo del pensamiento algebraico se fundamenta en procesos de generalización y simbolización, por lo que plantea la

necesidad de diseñar actividades que promuevan estrategias de generalización, trabajen la variable en sus distintos usos y favorezcan la resolución de problemas como medio para otorgar significado al lenguaje algebraico. En esta línea, Serres (2011) plantea la necesidad de que los estudiantes tengan múltiples experiencias para interpretar las relaciones entre cantidades en diversos contextos antes de trabajar formalmente con variables y expresiones simbólicas. Este aporte respalda la pertinencia de diseñar recursos didácticos que promuevan el análisis y la comparación de situaciones.

Para profundizar en el aprendizaje del lenguaje algebraico, el trabajo de Distéfano et al. (2006) resulta especialmente relevante, ya que presenta una propuesta de intervención dirigida a estudiantes ingresantes del Profesorado y de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina, con el propósito de favorecer la comprensión del lenguaje simbólico matemático. En este caso, el estudio conformó un grupo experimental y un grupo control, cada uno con 25 estudiantes, a quienes se les aplicaron un pretest y un posttest. La investigación se desarrolló mediante tres encuentros de 90 minutos, orientados al trabajo con variables, cuantificadores y la traducción entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico. Los resultados mostraron un mejor desempeño del grupo experimental, lo que evidencia la importancia de experiencias didácticas bien dirigidas.

Además de las dificultades en el aprendizaje del álgebra, otras investigaciones han analizado la influencia de la motivación en los procesos de aprendizaje matemático. Carrillo et al. (2009) señalan que la motivación es un factor que orienta la conducta del estudiante y favorece su disposición al aprendizaje. Estos autores nos hablan de motivaciones externas e internas, destacando que la motivación intrínseca, al estar vinculada a intereses y metas propios del sujeto, tiende a ser más sostenible que la basada únicamente en estímulos externos. En la misma línea, Calle y otros (2020), a partir de un estudio descriptivo correlacional no experimental realizado con 216 estudiantes de octavo, noveno y décimo grado de básica superior, evidencian que la motivación incide favorablemente en los procesos de aprendizaje de las matemáticas, aunque este también depende de factores pedagógicos y didácticos. Estos aportes resultan relevantes para la presente

investigación, pues permiten reconocer que el diseño del juego debe generar condiciones de participación, interés y toma de decisiones que favorezcan la implicación de los estudiantes en las tareas algebraicas.

En relación con el uso del juego para la enseñanza del álgebra, Álvarez (2017) diseñó e implementó una estrategia didáctica orientada a la superación de errores y dificultades en la iniciación al álgebra con estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Técnica Bellas Artes de Sogamoso. La investigación se desarrolló desde un enfoque cualitativo, en el marco de la investigación-acción, con una población de 30 estudiantes de entre los 12 y los 15 años. Metodológicamente, el estudio incluyó una prueba diagnóstica, una encuesta de apreciación hacia el área de matemáticas, el diseño e implementación de tres juegos algebraicos (dominó, dados y tangram) y una prueba final para valorar los avances alcanzados. Los resultados mostraron mejoras en la participación, el trabajo cooperativo, la actitud frente al álgebra y la disminución de algunos errores asociados al manejo de expresiones algebraicas.

De manera similar, Monsalve (2025) diseñó e implementó adaptaciones de juegos de mesa para favorecer el aprendizaje del álgebra escolar en estudiantes de grado octavo. La investigación se desarrolló desde un enfoque cualitativo, mediante investigación de diseño, con 15 estudiantes de un colegio en Rionegro, Colombia. La propuesta incluyó tres juegos (Algebropoly, AlgeUno y AlgeTwister) orientados al reconocimiento de expresiones algebraicas, de términos semejantes y de operaciones con polinomios. Los resultados evidencian que las actividades mediadas por las adaptaciones favorecieron la motivación, la participación y, en particular, la transición del pensamiento aritmético al algebraico a nivel disciplinar. Este antecedente demuestra el potencial de los juegos de mesa para promover el aprendizaje del álgebra.

Al revisar estos antecedentes, se identifica un espacio de aporte para la presente investigación. Valencia (2015), en su trabajo, estudia la enseñanza del concepto de variable en estudiantes de séptimo grado y encuentra dificultades en su comprensión, pero cabe resaltar que su propuesta no

está orientada al diseño y validación de un juego de mesa. Álvarez (2017) y Monsalve (2025), por su parte, utilizan estrategias lúdicas y adaptaciones de juegos para promover el aprendizaje de álgebra en octavo grado; sin embargo, sus investigaciones no se enfocan específicamente en la comprensión de los usos de la variable en el modelo 3UV. En este sentido, la presente investigación pretende contribuir al diseño y la validación de un juego de descarte orientado a estudiantes que se encuentran en proceso de transición entre la aritmética y el álgebra, considerando el uso de la incógnita específica, el número general y la relación funcional.

Por otro parte, Espinoza (2021) estudió el aprendizaje basado en juegos de mesa para la enseñanza de la matemática en estudiantes de cuarto año de básica y encontró que este tipo de recursos propicia la motivación, el trabajo colaborativo, la resolución de problemas, el pensamiento analítico y la autonomía. Fraga-Varela et al. (2021) analizaron el impacto de los juegos serios en el desarrollo matemático de estudiantes de primaria, evidenciando mejoras significativas tras su implementación, sobre todo cuando las actividades incluyen estrategias de gamificación. Estos estudios amplían la comprensión del juego como recurso didáctico, mostrando que puede incidir en procesos matemáticos cuando se articula con una intención pedagógica.

Como conclusión, podemos reconocer que las dificultades asociadas al aprendizaje del álgebra, y en particular a la comprensión de la variable, siguen siendo una problemática relevante durante la transición aritmética-álgebra. Las investigaciones sobre estrategias lúdicas muestran que el juego puede ser una forma de promover la participación, el intercambio, la resolución de problemas y la construcción de significados matemáticos. Sin embargo, se identifica un espacio de aporte para la presente investigación, ya que los estudios centrados en la variable no incorporan necesariamente el juego de mesa como recurso didáctico, mientras que los juegos desarrollados para la enseñanza del álgebra no se enfocan específicamente en los usos de la variable desde el modelo 3UV. Así, este trabajo busca articular ambos campos mediante el diseño y la validación de un juego de descarte orientado a estudiantes en transición entre la aritmética y el álgebra, con énfasis en el modelo 3UV.

6. Marco teórico

Álgebra:

El álgebra es una de las ramas fundamentales de las matemáticas, centrada en el estudio de las estructuras, las relaciones y las operaciones mediante símbolos que permiten representar tanto cantidades conocidas como desconocidas (Stewart et al., 2008). A diferencia de la aritmética, centrada en el cálculo con valores específicos, el álgebra permite expresar regularidades, establecer relaciones generales y representar situaciones mediante un lenguaje simbólico. Mason (1996, citado en Álvarez, 2017) la define como el “lenguaje que expresa generalidad”.

Desde una perspectiva estructural, Stewart et al. (2008) sostienen que el álgebra trasciende el estudio de los números para centrarse en las propiedades y relaciones entre los objetos matemáticos representados simbólicamente. Esta idea se relaciona con lo propuesto por Sfard (1991), quien sostiene que los conceptos matemáticos poseen una doble naturaleza: pueden concebirse de manera operacional, como procesos o acciones, y de manera estructural, como objetos matemáticos. En el caso del álgebra, esto implica que una expresión puede ser interpretada inicialmente como un procedimiento para realizar cálculos, pero también puede llegar a concebirse como un objeto que se manipula, transforma y analiza. Sfard denomina reificación a este tránsito por el cual un proceso llega a ser comprendido como una entidad matemática.

Complementando lo dicho por Sfard, Kieran (1989) menciona que las variables pueden asumir diversos significados según el enfoque algebraico adoptado, por lo cual pueden representar generalizaciones, incógnitas o argumentos y parámetros en relaciones entre cantidades. Además, agrega que con el movimiento de la “new math”, las letras dejaron de verse solamente como incógnitas y adquirieron un carácter más abstracto, lo que permitió representar relaciones y generalidades más amplias.

Esta evolución ha llevado al reconocimiento del álgebra como un componente esencial para el desarrollo de las matemáticas y la modelización de fenómenos en diferentes disciplinas, al poner a disposición herramientas que facilitan la representación, el análisis y la generalización de las

relaciones entre cantidades y variables (Kaput, 2000a; Godino et al., 2012). En la educación, esta capacidad es especialmente importante, ya que el lenguaje algebraico permite formular conjeturas, justificar procedimientos y desarrollar cada vez más formas de razonamiento abstracto, y por tanto es fundamental para la construcción del pensamiento matemático (Kaput, 2000b; Godino et al., 2014).

Álgebra escolar

El álgebra escolar se define como el conjunto de conocimientos, procesos y formas de razonamiento que se promueven habitualmente a lo largo de la educación básica y media con la finalidad de favorecer el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes (Godino et al., 2014). Mientras que el álgebra como disciplina formal se ocupa de estructuras abstractas y demostraciones rigurosas, el álgebra escolar se propone que los estudiantes representen, generalicen y relacionen objetos matemáticos mediante el uso progresivo del lenguaje simbólico (Godino y Font, 2003). Desde este punto de vista, el aprendizaje del álgebra no debe reducirse a una aritmética generalizada que consiste en manipular mecánicamente letras que representan números no especificados. De hecho, el álgebra implica la construcción de formas de razonamiento que permitan identificar regularidades, establecer relaciones y utilizar representaciones simbólicas dotadas de un significado matemático claro (Godino et al., 2014; Ursini et al., 2005). Bajo esta idea, el lenguaje algebraico deja de ser un conjunto de reglas operativas y se convierte en una herramienta que permite interpretar, comunicar y justificar ideas matemáticas.

Por tal motivo, Kaput (2000a) entiende que la enseñanza del álgebra escolar debe ser un proceso continuo y transversal en todo el currículo de matemáticas y no una materia aislada introducida en el currículo mediante el uso de símbolos literales. Desde este punto de vista, se sugiere la introducción de la algebrización del currículo, es decir, la incorporación progresiva del razonamiento algebraico desde los primeros años de escolaridad a través de actividades de generalización, reconocimiento de patrones y argumentación matemática. De esta forma, el desarrollo del pensamiento algebraico

precede a la enseñanza formal de las ecuaciones y contribuye a una mejor comprensión de los conceptos matemáticos.

En la misma línea, Kieran (2022, citado por Monsalve, 2025) afirma que el pensamiento algebraico es multidimensional porque implica procesos de generalización, razonamiento sobre relaciones, uso de representaciones y construcción de significados, y que se extiende a otras áreas del conocimiento matemático.

Álgebra inicial y la transición entre aritmética y álgebra

El concepto de Álgebra Inicial surge como respuesta a la necesidad de replantear la enseñanza tradicional del álgebra, centrada en la manipulación de símbolos y en la aplicación de procedimientos formales. Desde este punto de vista, Rojas y Vergel (2015) plantean que el álgebra inicial debe entenderse como un proceso orientado al desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros años de escolarización. Por eso, la finalidad no es sólo enseñar ecuaciones o expresiones algebraicas, sino promover formas de razonamiento propias del álgebra para ir comprendiendo las relaciones matemáticas.

Este modo de concebir la situación se vuelve especialmente importante durante la transición entre la aritmética y el álgebra, una etapa que representa uno de los cambios conceptuales más importantes en el aprendizaje de la matemática (Kieran 1989; 1992). En este proceso los estudiantes dejan de centrar su atención exclusivamente en el cálculo de cantidades para empezar a identificar regularidades, expresar relaciones generales y atribuir significado a las representaciones simbólicas. Rojas et al. (1999) señalan que esta transición exige reconfigurar la comprensión de las operaciones aritméticas para trascender el cálculo numérico y avanzar hacia formas de razonamiento más abstractas.

En esta misma línea, Godino et al. (2012), retomando los planteamientos de Kieran (1989, 1992), señalan que uno de los principales obstáculos en la transición del pensamiento aritmético al

algebraico se origina en que los estudiantes deben interpretar y atribuir significado al uso de letras y símbolos matemáticos, lo que implica una transición hacia formas de razonamiento más abstractas y simbólicas. Los autores señalan que muchas de las dificultades observadas en el aprendizaje del álgebra se originan cuando los estudiantes interpretan las expresiones algebraicas únicamente como procedimientos de cálculo y no como representaciones de relaciones generales. Por ello, sostienen que la enseñanza debe favorecer experiencias que permitan construir progresivamente los significados asociados al lenguaje algebraico.

En este sentido, Kaput (2000a) plantea que el pensamiento algebraico se desarrolla progresivamente a través de diferentes formas de actividad matemática, entre las cuales destacan la generalización de la aritmética, el estudio de relaciones funcionales y la modelación de situaciones.

De acuerdo a lo descrito puede entenderse que el aprendizaje del álgebra es un proceso continuo que comienza antes de la enseñanza formal de ecuaciones y expresiones algebraicas. Godino et al. (2012) proponen una caracterización del razonamiento algebraico mediante niveles de algebrización que permiten identificar el grado de desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes. En el nivel 0 (ausencia de algebrización), predominan los procedimientos aritméticos centrados en números particulares y cálculos específicos. En el nivel 1 (algebrización incipiente) aparecen procesos de generalización y de reconocimiento de regularidades, expresados mediante el lenguaje natural o representaciones no simbólicas. En el nivel 2 (algebrización intermedia) se incorporan variables y expresiones para representar relaciones generales, y en el nivel 3 (algebrización consolidada) se realizan transformaciones y manipulaciones simbólicas de las expresiones de manera formal.

Dificultades en el aprendizaje del álgebra

La enseñanza y el aprendizaje del álgebra han sido objeto de numerosas investigaciones debido a las dificultades que los estudiantes presentan al abordar esta área. Diversos estudios coinciden en señalar que dichas dificultades no obedecen solo a la complejidad de los procedimientos algebraicos,

sino que están relacionadas con la transición desde formas de razonamiento predominantemente aritméticas hacia modos de pensamiento más generales y abstractos (Kieran, 1989; Godino et al., 2012). En consecuencia, el aprendizaje del álgebra exige que los estudiantes resignifiquen conceptos previamente adquiridos y comprendan nuevas formas de interpretar las relaciones matemáticas.

Desde este punto de vista, Socas (1997) señala que los problemas del aprendizaje de las matemáticas y muy especialmente del álgebra, no sólo deben entenderse como fallos en la aplicación de procedimientos. Estas dificultades pueden estar relacionadas con la naturaleza del lenguaje algebraico, con los procesos de pensamiento matemático, con el desarrollo cognitivo de los estudiantes, con la organización curricular, con los métodos de enseñanza y con las actitudes afectivas hacia las matemáticas. Los errores, en este sentido, no son simples equivocaciones o descuidos, sino expresiones de cómo los estudiantes interpretan los problemas, leen los símbolos y utilizan los procesos algebraicos.

Durante la transición entre la aritmética y el álgebra, los estudiantes deben reconfigurar su comprensión de las operaciones aritméticas para avanzar hacia formas de razonamiento vinculadas a la generalización, al establecimiento de relaciones y al uso de representaciones simbólicas. En este sentido, Rojas y Vergel (2018) sostienen que la enseñanza del álgebra debe favorecer la construcción de significados asociados a la generalización y al razonamiento algebraico, en lugar de centrarse exclusivamente en la aplicación mecánica de procedimientos. Sin embargo, cuando la enseñanza privilegia la manipulación simbólica sin atender al significado de las expresiones, dicha transición suele convertirse en uno de los principales obstáculos para el aprendizaje del álgebra.

Esta situación es descrita por Kieran (1989), quien menciona que los estudiantes continúan abordando las expresiones algebraicas desde una perspectiva aritmética, esperando siempre resultados numéricos inmediatos. Este razonamiento dificulta comprender que una expresión algebraica puede representar una relación general y constituirse en un objeto matemático susceptible de ser transformado, comparado y utilizado para modelar diferentes situaciones. Así

mismo, Godino et al. (2012) sostienen que el desarrollo de razonamiento algebraico debe estar más allá de la visión operacional mediante procesos de generalización, representación y argumentación.

Otro aspectos revisados se refieren a las dificultades asociadas al concepto de variable. Valencia (2015) señala que una de las principales limitaciones del aprendizaje del álgebra es que los estudiantes suelen siempre dar un mismo significado a las letras, asociándolas con incógnitas que deben ser reemplazadas por un valor numérico. Herrera et al. (2016) también evidencia que esta interpretación restringida dificulta la comprensión de otros usos de la variable.

Por lo descrito, los aportes de Ursini y Trigueros (2005, 2006) resultan centrales, pues permiten analizar la variable no como un símbolo con un único significado, sino como un concepto que varía según el contexto matemático en el que se utiliza. Esta mirada da lugar al modelo 3UV, que se constituye en un referente fundamental.

Variable:

Merino et al. (2022) señala que el término variable se utiliza en las matemáticas formales y escolares, aunque no siempre se presenta con definición precisa. Los autores mencionan que, aunque el término aparece con frecuencia en los libros de texto, y se asocia a expresiones algebraicas. En muchos casos, no tiene una definición explícita, lo que puede generar diferencias entre el significado promovido por los textos y la comprensión que desarrollan los estudiantes. Desde una perspectiva formal, Stewart (2012) define la variable, como una letra que puede representar cualquier número perteneciente a un conjunto determinado. Esta definición, puede ser insuficiente para explicar la diversidad de interpretaciones que este símbolo puede asumir en el álgebra escolar. Desde una perspectiva más amplia, Azcárate y Camacho (2003) plantean que es necesario diferenciar entre definiciones formales y las interpretaciones personales construidas por otros.

Así, la variable puede entenderse como un símbolo que representa un elemento cualquiera en un conjunto, aclarando que no necesariamente representa únicamente valores numéricos, sino también

funciones, conjuntos o cualquier otro objeto matemático, lo que evidencia lo general y diverso que resulta el concepto.

Castro y Castro (1997, citados en Herrera, 2016) señalan que la comprensión de la variable depende de las representaciones utilizadas. En consecuencia, comprender la variable no implica únicamente reconocer letras o símbolos algebraicos, sino también interpretar el sentido que estos adquieren en diferentes escenarios. Esta diversidad de interpretaciones explica por qué la variable constituye uno de los conceptos centrales del pensamiento algebraico y uno de los principales retos para los estudiantes durante el aprendizaje del álgebra (Herrera et al., 2016). En efecto, comprender el concepto de variable implica reconocer que un mismo símbolo puede adquirir distintos sentidos según la situación matemática en la que interviene. Asimismo, resulta importante abordar otros autores como Küchemann (1980), ya que a partir de su investigación él identificó que los estudiantes distinguen seis interpretaciones de la letra en el álgebra escolar (Letra evaluada, Letra no utilizada, Letra como objeto, Letra como incógnita específica, Letra como número generalizado, Letra como variable). Esta investigación deja en evidencia que los estudiantes en un inicio se quedan con una o dos interpretaciones (Como objeto o número fijo) antes de alcanzar a comprender completamente lo que es un variable y su carácter multifacético. Así, su aprendizaje trasciende la mera manipulación de letras y requiere construir significados asociados a los distintos usos.

Modelo 3UV de Ursini y Trigueros

Con el propósito de caracterizar esta diversidad de significados y ofrecer un marco de análisis para la enseñanza del álgebra escolar, Ursini y Trigueros (2005) desarrollan el modelo 3UV (Tres usos de la variable), una propuesta teórica que permite analizar la comprensión de este concepto desde una perspectiva didáctica. Este modelo parte de la idea de que una misma letra puede cumplir funciones diferentes según la situación en la que se utilice, por lo que distingue tres usos fundamentales. El primero corresponde a la variable como incógnita específica, en la que la letra representa un valor particular que puede determinarse. El segundo es la variable como número general, donde la letra

representa un número cualquiera de un conjunto y permite expresar regularidades, propiedades y generalizaciones matemáticas. Y, finalmente, la variable en relación funcional representa una cantidad cuyo valor varía en función de otra, lo que permite describir y analizar relaciones de dependencia entre magnitudes. A partir de esta clasificación, el modelo posibilita analizar la manera en que los estudiantes interpretan y emplean las letras al resolver diversas tareas algebraicas, así como las dificultades que pueden presentarse en cada uno de estos usos. A continuación, se presentan las capacidades asociadas a cada uno de estos usos:

- En relación con la variable como incógnita (I), Ursini et al. (2006) proponen las siguientes capacidades:

Tabla 1. Variable como incógnita (I). Adaptada de Ursini et al. (2006)

I1	Reconocer e identificar en una situación problema la presencia de algo desconocido, que debe ser determinado considerando las restricciones del problema.
I2	Interpretar los símbolos que aparecen en una ecuación como la representación de valores específicos.
I3	Sustituir la variable por el valor o los valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.
I4	Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas o aritméticas.
I5	Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.

- En relación con la variable como número general (G), Ursini et al. (2006) proponen las siguientes capacidades:

Tabla 2. Variable como número general (G). Adaptada de Ursini et al. (2006)

G1	Reconocer patrones, percibir reglas y métodos en secuencias y en familias de problemas
G2	Interpretar un símbolo como la representación de una entidad general indeterminada que puede asumir cualquier valor.

G3	Deducir reglas y métodos generales en secuencias y familias de problemas.
G4	Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.
G5	Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

- En relación con la variable como parámetro o relación funcional (F), Ursini et al. (2006) proponen las siguientes capacidades:

Tabla 3. Variable como parámetro o en relación funcional (F). Adaptada de Ursini et al. (2006)

F1	Reconocer la correspondencia entre las variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada.
F2	Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la variable independiente.
F3	Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la variable dependiente.
F4	Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional.
F5	Determinar el intervalo de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.
F6	Simbolizar la relación funcional, basada en el análisis de datos de un problema.

Representaciones semióticas

La construcción del conocimiento no depende únicamente de la comprensión de los conceptos, sino también de la capacidad para representarlos, interpretarlos y establecer relaciones entre diferentes formas de representación (Duval, 2006). En este sentido, Duval (2006) sostiene que los objetos matemáticos sólo son accesibles mediante representaciones semióticas, ya que no pueden percibirse directamente. Por ello, la actividad matemática requiere el uso de diversos registros de representación semiótica, entendidos como sistemas de signos que permiten representar un mismo objeto matemático mediante el lenguaje natural, las expresiones algebraicas, las tablas, las gráficas o las representaciones geométricas.

Según Duval (2006), comprender un objeto matemático implica reconocer que una misma idea puede representarse en distintos registros sin que cambie su significado matemático. Desde esta perspectiva, Duval distingue dos tipos fundamentales de transformaciones semióticas: el tratamiento y la conversión. El tratamiento corresponde a las transformaciones que se realizan dentro de un mismo registro de representación, como simplificar una expresión algebraica o resolver una ecuación manteniendo el uso del lenguaje algebraico. Por su parte, la conversión consiste en transformar una representación de un registro distinto, por ejemplo, expresar mediante una ecuación una situación descrita en lenguaje natural o representar gráficamente una relación funcional. Para Duval (2006), la comprensión de los objetos matemáticos requiere coordinar distintos registros de representación mediante procesos de conversión, ya que estos permiten reconocer que un mismo objeto conserva su significado a pesar de representarse de distintas maneras.

Desde otra perspectiva, Radford (2010) sostiene que el pensamiento algebraico es una actividad de naturaleza semiótica-cultural, en la que el conocimiento se construye mediante la interacción entre los estudiantes y diversos recursos semióticos, como el lenguaje, los símbolos, los gestos y otros recursos. Desde esta perspectiva, aprender álgebra implica reconocer regularidades, elaborar generalizaciones y expresar el pensamiento matemático mediante recursos semióticos, lo que favorece la construcción y la comunicación del pensamiento algebraico.

Juegos de mesa como recurso didáctico:

El juego ha sido abordado desde diferentes perspectivas en los ámbitos educativo y cultural, debido a su capacidad para generar espacios de interacción, participación y construcción de significados. Según Huizinga (1949, citado en Bishop, 1998), el juego es una actividad social regida por reglas, en la que los participantes aceptan dinámicas dentro de un contexto específico. Desde esta perspectiva, el juego no se trata solo de entretener, sino que constituye una actividad organizada que implica ciertos aspectos esenciales como la participación y la estandarización de acciones.

En el contexto matemático, Bishop (1998) plantea que las matemáticas pueden entenderse como una construcción cultural desarrollada a partir de prácticas universales. En este sentido, se identifican seis actividades matemáticas fundamentales: contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar, que dan cuenta del desarrollo del conocimiento matemático en diferentes contextos sociales. Específicamente sobre el juego, el autor señala que esta actividad constituye una práctica cultural presente en todas las sociedades y muestra que numerosos juegos incorporan estructuras y relaciones de carácter matemático. Desde esta perspectiva, las reglas de los juegos generan situaciones que requieren interpretar condiciones, formular estrategias, establecer relaciones y tomar decisiones, procesos que se asemejan a formas de razonamiento matemático.

De igual manera, Ascher (1991, citado en Bishop, 1998) evidencia que algunos juegos de distintas culturas incorporan estructuras lógicas, con potencial para percibirlos como contextos adecuados para el desarrollo de estrategias y formas de razonamiento de este campo. Así, el juego puede entenderse como una actividad que favorece la participación, la exploración de relaciones y la construcción de pensamiento matemático.

En el ámbito educativo, algunos estudios han considerado los juegos de mesa como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas. Espinoza (2021) señala que las actividades lúdicas favorecen experiencias de exploración e interacción, lo que permite relacionar los contenidos con el contexto del estudiante. Asimismo, Fraga-Varela et al. (2021) y Maimó et al. (2021) destacan que los juegos de mesa pueden promover el desarrollo del razonamiento lógico, la formulación de estrategias y la comprensión de conceptos matemáticos mediante escenarios de participación activa. En conclusión, estas investigaciones permiten comprender que los juegos de mesa pueden funcionar como recursos para promover procesos asociados al pensamiento matemático, como el reconocimiento de regularidades, la formulación de estrategias, la interpretación de relaciones, la argumentación y la resolución de problemas, todo ellos a través de las reglas, interacciones y estrategias.

7. Metodología

7.1 Enfoque y tipo de investigación

La investigación tiene un enfoque cualitativo, buscando comprender el proceso de adaptación, implementación y validación de un juego de descarte basado en el modelo 3UV. El objetivo de la investigación es desarrollar la adaptación del juego a través del continuo reconocimiento de las acciones de los participantes, las interpretaciones matemáticas que emergen durante su uso, las dificultades identificadas y el análisis retrospectivo.

De acuerdo con Hernández-Sampieri y Mendoza (2018), el enfoque cualitativo permite comprender los significados que construyen en contextos específicos. En este caso, se busca interpretar cómo algunos de los actores del escenario educativo (estudiantes de básica, futuros docentes y expertos en educación matemática) interactúan con el juego, evidenciando tanto elementos propios del objeto matemático, su uso dentro del escenario de la Educación Matemática y las fortalezas y oportunidades de mejora del recurso.

El principal interés radica en identificar las fortalezas y limitaciones del juego, realizando continuamente ajustes para su implementación en contextos educativos. Con ello se busca generar una herramienta coherente con el modelo 3UV y pertinente para apoyar procesos de aprendizaje relacionados con los distintos usos de la variable, considerando las dificultades enunciadas a través de los antecedentes y de una prueba diagnóstica.

La investigación tiene un alcance exploratorio descriptivo. Por una parte, aborda una propuesta coherente con los pocos antecedentes específicos: un juego de descarte fundamentado explícitamente en el modelo 3UV. Por otra, busca caracterizar el proceso de diseño y refinamiento del juego, los registros observados durante su implementación, las valoraciones de los participantes y de los expertos, y los aspectos didácticos.

De esta manera, se pretende comprender cómo los participantes interpretan los distintos usos de la variable y qué aspectos del diseño del juego favorecen o dificultan dicha comprensión, sin establecer relaciones estadísticas ni demostrar efectos sobre el aprendizaje. Se resalta que el diseño metodológico empleó distintas poblaciones con diversos propósitos, inicialmente el diagnóstico se realizó a grado noveno para identificar las dificultades que tienen los estudiantes tras la introducción formal del álgebra. La implementación en diversos niveles educativos permitió valorar el funcionamiento del recurso y sus diversos ajustes en estudiantes que están en proceso de transición entre la aritmética y el álgebra. Asimismo, la exploración con grado cuarto permitió observar el comportamiento del juego desde la perspectiva del álgebra temprana, analizando cómo los estudiantes que no han tenido un acercamiento temprano al álgebra reaccionan ante este tipo de estrategias didácticas.

7.2. Diseño metodológico

Corresponde a una Investigación Basada en Diseño, siguiendo los planteamientos de Gravemeijer y Prediger (2019). La intención es articular la construcción de una intervención educativa con el análisis sistemático de su funcionamiento. El recurso no se concibe como un producto dado desde el inicio, sino como una propuesta que se retroalimenta y modifica continuamente mediante ciclos de diseño, experimentación y refinamiento.

En la Investigación Basada en Diseño, la intervención se sustenta en antecedentes teóricos y en conjeturas sobre cómo determinadas actividades pueden apoyar el aprendizaje. Estas conjeturas se contrastan con las actividades, por lo que cada aplicación del juego se convierte en una oportunidad para realizar ajustes necesarios según las observaciones y registros de los participantes.

De acuerdo con Gravemeijer y Prediger (2019), el propósito de la investigación en diseño es generar conocimiento sobre cómo funciona una innovación, en este caso el juego como recurso didáctico,

identificando las condiciones que favorecen su desarrollo y aquellas transformaciones que va requiriendo según el contexto de aplicación.

7.3. Fases de la propuesta

7.3.1 Fase 1: Preparación del experimento

Esta fase busca delimitar y caracterizar el problema, considerando fundamentos teóricos y didácticos de la investigación y considerando las condiciones iniciales sobre usos de variable.

En primer lugar, se realizó una revisión de la literatura sobre las dificultades en el aprendizaje del álgebra, la transición entre la aritmética y el álgebra, la iniciación al pensamiento algebraico, el modelo 3UV y el uso de juegos y actividades lúdicas en la educación matemática. Esta revisión contribuyó a reconocer que existen diversas propuestas lúdicas para el aprendizaje matemático y algebraico; sin embargo, se identificaron pocos recursos orientados específicamente al inicio del álgebra y fundamentados en los tres usos de la variable planteados por el modelo 3UV.

Posteriormente, se adaptó una prueba diagnóstica del trabajo de Gómez (2015), quien, a su vez, lo retomó del Cuestionario Algebraico desarrollado por Ursini et al. (1996), basado en el modelo 3uv. Para este cuestionario, se hicieron ajustes en el lenguaje y la selección de preguntas, con el fin de adecuarlo a estudiantes de grado noveno del Colegio Lausana. Se seleccionó este grado porque los estudiantes ya han tenido contacto con contenidos algebraicos y se espera la interpretación y el uso de los diferentes significados de la variable. El instrumento permitió indagar aspectos como la traducción del lenguaje natural al algebraico, la interpretación de las letras en expresiones y ecuaciones, la modelación de situaciones mediante expresiones algebraicas, la generalización de patrones y el reconocimiento de relaciones funcionales. (Ver anexo 1)

Los resultados de la revisión teórica y de la prueba diagnóstica permitieron formular las primeras conjeturas de diseño y orientar la adaptación inicial del juego de descarte.

7.3.2 Fase 2. Experimento de diseño

En esta fase se desarrollaron ciclos sucesivos de adaptación, implementación, análisis y refinamiento del juego, esto a través de los resultados, registros y observaciones de los actores involucrados.

La primera versión del juego se implementó con docentes en formación (Licenciatura en Matemáticas). Esta experiencia permitió revisar la claridad de las instrucciones y reglas, además del funcionamiento de la dinámica del juego, tanto en lo lúdico como en lo disciplinar.

Como resultado de esa primera interacción, se ajustan las instrucciones, se modifican elementos visuales y se incorpora una carta orientada a facilitar el tránsito entre los diferentes usos de la variable: incógnita específica, número general y variable en relación funcional.

En una segunda interacción, el prototipo fue sometido a un juicio de expertos en educación matemática. Los actores valoraron la pertinencia disciplinar y didáctica del juego, su coherencia con el modelo 3UV, la claridad y consistencia de reglas e instrucciones y las posibilidades de implementación.

Una última versión refinada se implementó con estudiantes de cuarto y séptimo del colegio Lausana, quienes estaban en distintos niveles de razonamiento algebraico. Se emplearon rúbricas de evaluación del juego, un cuestionario breve sobre los aspectos matemáticos reconocidos por los estudiantes y registros de observación de las sesiones.

7.3.3 Fase 3. Análisis retrospectivo

Esta fase consistió en la organización y análisis de la información obtenida en los distintos momentos de la investigación. El propósito fue contrastar las conjeturas iniciales, el análisis de la prueba diagnóstica y los ciclos de implementación (estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas, juicio de expertos y experiencias desarrolladas con estudiantes de educación básica).

El propósito de esta fase consistió en identificar las fortalezas y dificultades del recurso, a nivel didáctico y disciplinar, realizando las modificaciones respectivas y analizando las condiciones que incidieron en su funcionamiento. Asimismo, se revisó la correspondencia entre las cartas, las reglas, las dinámicas del juego y lo propuesto por el modelo 3UV.

A partir de la iteración, se consolidó una versión refinada del juego y se construyeron consideraciones sobre los aspectos didácticos.

1) Se realizó una revisión de literatura centrada en las dificultades asociadas al pensamiento algebraico. Asimismo, se analizaron antecedentes en los que se han propuesto juegos y actividades lúdicas. Esta revisión evidenció que, aunque existen diversas propuestas didácticas, son escasas las dirigidas al proceso de iniciación al álgebra y al desarrollo de los usos de la variable.

2) Se adaptó una prueba diagnóstica para el grado noveno, con el propósito de adecuarla al contexto y a las características de los estudiantes. La adaptación buscó conservar la evaluación de los tres usos de la variable, tal como los propone el modelo 3UV. La aplicación de la prueba diagnóstica permitió identificar dificultades relacionadas con el empleo de la variable como incógnita, como número general y como relación funcional.

3) Se realizó una primera implementación del juego con estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas, lo que permitió identificar aspectos de mejora en las reglas, el diseño y la claridad de las instrucciones. Como resultado, se incorporó una carta destinada a facilitar la transición entre los diferentes usos de la variable.

5) Posteriormente, el juego fue sometido a un juicio de expertos por docentes especialistas en educación matemática, quienes valoraron su pertinencia didáctica y formularon recomendaciones sobre las instrucciones, las reglas y la dinámica del juego.

6) Por último, el juego se implementó con estudiantes de grado séptimo y, de manera complementaria, con estudiantes de grado cuarto con fines exploratorios. En ambas implementaciones se aplicó una rúbrica de evaluación para recoger información sobre la experiencia lúdica y los aprendizajes matemáticos evidenciados durante el desarrollo del juego.

7.4 Relación entre fases, objetivos específicos y actividades

Tabla 4. Relación entre fases, objetivos específicos y actividades.

Fase de la investigación	Objetivo específico relacionado	Actividades principales
Preparación del experimento. Parte 1: Análisis de dificultades, antecedentes y diagnóstico	Analizar los fundamentos conceptuales, epistemológicos y didácticos de la noción de variable y de sus usos.	Revisión de literatura sobre pensamiento algebraico, transición aritmética-álgebra, noción de variable, modelo 3UV y dificultades asociadas con los usos de la variable. Revisión de antecedentes sobre juegos y recursos didácticos asociados a los usos de la variable. Adaptación, aplicación y análisis de una prueba diagnóstica con estudiantes de grado noveno del Colegio Lausana para identificar dificultades vinculadas con los usos de la variable.

Preparación del experimento Parte 2: Diseño del juego	Diseñar un prototipo de juego de mesa fundamentado en el modelo 3UV, orientado al abordaje de los tres usos de la variable: como incógnita específica, como número general y como relación funcional.	Formulación y diseño del juego. Definición de los objetivos a nivel disciplinar y didáctico. Diseño de cartas, reglas, instrucciones y dinámica general del prototipo. Organización de las situaciones del juego de acuerdo con los tres usos de la variable propuestos por el modelo 3UV.
Experimento de diseño: ciclo 1	Adaptar y refinar un juego de descarte fundamentado en el modelo 3UV, a través de ciclos de diseño e implementación con estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas.	Implementación del prototipo con estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas. Observación del funcionamiento del juego, comprensión de las reglas, pertinencia de las cartas e interacción entre los participantes. Ajuste de reglas, rediseño de instrucciones.
Experimento de diseño: ciclo 2	Validar la pertinencia conceptual, didáctica y funcional del juego mediante el juicio de expertos e implementación con estudiantes de educación básica.	Diseño del instrumento de validación. Aplicación del juicio de expertos con docentes e investigadores en educación matemática. Análisis de observaciones sobre la coherencia conceptual, la pertinencia didáctica, la claridad de las instrucciones, las reglas y las posibilidades de implementación. Ajuste del

		prototipo a partir de las recomendaciones recibidas.
Experimento de diseño: ciclo 3	Validar la pertinencia conceptual, didáctica y funcional del juego mediante el juicio de expertos e implementación con estudiantes de educación básica.	Implementación de la versión refinada con estudiantes de educación básica de los grados cuarto y séptimo. Aplicación de la rúbrica de evaluación del juego, del cuestionario breve y de los registros de observación durante su implementación con estudiantes de educación básica. Recolección de evidencias sobre la comprensión de las reglas, la participación, el uso de representaciones, el reconocimiento de los usos de la variable y las dificultades emergentes durante la experiencia.
Análisis retrospectivo	Analizar las fortalezas, dificultades y posibilidades de mejora del juego a partir de las evidencias obtenidas durante las fases de diseño, validación e implementación.	Organización y análisis de la información obtenida en la revisión teórica, el diagnóstico, implementación con estudiantes de licenciatura, juicio de expertos e implementación con estudiantes de educación básica. Identificación de fortalezas, dificultades y ajustes necesarios. Consolidación de la versión refinada del juego y formulación de conclusiones sobre sus posibilidades didácticas.

7.5 Cronograma de actividades

Cronograma			2025				2026					
Fase	Objetivo relacionado	Actividad	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
Preparación del experimento	Analizar los fundamentos conceptuales, epistemológicos y didácticos propios de la noción de variable y sus usos.	Revisión de literatura sobre dificultades asociadas a la transición aritmética-álgebra, noción y usos de la variable según modelo 3UV.										
		Revisión de antecedentes sobre juegos, actividades lúdicas y recursos didácticos en diagnóstica con estudiantes de grado noveno del Colegio Lausana.										
		Formulación de conjeturas iniciales de diseño de los propósitos matemáticos y didácticos del juego.										
	Diseñar un prototipo de juego de descartar fundamentado en el modelo 3UV.	Diseño de cartas, reglas, instrucciones y dinámica general del prototipo.										
Ciclos de Experimento de diseño	Adaptar y refinar un juego de descartar fundamentado en el modelo 3UV, a través de ciclos de diseño e	Implementación del prototipo con estudiantes de Licenciatura en Matemáticas.										
		Reflexión desde los resultados obtenidos con estudiantes de Licenciatura en Matemáticas.										
	Validar la pertinencia conceptual, didáctica y funcional del juego mediante juicio de expertos e implementación con estudiantes de educación básica.	Diseño del instrumento para juicio de expertos.										
		Revisión del recurso didáctico por parte del juicio de expertos en educación matemática.										
		Análisis de observaciones de expertos y ajuste del prototipo.										
		Implementación de la versión refinada con estudiantes de grado cuarto y séptimo.										
		Aplicación de rúbrica de evaluación del juego, cuestionario breve y registros de observación.										
Análisis retrospectivo	Analizar las fortalezas, dificultades y posibilidades de mejora del juego a partir de las evidencias obtenidas durante las fases de diseño, validación e implementación.	Organización y análisis de la información obtenida durante las fases de la investigación.										
		Contraste entre conjeturas iniciales, evidencias recogidas y ajustes realizados.										
		Consolidación de la versión refinada del juego.										
		Redacción de resultados, conclusiones y documento final.										

Análisis de resultados.

Fase de preparación del experimento

Parte 1: Análisis de dificultades, antecedentes y diagnóstico

La primera fase de la investigación estuvo orientada a consolidar los referentes teóricos y didácticos que fundamentan el diseño del juego de descartar. Para ello, se realizó una revisión de la literatura sobre pensamiento algebraico, transición aritmética-álgebra, noción de variable y modelo 3UV, la cual se desarrolló en la sección de marco teórico. Asimismo, se revisaron antecedentes relacionados con las dificultades asociadas a los usos de la variable, con el uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas y con los recursos didácticos empleados para favorecer el aprendizaje del álgebra.

Como parte de esta fase, se aplicó una prueba diagnóstica a 15 estudiantes de grado noveno del Colegio Lausana, con el propósito de identificar sus comprensiones iniciales sobre los usos de la variable. Los resultados evidencian un bajo desempeño en las tareas que requerían interpretar, simbolizar y generalizar relaciones algebraicas. En general, los 15 estudiantes, evaluados con 11 ítems, obtuvieron 14,8 % aciertos, el 31,0 % respuestas incorrectas, 43,8 % de omisiones y 10,4 % a aciertos parciales. A continuación, se detallan los aspectos relevantes de los resultados.

En primer lugar, se evidencia un alto porcentaje de respuestas omitidas. Esto puede deberse a las dificultades que experimentan los estudiantes al abordar tareas asociadas con los usos de la variable. En contraste, Álvarez (2017, p. 63) indica que algunos estudiantes al no desarrollar la prueba diagnóstica dicen no recordar los contenidos evaluados. Esta falta de respuesta, muestra inseguridad ante el lenguaje algebraico y poca familiaridad con este tipo de tareas.

En segundo lugar, con respecto a la variable como incógnita específica, si bien algunos estudiantes reconocen la necesidad de encontrar un valor desconocido, aún presentan dificultades para utilizar una letra que represente dicho valor y para construir una expresión algebraica completa, lo cual se asocia con la capacidad I5 del modelo 3UV. Lo descrito puede relacionarse con lo dicho por Kaput (2000a, p. 11), quien menciona que la enseñanza tradicional del álgebra suele centrarse en la manipulación simbólica, lo que impide que los estudiantes relacionen los símbolos con el significado algebraico que representan. Adicionalmente, en los ítems con ecuaciones lineales o cuadráticas se evidenciaron dificultades procedimentales para determinar la incógnita mientras que en los casos en los que la solución correspondía a un conjunto infinito, no fue expresada por los estudiantes.

En tercer lugar, en cuanto a la variable como número general, se evidenciaron deficiencias en las capacidades G2 y G5 del modelo 3UV, relacionadas con la interpretación de los símbolos como generalidad y con la simbolización de enunciados, reglas o métodos generales. Específicamente, se observó que los estudiantes tienden a entender el álgebra como la búsqueda de una incógnita (ítem 3), lo que dificulta su comprensión de expresiones como " $4+d$ " o dificultad para representar una

generalidad mediante notación algebraica (ítem 6). Este resultado se relaciona con lo descrito por Kieran (1989, p. 42), quien indica que los estudiantes suelen interpretar la letra como un valor desconocido y no lograr atribuir otros significados.

En cuarto lugar, con respecto a la variable como relación funcional, los resultados evidencian dificultades para comprender la noción de correspondencia. Aunque algunos de los estudiantes identifican cierta dependencia entre los valores de x y y , tienen dificultades para justificar dicha relación y para reconocer que el cambio de una variable depende de la otra. En el punto 9, por ejemplo, algunos estudiantes intentaron establecer la relación entre las cantidades mediante operaciones de división; sin embargo, estos procedimientos quedaron inconclusos o se aplicaron de manera incorrecta, por lo que no permitieron determinar adecuadamente la correspondencia entre las variables. Estos resultados se relacionan con las capacidades del modelo 3UV asociadas al reconocimiento de la correspondencia entre variables, independientemente de la representación utilizada (F1), a la comprensión de la variación conjunta en una relación funcional (F4) y la representación de relaciones mediante una expresión algebraica a partir del análisis de los datos de un problema (F6).

El análisis extendido correspondiente a la prueba diagnóstica se encuentra en el Anexo 2.

Parte 2: Diseño del juego

A partir del análisis de las dificultades reportadas teóricamente al respecto del pensamiento algebraico, de los antecedentes sobre el diseño de propuestas relacionadas con los usos de la variable en la etapa de transición aritmética-álgebra, y de los resultados de la prueba diagnóstica aplicada a los estudiantes de grado noveno del colegio Lausana, se propone el juego descrito a continuación.

Juego “Modus”

Se opta por un juego de cartas de descarte, puesto que este exige al jugador una atención permanente, dada la constante variación de la dinámica del juego, lo que a su vez implica un proceso de validación continua en cada jugada. La propuesta se estructuró a partir de una mecánica similar a la del “Uno”. Este es un juego de cartas reconocido internacionalmente con un número importante de ventas, pues según Mueller (2024), es un juego que se vende en más de 80 países con varias ediciones. Al ser un juego reconocido, es probable que el estudiante ya esté familiarizado con las mecánicas del juego, por lo que el tiempo requerido para comprender las reglas e instrucciones puede reducirse. Esto permite que los estudiantes concentren su atención en la resolución de las situaciones matemáticas planteadas durante la partida y no en el aprendizaje de la mecánica del juego, lo que favorece que las decisiones tomadas en cada turno respondan al razonamiento matemático y no únicamente al conocimiento de las reglas.

Ascher (1991, citado en Bishop, 1998) evidenció que los juegos en diversas culturas incorporan estructuras lógicas y matemáticas que favorecen el pensamiento lógico-matemático. En las reglas generales del “Uno”, cada participante debe analizar las características de las cartas disponibles y determinar si cumplen las condiciones necesarias para realizar una jugada, lo que favorece la toma de decisiones, la argumentación y la verificación de contenidos, como lo sustentan Fraga-Varela et al. (2021) y Maimo et al. (2021).

En el “Uno” existen cartas especiales, que para este caso han sido reemplazadas por aquellas que promueven las competencias matemáticas desde el modelo 3UV, particularmente en la etapa de transición aritmética-álgebra.

El juego adaptado contiene 104 cartas, de las cuales dieciséis son cartas especiales ligadas a los usos de la variable propuestos por Ursini et al. (2005):

Figura 1

Prototipo del juego de mesa



Nota. elaboración propia

- La carta “ x ” corresponde al uso de la variable como número general. En esta dinámica, el estudiante que juega la carta debe crear una regla o condición matemática que los demás participantes deberán cumplir; por ejemplo, proponer que se juegue un número par o un múltiplo de tres. A partir de dicha condición, los demás jugadores deben seleccionar una carta que cumpla con la regla establecida. Desde este punto de vista, esta dinámica promueve que el estudiante reconozca la variable como un símbolo que representa un conjunto de valores y no como un número específico, lo que favorece la generalización, el reconocimiento de patrones y reglas, capacidades propias del modelo 3UV.
- La carta “?” representa la variable como incógnita. En esta carta, el estudiante plantea una situación matemática en la que existe un valor desconocido que debe ser determinado por los demás jugadores. Para ello, el jugador propone una igualdad, “un número que al sumarle 4 de 9”, los demás jugadores deben identificar el valor que cumpla dicha condición y deben lanzar una carta en el medio. Esto promueve la interpretación de la variable como un valor desconocido, fortaleciendo las capacidades del modelo 3UV, correspondiente al

reconocimiento e identificación en una situación problema: la presencia de algo desconocido que debe ser determinado.

- La carta " $f(x)$ " representa la variable como una relación funcional. Al poner en juego esta carta, el estudiante indica una operación (se limita a la suma y la resta al inicio) y un valor numérico, que se aplicará al número de la carta ubicada en la parte superior del juego. Por ejemplo, si se define la operación "suma" y el valor "dos", y la última carta jugada es un "tres", el siguiente jugador deberá jugar obligatoriamente la carta cinco. Esto favorece la comprensión de la relación entre dos cantidades, en la que el valor de la siguiente carta depende de la operación aplicada a la anterior, y explora el reconocimiento de patrones y la identificación de correlación entre variables en el marco del modelo 3UV.

Estas cartas especiales fueron diseñadas para promover los tres usos de la variable descritos por Ursini et al. (2005), mientras que las cartas numéricas, numeradas del cero al nueve, son la base para la formación de los usos de la variable, al presentar la formulación de expresiones, secuencias y relaciones algebraicas. De esta manera, la mecánica del juego conserva la estructura básica del "Uno", pero adapta sus elementos para que cada interacción entre los jugadores constituya una oportunidad para interpretar, representar y utilizar la variable en distintos contextos, favoreciendo el desarrollo progresivo del pensamiento algebraico durante la transición entre la aritmética y el álgebra. Para complementar cómo se conectan las dinámicas establecidas en las cartas especiales con la teoría del modelo 3UV, se van a relacionar con las capacidades abordadas en el trabajo de Ursini y Trigueros (2006):

- **La carta "?" (Incógnita específica):** Esta carta tiene como objetivo que los jugadores identifiquen un valor desconocido a partir de pistas, lo que moviliza la capacidad del estudiante al reconocer cantidades desconocidas que deben ser determinadas considerando

las restricciones del problema (I1) y plantear o resolver ecuaciones mediante indicios (I2 e I5).

- **La carta “x” (Número general):** Busca que los estudiantes establezcan reglas o condiciones sencillas para un determinado conjunto numérico, con el objetivo de que reconozcan patrones (G1) y comprendan los símbolos como una entidad general que puede asumir cualquier valor (G2).
- **La carta “f(x)” (Relación funcional):** En esta dinámica el estudiante debe conectar el valor de una carta con la jugada anteriormente mediante operaciones aritméticas sencillas, lo cual promueve el reconocimiento de la correspondencia entre valores (F1) y la variación conjunta entre magnitudes (F2).

Las respectivas reglas e instrucciones de esta primera versión pueden revisarse en el Anexo 3.

Fase de experimento del diseño

Ciclo 1: Estudiantes de licenciatura en matemáticas

La implementación realizada con estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas permitió identificar diversos aspectos susceptibles de mejora en el diseño del juego antes de su aplicación para la validación con estudiantes de educación básica. Durante la observación de la sesión se evidenció que tres de los cuatro participantes ya estaban familiarizados con el juego de cartas de descarte, mientras que uno de ellos requirió una explicación más detallada. Aun así, posterior al inicio, los participantes que conocían este tipo de juegos brindaron apoyo a quien presentaba desconocimiento, lo que favoreció el desarrollo de la actividad y permitió que la partida fuese dinámica.

La implementación permitió identificar algunos vacíos en las reglas del juego. Adicionalmente, se presentaron situaciones con el uso de las cartas especiales y la interpretación de algunas reglas, lo que evidencia la necesidad de establecer criterios claros para resolver estas situaciones y evitar la

incorporación de reglas externas propias del “Uno”. Estas observaciones fueron implementadas para la siguiente interacción.

De igual manera, se pudo apreciar que en los primeros turnos algunos jugadores tuvieron problemas para recordar cómo funcionaban ciertas cartas especiales y qué acciones realizaban. Esta situación es habitual en la incorporación de nuevos juegos de mesa, donde el aprendizaje inicial de la mecánica puede interferir temporalmente con el desarrollo de la partida. Sin embargo, a medida que se desarrolló el juego, los jugadores fueron dominando más las dinámicas, logrando una interacción más fluida y volviendo el enfoque cada vez más puntual en la resolución de las situaciones matemáticas.

Figura 2

Implementación con estudiantes de licenciatura en matemáticas



Nota. Elaboración propia

Adicional a los registros reportados desde la observación, se aplicó una rúbrica orientada a evaluar algunas dimensiones del juego, entre ellas la claridad de las reglas, el componente algebraico, el componente lúdico, la pertinencia didáctica y el funcionamiento general de las dinámicas propuestas.

La rúbrica implementada puede consultarse en el Anexo 4. Los resultados mostraron que el primer ítem, sobre la claridad de las reglas, fue considerado poco adecuado, lo que significa que las instrucciones iniciales no fueron suficientes para que los participantes entendieran el juego por sí mismos, y durante la actividad hubo que recurrir a la ayuda del docente para aclarar dudas en varias ocasiones.

En el segundo ítem, correspondiente a la relación entre las dinámicas del juego y la comprensión de los usos de la variable, tres de los cuatro participantes lo calificaron como “muy adecuado”. Este resultado puede indicar que, desde la perspectiva de docentes de matemáticas en formación, las cartas diseñadas permiten representar de forma coherente los tres usos de la variable propuestos por Ursini et al. (2015), lo cual es un aspecto favorable para la investigación.

Respecto al tercer ítem, todos los participantes consideraron muy adecuada la pertinencia del juego para estudiantes que se encuentran en la transición entre la aritmética y el álgebra, particularmente en grado séptimo. Este resultado respalda la adecuación del nivel de complejidad de las actividades propuestas a la población objetivo de la investigación.

Los ítems cuarto y quinto, relacionados con el nivel de participación e interacción generado durante la partida y con el equilibrio entre el componente lúdico y el aprendizaje matemático, también fueron valorados como “muy adecuados” por todos los participantes. Estos resultados indican que la dinámica del juego favorece la participación activa de los jugadores e integra el contenido matemático sin perder el carácter lúdico de la actividad.

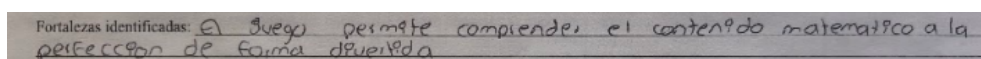
En contraste, el ítem correspondiente a la claridad de las instrucciones asociadas a las cartas especiales obtuvo una valoración de poco adecuada, lo que evidencia nuevamente la necesidad de mejorar la explicación de su funcionamiento. Este resultado coincide con las observaciones realizadas durante la implementación, en las que varias dudas surgieron precisamente al momento de utilizar las cartas relacionadas con los usos de la variable.

Finalmente, los participantes consideraron que el juego presenta potencial para favorecer procesos de generalización, la identificación de patrones y la comprensión de relaciones algebraicas.

Con respecto a los comentarios de los participantes, en cuanto a las fortalezas, coincidieron en señalar que el juego favorece la comprensión de los usos de la variable mediante una dinámica entretenida y participativa. Uno de ellos manifestó que la propuesta “permite comprender el contenido matemático, a la perfección de forma divertida”, apreciación que fue consistente con los comentarios realizados por los demás participantes.

Figura 3

Estudiante menciona las fortalezas del juego



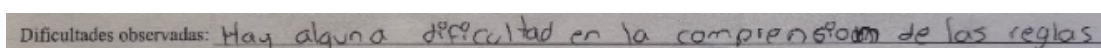
Fortalezas identificadas: El juego permite comprender el contenido matemático a la perfección de forma divertida.

Nota. elaboración propia

Respecto a las dificultades, existió consenso en que el principal aspecto por mejorar corresponde a la claridad de las reglas y de las instrucciones para utilizar las cartas especiales, aspecto que explica las valoraciones obtenidas en la rúbrica para estos ítems.

Figura 4

Estudiante menciona las dificultades del juego



Dificultades observadas: Hay alguna dificultad en la comprensión de las reglas.

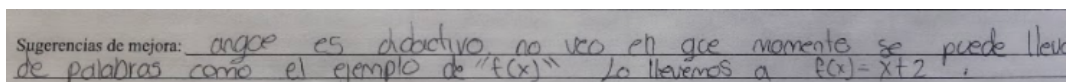
Nota. elaboración propia

Como sugerencia, uno de los participantes indicó que la dinámica asociada a la carta “ $f(x)$ ” podría presentar una relación más explícita con una expresión algebraica, una observación pertinente que

podría considerarse en futuras investigaciones en las que las dinámicas del recurso aumenten su nivel de complejidad.

Figura 5

Sugerencias del estudiante hacia el recurso



Sugerencias de mejora: *antes es abstracto, no veo en que momento se puede llevar de palabras como el ejemplo de "f(x)" lo llevemos a $f(x) = x + 2$.*

Nota. elaboración propia

Ajustes realizados

A partir de los resultados obtenidos durante la implementación y de las observaciones registradas en la rúbrica, se realizaron los siguientes ajustes al prototipo:

- Se elaboró un instructivo con un lenguaje más claro y accesible, en el que se explica, paso a paso, la preparación de la partida, el desarrollo del juego y el funcionamiento de cada carta. Este material complementa la explicación inicial del docente y se presenta en el anexo 5.
- En el instructivo se incorporó un apartado de preguntas frecuentes y casos especiales para resolver situaciones que pueden ocurrir en la partida y evitar malas interpretaciones de las reglas.
- Se realizó una nueva característica visual de las cartas, donde los elementos visuales adquirieron una imagen personalizada del recurso. Este ajuste buscó reforzar la identidad del material didáctico y minimizar distracciones potenciales asociadas con el juego comercial original "Uno".

Ciclo 2: Juicio de expertos

Con los ajustes mencionados, se presenta el juego a un proceso de validación mediante juicio de expertos, con el objetivo de considerar una valoración especializada sobre la pertinencia del recurso, previo a la implementación en aula. Este ciclo permitió complementar los resultados obtenidos

durante la implementación anterior, incorporando el análisis de profesionales con amplia experiencia en educación matemática.

Durante la presentación y la explicación del recurso con los expertos, se realizó una observación sistemática del desarrollo de la partida. Se evidenció que, aunque la memorización de las reglas no se dio de forma espontánea, los participantes se adaptaron a la dinámica del juego, posiblemente debido a su experiencia en el ámbito de la educación matemática. Esto permitió que la partida se desarrollara de manera fluida con algunas interrupciones ocasionales (dudas y sugerencias).

Aun así, durante la implementación surgieron algunas observaciones sobre el alcance del recurso. Uno de los expertos manifestó la restricción al uso exclusivo de números naturales y sugirió la posibilidad de incorporar, en futuras versiones del juego, otros conjuntos numéricos además del conjunto de los números naturales. Esta observación da cuenta del alcance del recurso, de sus limitaciones, pero también de su potencial para ser adaptado a otros contenidos matemáticos y a distintos niveles educativos. Adicionalmente, otro experto señaló que el empleo de algunos términos presentes en las reglas podría generar un obstáculo epistemológico al dificultar la diferenciación entre la variable como número general y la variable como relación funcional, de acuerdo con el modelo 3UV.

Adicionalmente, con el propósito de complementar la información obtenida mediante la observación, se aplicó una rúbrica de validación (ver anexo 6) orientada a diferentes aspectos del recurso. Los principales resultados obtenidos se presentan a continuación:

- El primer ítem, relacionado con la claridad de las reglas y la dinámica del juego, fue valorado por los tres expertos como “adecuado” y “muy adecuado”. Estos resultados indican que, desde la perspectiva de los expertos, las reglas y la dinámica general del juego son comprensibles y permiten el desarrollo de la partida de manera autónoma o con un nivel mínimo de acompañamiento. Asimismo, en comparación con la implementación del ciclo 1, se observa una mejora en este aspecto, lo que sugiere que los ajustes realizados al reglamento y al instructivo contribuyen a optimizar el funcionamiento del recurso.

- El segundo ítem evaluó la relación entre las dinámicas del juego y los usos de la variable propuestos por el modelo 3UV. Al igual que en el ítem anterior, las valoraciones de los expertos se situaron entre “adecuado” y “muy adecuado”. Estos resultados indican que, desde la perspectiva de los expertos, las dinámicas diseñadas permiten representar con claridad los tres usos de la variable, aunque aún se identifican algunos aspectos de mejora. Asimismo, esta valoración es consistente con los resultados obtenidos en la implementación anterior, en la que también se consideró que las dinámicas del juego guardaban una relación adecuada con el modelo 3UV.
- El tercer ítem evaluó la pertinencia del juego para estudiantes de séptimo grado. En este aspecto, dos de los tres expertos calificaron el recurso como “muy adecuado”, mientras que uno lo valoró como “medianamente adecuado”, lo que sugiere que aún podrían realizarse mejoras para ajustarlo a las características de esta población. En conjunto, estas valoraciones reflejan una percepción favorable sobre la pertinencia del juego para estudiantes que se encuentran en la transición entre la aritmética y el álgebra. Adicionalmente, estos resultados constituyen una fuente para avanzar con el siguiente ciclo de rediseño, correspondiente a la implementación del juego con estudiantes de grado séptimo.
- El cuarto ítem trató acerca del equilibrio entre el componente lúdico y el componente matemático del juego. En este punto, los juicios de valor de los expertos oscilaron entre “adecuado” y “muy adecuado”, lo que indica que, desde su punto de vista, el recurso integra de forma equilibrada la experiencia de juego con los objetivos de aprendizaje propuestos. Este resultado coincide con los del ciclo anterior de implementación donde los participantes destacaron el balance entre el componente lúdico y el matemático.
- El último ítem versaba sobre la calidad de los materiales y el diseño visual. En este punto, los tres expertos eligieron la opción “muy adecuado”, lo cual evidencia una valoración muy favorable de la presentación del juego. Conforme a sus apreciaciones el recurso cuenta con

una adecuada organización de los elementos gráficos, buena legibilidad, y un diseño funcional y atractivo.

Dado que la rúbrica incluye tres apartados abiertos para registrar las fortalezas, dificultades y sugerencias identificadas por los expertos, a continuación, se realiza un breve análisis de lo reportado allí.

Como fortalezas del recurso, los expertos reconocen el diseño y el potencial didáctico del recurso. Resaltan la creatividad y el carácter llamativo del juego, enfatizando la calidad del diseño, la presentación de las cartas y la propuesta en conjunto. Esta apreciación coincide con la valoración obtenida en el ítem relacionado con la calidad de los materiales y el diseño visual y con la relación entre lúdica y matemática. Los resultados coinciden con los obtenidos en la aplicación con estudiantes de licenciatura en matemáticas del primer ciclo.

Por otra parte, se reconoció como fortaleza del recurso su componente lúdico, ya que la dinámica propuesta favorece una experiencia de aprendizaje interesante para los estudiantes. Uno de los expertos apuntó, además, que el juego fomenta una continua interacción de los participantes con los diferentes usos de la variable y que el carácter repetitivo de las dinámicas permite a los participantes enfrentarse una y otra vez a situaciones relacionadas con ella, lo que favorece la familiarización. Esa característica es especialmente interesante para el objetivo del recurso, que es el de interpretar los distintos usos de la variable en la partida.

Finalmente, se hizo alusión a la necesidad de mejorar la relación del recurso con los procesos de enseñanza y aprendizaje, por lo que es importante continuar analizando la forma en que las dinámicas propuestas se articulan con el campo de la Educación Matemática.

Los expertos evaluaron el recurso con una rúbrica de cinco criterios, con valor de 1 a 5 puntos, para un puntaje total de 5 a 25. En el Anexo 6 se incluye la escala cualitativa de interpretación y la rúbrica completa. El juego obtuvo una calificación promedio de 22.3 puntos, situándose en la categoría muy adecuada, lo que evidencia una valoración favorable del prototipo en términos de claridad,

pertinencia didáctica, relación con el modelo 3UV, equilibrio lúdico-matemático y calidad del diseño. Las observaciones de los expertos permitieron, sin embargo, identificar los ajustes necesarios antes de su implementación definitiva.

Ajustes realizados:

- Se modificó la redacción de algunas instrucciones sobre las cartas para eliminar ambigüedades y diferenciar usos de la variable
- Se incorporaron precisiones al manual de instrucciones sobre algunas situaciones que se presentaron durante la experiencia con los expertos.
- Se mejoró el diseño gráfico de algunos elementos de las instrucciones a fin de facilitar la legibilidad y la identificación de las cartas.

Algunas recomendaciones formuladas por los expertos no fueron incorporadas al diseño final del juego, particularmente aquella relacionada con ampliar las posibilidades de formular reglas para otros conjuntos numéricos, dado que el prototipo trabaja principalmente con números naturales. Esta decisión respondió a la necesidad de adecuar el recurso a estudiantes que se encuentran en una etapa inicial de aproximación al pensamiento algebraico, evitando introducir elementos de mayor complejidad conceptual que pudieran exceder los objetivos propuestos y dificultar la construcción progresiva del concepto de variable. No obstante, esta observación resulta relevante, pues permite reconocer la posibilidad de ampliar el juego en futuras versiones, manteniendo en esta etapa la coherencia entre el diseño del recurso, el modelo 3UV y los DBA del MEN (2016) correspondientes a grado séptimo relacionados con la descripción y representación de situaciones de variación de manera numérica, simbólica o gráfica.

Ciclo 3: Experimentación en grado cuarto y séptimo

Este tercer ciclo corresponde a la implementación del prototipo del juego en escenarios con estudiantes de grado cuarto y séptimo, con el propósito de analizar el funcionamiento del recurso,

identificar fortalezas y aspectos por mejorar, así como recopilar evidencias sobre su relación con el desarrollo del pensamiento algebraico, en particular con el aprendizaje de los usos de la variable propuestos por Ursini et al. (2005). Dado que la investigación contempló dos momentos de implementación con finalidades distintas, este ciclo se dividió en dos fases, una por cada curso.

En ambos casos el investigador asumió el rol de observador participante, acompañando el desarrollo de las sesiones, resolviendo inquietudes cuando fue necesario y registrando las situaciones relevantes e interacciones que surgieron durante la aplicación del juego. Para la recolección de los datos se emplearon rúbricas de percepción, que evidenciaron las dificultades y las posibles opciones de mejora.

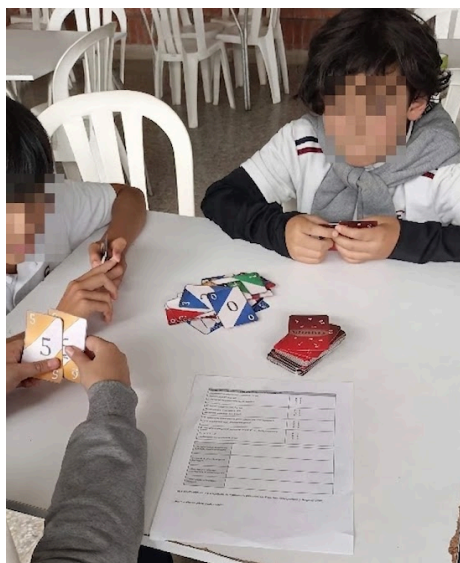
Ciclo 3.1. Implementación en grado cuarto

Esta primera implementación se realizó con cuatro estudiantes de grado cuarto de educación básica primaria, la cual tuvo como propósito analizar el funcionamiento del juego en un contexto de educación básica primaria, con el fin de identificar fortalezas, dificultades y aspectos de mejora. Su participación permitió valorar la claridad de las reglas, la interacción generada por el juego, la comprensión de las dinámicas propuestas y la manera en que los estudiantes interpretan las cartas relacionadas con los diferentes usos de la variable propuestos por el modelo 3UV.

Durante la implementación, se empleó la observación participante como estrategia de recolección de información; se registraron las interacciones de los estudiantes, las dificultades surgidas durante las partidas y las estrategias utilizadas para resolver las situaciones planteadas. Por último, se aplicó una rúbrica de percepción diseñada para este nivel escolar con el propósito de complementar las observaciones realizadas.

Figura 6

Implementación con grado cuarto



Nota. Elaboración propia

Observaciones

Al iniciar la actividad fue evidente que tres de los cuatro estudiantes estaban familiarizados con juegos de cartas de descarte, lo que facilitó la comprensión inicial de las reglas y el desarrollo de la partida. Si bien, uno de los estudiantes requirió una explicación más detallada sobre las dinámicas del juego, recibió ayuda constante de sus compañeros.

Esta situación evidenció que el aprendizaje de las reglas puede darse a través del acompañamiento docente, pero también, desde el refuerzo por los pares, estando en su zona de desarrollo próximo. De estos resultados se puede inferir que el juego promueve espacios de participación e interacción entre los participantes, lo cual coincide con lo planteado por Espinoza (2021), quien señala que los juegos de mesa favorecen el trabajo colaborativo, la participación y el desarrollo de habilidades sociales. También es consistente con Fraga-Varela et al. (2021), quienes señalan que el uso de juegos puede contribuir al aprendizaje matemático y que la incorporación de estrategias de gamificación potencia dichos resultados.

Durante la sesión se observaron situaciones de entusiasmo y discusiones entre los estudiantes sobre posibles jugadas y la aplicación de reglas del juego, lo cual no representa una interrupción directa de la actividad, ya que deja en evidencia un alto nivel de participación y compromiso con la actividad. Lo cual sugiere que el juego logró mantener el interés de los participantes y mantener una participación activa durante el desarrollo del juego, resultado que coincide con lo reportado por Monsalve (2025), quien encontró que la implementación de juegos de mesa adaptados favoreció la motivación y la participación de los estudiantes.

Se identificó que los estudiantes comprendieron rápidamente las reglas generales del juego, aunque no evitó que presentaran dificultades para recordar el funcionamiento de las cartas especiales, por lo que fue necesario aclarar algunas dinámicas durante el desarrollo de la partida. Asimismo, en varias ocasiones confundían las dinámicas de estas cartas especiales, atribuyendo reglas que correspondían a otras cartas, lo cual se presentó con frecuencia al comienzo de las primeras rondas del juego y, aunque a medida que el juego avanzaba esto se vio reducido, no desapareció completamente.

Con respecto al contenido matemático, el juego promovió el uso del cálculo mental en los estudiantes, en el que debían realizar sumas, restas o establecer relaciones numéricas para decidir estrategias de juego. Sin embargo, aunque el juego promueve el uso de conocimientos aritméticos y algebraicos, también se veía obstaculizado por el tiempo que algunos estudiantes tardaban en realizar los cálculos. En este sentido, fue favorable que el juego permitiera a los estudiantes utilizar procedimientos numéricos para acercarlos a situaciones que requerían reconocer patrones, relaciones y regularidades, lo cual resulta coherente con los planteamientos de Kaput (2000a), quien sostiene que los procesos de generalización y formalización pueden comenzar en la aritmética y desarrollarse mediante lenguajes progresivamente más formales. Asimismo, es complementado por Kieran (1989), quien señala que la experiencia previa de los estudiantes con la estructura de las expresiones numéricas tiene un efecto importante en su capacidad para comprender el álgebra, lo cual se observó durante la implementación.

Se observó que los estudiantes presentaron mayores dificultades con la carta correspondiente a la variable como incógnita específica al momento de formular pistas que representaban un número desconocido sin revelar directamente su valor. En varias ocasiones, los indicios proporcionados por los estudiantes expresaban la información de manera explícita, lo que permitía identificar el valor con facilidad, mientras que en otras, las pistas eran insuficientes para que sus compañeros infirieran la respuesta. Este comportamiento es consistente con el modelo 3UV de Ursini y Trigueros (2006), según el cual, para trabajar con la variable como incógnita específica es necesario reconocer e identificar la presencia de una cantidad desconocida que debe determinarse considerando las restricciones del problema (I1). Asimismo, este resultado está directamente relacionado con Valencia (2015) y Herrera et al. (2016), quienes reportan dificultades en la comprensión de los distintos usos de la variable, específicamente en el trabajo con incógnitas, números generales y variables en relación funcional.

Desde el álgebra temprana, los resultados son consistentes con el trabajo de Kaput (2000a), quien propone que la enseñanza del álgebra debe comenzar desde los primeros años escolares mediante procesos de generalización que se expresan en lenguajes progresivamente más formales y cuyo origen se encuentra en la aritmética. Adicionalmente, Godino et al. (2012) indican que el razonamiento algebraico se desarrolla de manera progresiva y que el reconocimiento de lo general constituye un rasgo importante de este razonamiento, así como la identificación de las dificultades que enfrentan los estudiantes durante la transición de la aritmética al álgebra. Esto se evidenció cuando los estudiantes hicieron uso de la carta de número general, ya que en este espacio los estudiantes lograron movilizar sus conocimientos previos de manera crítica para discutir y validar reglas generales relacionados con los múltiplos y conjuntos numéricos, lo que dejó en evidencia lo valor del recurso y los retos a se enfrentan al jugarlo.

Resultados de la rúbrica

Para complementar lo observado, al final de la sesión con los estudiantes de grado cuarto se aplicó una rúbrica de evaluación enfocada en la comprensión de las reglas, la experiencia de juego y algunos aspectos relacionados con las cartas que contenían relaciones algebraicas.

Los datos recolectados mostraron que los estudiantes valoraron el recurso favorablemente en diversos aspectos, como el apartado lúdico, el diseño y el material del juego, y el trabajo en grupo con sus compañeros, lo que refuerza lo mencionado anteriormente sobre el recurso, donde se observa que aumentan la motivación y la participación de los estudiantes, lo cual está estrechamente relacionado con lo planteado por Monsalve (2025).

En la pregunta sobre las reglas de juego, tres de los cuatro estudiantes indicaron haber comprendido las reglas completamente y haber podido resolver las dudas durante la implementación, mientras que uno respondió “Más o menos lo entendí” en estos ítems. Los resultados son coherentes con lo observado durante la sesión, en la que se evidenció un ambiente de colaboración entre los participantes mientras se desarrollaba el juego.

En el apartado de preguntas de respuesta dicotómica, todos los participantes afirmaron haber utilizado las letras que estaban presentes en el diseño de las cartas y haber comprendido su función dentro del juego, aunque se evidenció en varios comentarios que, aunque identificaban los usos de cada una de las cartas dentro del juego, tendían a relacionarlos con la realización de procesos aritméticos. Asimismo, esta tendencia se evidenció en las preguntas que abordaban aspectos como el empleo de las cartas para obtener nuevos valores y en la resolución de los desafíos planteados, donde los estudiantes, aunque indicaban haber realizado dichas acciones, centraron sus explicaciones principalmente en el factor procedimental. Esto puede estar relacionado con la perspectiva de Kaput (2000a), mencionado anteriormente, sobre la generalización y cómo esta comienza en la aritmética y se expresa mediante lenguajes más formales.

Por último, la pregunta sobre encontrar números ocultos recibió diversas respuestas; sin embargo, estas no aportaron resultados relevantes para la investigación. Posiblemente se deba a la redacción de la pregunta, que no fue formulada correctamente para los estudiantes de grado cuarto.

Ciclo 3.2 Implementación en grado séptimo

La segunda implementación del recurso didáctico se realizó con cinco estudiantes de grado séptimo, en la que se recolectó la información de manera similar a la de la implementación con grado cuarto. Con el objetivo de validar el juego con estudiantes que se encuentren en el proceso de transición entre la aritmética y el álgebra, utilizando los mismos instrumentos que en la implementación pasada con algunos ajustes. Se empleó la observación participante y se aplicó una rúbrica de evaluación, adaptada del instrumento propuesto por Petri, von Wangenheim y Borgato (2024) en su investigación sobre la valoración de juegos educativos (anexos 7).

Figura 7

Implementación con grado séptimo



Nota. Elaboración propia

Observaciones

Al comenzar la implementación del recurso, se identificó que los cinco estudiantes ya estaban familiarizados con este tipo de juegos, por lo que la explicación inicial se centró en el funcionamiento de las cartas especiales y en las diferencias generales del juego. Se evidenció que cuatro de los cinco estudiantes comprendieron eficazmente el funcionamiento del juego y sus cartas, mientras que uno de los participantes presentó dificultades para diferenciar y comprender el uso de las cartas especiales. Sin embargo, al igual que en la implementación realizada con grado cuarto, los estudiantes apoyaron y aclararon las dudas que fueron surgiendo a través de la partida, haciendo que la intervención del investigador se limitará a situaciones específicas. Este comportamiento concuerda con lo observado en la implementación anterior y además concuerda con lo señalado por Espinoza (2021), quien sustenta que los juegos de mesa promueven el trabajo colaborativo y desarrollan habilidades sociales.

Durante el desarrollo del juego, se observó que los participantes no presentaron dificultades con respecto a las cartas especiales que representaban la variable como número general o incógnita

específica, permitiendo que la partida del juego se desarrollara con normalidad. En cambio, cuando jugaron la carta de la variable en su relación funcional, generó dudas sobre el funcionamiento de esta carta, lo que requirió la intervención del docente en diferentes momentos de la implementación. Lo que resulta coherente con lo mencionado en la investigación de Ursini et al. (2006), donde se evidencia que la comprensión de la variable en las capacidades del estudiante para comprender la variación conjunta (F4) y la correspondencia entre variables (F1) fueron los aspectos donde se presentaron mayores dificultades, presentándose así como uno de los aspectos más complejos en la asimilación del concepto de variable. Adicionalmente, tiene concordancia con la prueba diagnóstica implementada con grado noveno donde se identificó que los estudiantes interpretan las cantidades como elementos independientes en un problema que aborda la variable desde su relación funcional. Un hallazgo relevante durante la implementación del juego surgió en relación con la carta especial “n”, la cual representa la variable como número general, en la cual se explicó su funcionamiento durante la explicación del juego y, adicionalmente, la descripción estaba presente en el instructivo. Según las instrucciones, la persona que juega esta carta debe establecer una condición que involucre al menos dos valores posibles dentro del rango de cero a diez, por ejemplo, se podrían utilizar condiciones como “números pares, múltiplos de 4 y otras consignas”. Lo cual tenía como objetivo que los estudiantes no pudieran establecer dinámicas que obstaculizaran el juego. Sin embargo, un estudiante durante la implementación identificó que esta regla tenía una ambigüedad, ya que se estaba considerando que los múltiplos de siete no se podían establecer como condición, entendiéndolo como si solo se pudiera jugar un valor. Él argumentó que en este caso se podría jugar el siete y el cero, indicando que el cero también es múltiplo de este número. Este comentario resulta relevante, ya que recurrió a sus conocimientos aritméticos posteriores para validar su estrategia, lo cual concuerda con lo planteado por Kieran (1989), ya que indica que la experiencia previa de los niños con la estructura de las expresiones numéricas debería tener un efecto importante en su capacidad para dar sentido al álgebra (p.33). Adicionalmente, la capacidad del estudiante para identificar vacíos o ambigüedades en las reglas de juego demuestra que el participante es autónomo

y es capaz de analizar la situación para generar estrategias. Este tipo de interacción, como sugieren Maimó et al. (2021), constituye un “metajuego” que se define como el proceso de analizar la estrategia y la lógica interna del recurso para tomar decisiones fundamentadas. Es una señal de un aprendizaje significativo cuando el estudiante justifica su conducta mediante un razonamiento lógico-matemático.

Resultados de la rúbrica

Al concluir la aplicación con los estudiantes de séptimo grado, se utilizó una rúbrica de evaluación adaptada del modelo MEEGA+ (Petri et al., 2024) para recabar la percepción de los participantes acerca del juego de mesa MODUS. El instrumento (Anexo 7) permitió evaluar el recurso bajo dos factores fundamentales: la usabilidad (estética, operabilidad y facilidad de aprendizaje) y la experiencia del jugador (interés, diversión, interacción social y aprendizaje percibido).

En la parte de selección múltiple, se encontró una tendencia positiva general, con nueve de dieciséis afirmaciones calificadas en los niveles “De acuerdo” y “Totalmente de acuerdo”. Los participantes evaluaron positivamente el diseño estético y la legibilidad del juego, aspectos que según Petri et al. (2024) son de gran importancia para asegurar una interacción satisfactoria y disminuir la carga cognitiva en el momento de aprendizaje de reglas.

Respecto a las afirmaciones sobre el interés generado y el aprendizaje percibido por los participantes, los resultados muestran que todos los participantes estaban totalmente de acuerdo o de acuerdo con estas afirmaciones, lo cual concuerda con lo reportado por Monsalve (2025) y Fraga-Varela et al. (2021), quienes sostienen que el uso de juegos diseñados con fines educativos no solo facilita la adquisición de conceptos matemáticos, sino que ayuda a transformar la percepción

negativa que tienen los estudiantes hacia el álgebra, incrementando así, la motivación hacia la misma. Además, la valoración unánime de los estudiantes, al calificar con “Totalmente de acuerdo” la interacción entre sus pares y la diversión percibida, podría indicar que el juego de mesa fomenta el trabajo colaborativo y el desarrollo de habilidades sociales desde la perspectiva de Espinoza (2021).

En cuanto al componente didáctico, los estudiantes opinaron que el juego les abrió un espacio de aprendizaje favorable a través del juego y relacionaron las dinámicas del juego con conceptos matemáticos, coincidiendo directamente con Monsalve (2025), quien afirma que la integración del juego facilita la comprensión conceptual, transformando la percepción del álgebra y aumentando la motivación intrínseca. Sin embargo, los ítems referidos a la usabilidad, específicamente la claridad de las reglas, tuvieron una variación en las respuestas entre los niveles “En desacuerdo”, “Ni de acuerdo ni en desacuerdo” y “Totalmente de acuerdo”, lo que puede ser una indicación de que una parte de la muestra necesitó más tiempo para apropiarse de las dinámicas asociadas a determinadas cartas especiales. Estos resultados son coherentes con lo observado en la implementación, ya que se necesitó de la intervención constante del docente para aclarar el funcionamiento de la carta de la variable en relación funcional ($F(x)$). Como se mencionó anteriormente, dicha dificultad es explicada desde la teoría mediante la investigación de Ursini y Trigueros (2006), quien identifica que la comprensión de la variación conjunta (F_4) es una de las capacidades con más complejidad de conseguir, debido a la dificultad de reconocer la dependencia entre variables.

Respecto de la verificación de las mecánicas del recurso, los datos obtenidos aportan evidencia favorable sobre el funcionamiento y su potencial para transitar entre los diversos usos de la variable. Todos los estudiantes resolvieron correctamente las situaciones asociadas a la variable como número general (n) y a la relación funcional ($f(x)$) en contextos de aplicación directa. En el caso de la incógnita particular (?), cuatro de los cinco participantes pudieron hallar el valor desconocido y la misma cantidad de alumnos realizaron correctamente la tarea de continuación de secuencias.

La parte de preguntas abiertas permitió profundizar en el aprendizaje y experiencia de los estudiantes, brindando una visión amplia y cualitativa. En la primera pregunta “¿Qué aprendiste sobre el uso de la letra jugando MODUS?”, se encontró que una parte de los participantes comenzaron a reconocer que las letras pueden representar valores o cantidades, más allá de su percepción como simples símbolos. En concreto dos alumnos relacionaron las letras con representación de valores dados y afirmaron que la dinámica lúdica los ayudó a explorar su utilidad operativa. Esto concuerda con los hallazgos de Ursini y Trigueros (2006), mostrando una evolución en el empleo de la variable como incógnita particular, donde la letra representa un valor indeterminado que ha de hallarse.

Sin embargo, uno de los participantes indicó que el uso de la letra es “complejo”. Esto puede deberse a que el tránsito de la aritmética al álgebra escolar es un proceso gradual que suele presentar dificultades en el aprendizaje.

Sobre la pregunta que buscaba evaluar la experiencia del estudiante, los participantes mostraron agrado por las cartas especiales, con una mención específica a la carta “ $f(x)$ ”. Valoraron positivamente la interacción con sus compañeros. Lo descrito concuerda con los resultados de las implementaciones anteriores, en las que se observó que el juego fomenta el trabajo colaborativo y favorece la motivación.

Por otro lado, en la pregunta “¿Qué aspectos del juego consideras que podría mejorar?”, las respuestas se centraron principalmente en la carta “ n ” y en las demás cartas especiales, lo que indica que aún existe cierto nivel de dificultad para comprender del todo su dinámica. Asimismo, se retomó la dificultad de las reglas al ser algo confusas, la cual está directamente relacionada con las cartas especiales, lo que sugiere que una posible solución es ajustar el diseño gráfico con el objetivo de que sea más probable ligar la dinámica con la letra. Adicionalmente, un estudiante hizo hincapié en los momentos de conversación que surgían durante el juego y distraían durante su desarrollo.

Por último, la mayoría de los estudiantes no incluyó observaciones adicionales, a excepción de uno que resaltó su gusto por el juego.

Conclusiones

Esta investigación abordó la pregunta: ¿Cómo adaptar y validar un juego de descarte, fundamentado en el modelo 3UV, que favorezca el abordaje de los diferentes usos de la variable en estudiantes que se encuentran en procesos de iniciación del pensamiento algebraico?

La revisión de literatura reveló que la comprensión del concepto de variable es un proceso gradual que inicia antes de la enseñanza formal del álgebra y se construye a partir de la generalización, el reconocimiento de patrones, el establecimiento de relaciones y la construcción de significados durante la transición entre la aritmética y el álgebra. Este análisis evidenció el carácter multifacético que el concepto adquiere, el cual depende del contexto en el que se emplea. Por otro lado, el modelo 3UV permitió definir los tres usos de la variable y las capacidades asociadas a cada uno de ellos para su comprensión. En conjunto, estos referentes conceptuales, epistemológicos y didácticos proporcionaron la base que orientó el diseño y la posterior validación del recurso didáctico.

Por otra parte, tanto en la revisión de literatura como en la prueba diagnóstica mostraron que las dificultades asociadas a la comprensión de la variable persisten desde educación básica primaria hasta la educación superior. Entre ellas resaltan, la dependencia del razonamiento aritmético sobre el algebraico, las dificultades para establecer relaciones de dependencia entre variables y la omisión de respuesta en situaciones que necesitan interpretar la variable. Además, se identificó una escasez de recursos didácticos dirigidos a la enseñanza del concepto de variable, predominando propuestas centradas en la manipulación simbólica. Lo anterior respalda la pertinencia del diseño de un recurso didáctico para favorecer la aproximación a los diferentes usos de la variable.

Los hallazgos obtenidos en la teoría evidenciaron que la incorporación de juegos de mesa al contexto educativo requiere de un objetivo didáctico claro, en el que las mecánicas del juego se articulen con

los objetivos de aprendizaje. Por lo cual, se adaptó la mecánica de un juego de descarte “UNO” para la creación de MODUS, procurando mantener un equilibrio entre lo lúdico y el carácter pedagógico. Este proceso requirió el diseño específico de cuatro cartas especiales con el propósito de fortalecer la dinámica lúdica y el abordaje de los tres usos de la variable, siendo el mecanismo principal para integrar los objetivos de aprendizaje a la dinámica del juego. Por ende, se diseñaron reglas, dinámicas y cartas especiales en las que cada elemento está ligado a estos tres usos, eliminando cartas o dinámicas que no estén directamente relacionadas. Lo anterior favorece el abordaje de la incógnita específica, el número general y la variable en relación funcional dentro de la experiencia del juego.

La implementación del juego mediante ciclos iterativos reveló que la construcción de un recurso didáctico requiere de un proceso cíclico donde cada implementación aporte información relevante para su refinamiento. Las observaciones realizadas durante las implementaciones, la información recolectada por medio de las rúbricas, la retroalimentación de estudiantes y expertos hizo posible identificar fortalezas y debilidades relacionados con las reglas, la comprensión de las mecánicas, el funcionamiento de las cartas y el equilibrio lúdico-matemático, lo cual permitió ajustar el recurso progresivamente fortaleciendo la coherencia conceptual y pedagógica.

De manera complementaria, el proceso de validación reforzó la pertinencia conceptual y didáctica del juego mediante el juicio de expertos y las implementaciones realizadas con estudiantes de educación básica. El juicio de expertos confirmó la coherencia entre las mecánicas del juego, las dinámicas propuestas y el modelo 3UV, además de aportar recomendaciones dirigidas a la mejoría de las reglas, la formulación de ciertas cartas y la correspondencia entre las dinámicas del juego y los propósitos de aprendizaje, lo cual resultó fundamental para el refinamiento progresivo del recurso.

Por otra parte, la prueba con los estudiantes sirve para evaluar cómo se comporta el juego con la población a la cual está dirigida, sometiéndolo a un modelo de validación teórica con el objetivo de

examinar su usabilidad y la experiencia del jugador como criterios importantes para su valoración, observando tanto sus puntos fuertes como los aspectos a mejorar; de este modo, es posible detectar problemas de comprensión de algunas mecánicas y detectar oportunidades para introducir algunas modificaciones en cuanto a las cartas especiales. Al mismo tiempo se hizo evidente que la propuesta propició la participación, el intercambio de estrategias, la argumentación y la discusión de ideas matemáticas. En particular, se dieron situaciones durante las dinámicas de juego en las que los estudiantes realizaron un análisis crítico de las jugadas realizadas y recurrieron a argumentos fundamentados en conceptos matemáticos para justificar, defender o refutar sus decisiones. Estas interacciones evidencian que el recurso sobrepasó la resolución mecánica de actividades, posibilitando momentos de reflexión y fortalecimiento de conocimientos matemáticos. Las evidencias generadas en el juicio de expertos y los ciclos de implementación, permitieron validar el juego MODUS, apoyado en un proceso sistemático de evaluación, retroalimentación y mejora continua. Esto reafirma que la validación de los recursos didácticos, más allá de corroborar su funcionamiento, potencia su coherencia conceptual, su pertinencia didáctica y su factibilidad para ser puestos en práctica en contextos educativos reales.

El análisis de las evidencias obtenidas durante las fases de diseño, validación e implementación permitió identificar fortalezas, dificultades y oportunidades de mejora que contribuyeron a la consolidación de MODUS. Una de sus principales fortalezas es la capacidad del recurso para integrar los tres usos de la variable, promover la participación activa de los estudiantes, el trabajo colaborativo y favorecer la argumentación matemática. Asimismo, la estructura del juego permitió identificar dificultades conceptuales relacionadas con la comprensión de la variable, constituyéndose no sólo como un recurso de enseñanza, sino como una forma de reconocer los tipos de razonamiento empleados por los estudiantes en la resolución de las situaciones problema.

Sin embargo, el proceso también permitió identificar oportunidades de mejora. Se realizaron algunos ajustes en las mecánicas para facilitar la comprensión, algunas cartas se reformularon y se vio la necesidad de reforzar las orientaciones del docente para lograr una mejor implementación.

Los resultados obtenidos permiten considerar futuras investigaciones orientadas a ampliar el alcance de la propuesta, como por ejemplo implementar MODUS en diferentes contextos educativos, con muestras más amplias, en otros conjuntos numéricos y con dinámicas específicas como el uso exclusivo de una de las cartas para fortalecer un uso específico de la variable que permitan analizar su impacto en el desarrollo del pensamiento algebraico y en la comprensión de los usos de la variable.

En síntesis, esta investigación demuestra que la enseñanza de la noción de la variable requiere propuestas didácticas que sobrepasen la educación tradicional del álgebra y promuevan la construcción progresiva de conceptos desde las primeras aproximaciones del pensamiento algebraico. Por lo cual, el diseño, refinamiento y validación de MODUS evidencian que es posible articular fundamentos teóricos sólidos con estrategias lúdicas para fortalecer el aprendizaje de los diferentes usos de la variable en contextos escolares.

Referencias

- Alvarez Bello, R. (2017). El juego como estrategia didáctica para la superación de errores y dificultades en la iniciación al álgebra en el grado octavo. [Tesis de pregrado, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia]. <http://repositorio.uptc.edu.co/handle/001/2652>
- Azcárate Giménez, C., & Camacho Machín, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10(2), 135-150. <https://emis.de/ft/53003>
- Bachelard, G. (2000). La formación del espíritu científico: Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo. Siglo XXI Editores. (Obra original publicada en 1983) <https://doctoradousbcienciaseducacion.wordpress.com/wp-content/uploads/2013/01/bachelard-la-formacion-del-espiritu-cientifico.pdf>

- Bishop, A. J. L. (1998). El papel de los juegos en educación matemática. UNO, 9 - 19.
https://dgespe.edutlixco.org/pdf/educa/pap_jueg.pdf
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Recherches en Didactique des mathématiques, 4(2), 165-198.
<https://revue-rdm.com/1983/les-obstacles-epistemologiques-et/>
- Calle Chacón, L. P., García-Herrera, D. G., Ochoa-Encalada, S. C., & Erazo-Álvarez, J. C. (2020). La motivación en el aprendizaje de la matemática: Perspectiva de estudiantes de básica superior. Revista Arbitrada Interdisciplinaria Koinonía, 5(1), 488–507.
<https://doi.org/10.35381/r.k.v5i1.794>
- Carrillo, M., Padilla, J., Rosero, T., & Villagómez, M. S. (2009). La motivación y el aprendizaje. Alteridad. Revista de Educación, 4(2), 20-32.
<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=467746249004>
- Da Silva, J. B. (2020). David Ausubel's Theory of Meaningful Learning: an analysis of the necessary conditions. Research, Society and Development, 9(4), e09932803.
<https://doi.org/10.33448/rsd-v9i4.2803>
- Distéfano, M. L., Urquijo, S., & Galindo, S. (2006). Enseñanza sistemática del lenguaje simbólico. IV Conferencia Argentina de Educación Matemática. SOAREM.
<https://www.aacademica.org/sebastian.urquijo/98.pdf>
- Duval, R. A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. Educ Stud Math 61, 103–131 (2006). <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Espinoza Espinosa, D. (2021). El aprendizaje basado en juegos de mesa para la enseñanza de la matemática. [Tesis de maestría, Universidad Tecnológica Indoamérica].
<https://repositorio.uti.edu.ec/server/api/core/bitstreams/02f9abfa-19ed-4ada-87c4-c879598d2fb7/content>

- Fraga-Varela, F., Vila-Couñago, E., & Martínez-Piñeiro, E. (2021). The impact of serious games in mathematics fluency: A study in Primary Education. *Comunicar*, 29(69), 125-135.
<https://doi.org/10.3916/C69-2021-10>
- Godino, J. D. y Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.
https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf
- Godino, J. D., Castro, W. F., Aké, L. P., & Wilhelmi, M. R. (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental. *Boletim de Educação Matemática*, 26(42 B), 483-511.
<https://www.redalyc.org/pdf/2912/291223574005.pdf>
- Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza De Las Ciencias*, 32(1), 199–219. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965>
- Gómez Méndez, J. (2015). Dificultades con el concepto de variable como incógnita. Un estudio comparativo con alumnos mexicanos e italianos de primero y tercero de secundaria [Tesis de maestría, Centro de investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional]. Repositorio Institucional del CINVESTAV.
<https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/1036>
- Gravemeijer, K., Prediger, S. (2019). Topic-Specific Design Research: An Introduction. En G. Kaiser & N. Presmeg (Eds.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education* (pp. 17-39). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_2
- Herrera López, H., Cuesta Borges, A., & Escalante Vega, J. E. (2016). El concepto de variable: un análisis con estudiantes de bachillerato. *Educación matemática*, 28(3), 217-240.
<https://doi.org/10.24844/em2803.08>
- Hernández-Sampieri, R., & Mendoza, C. P. (2018). Metodología de la investigación. Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta. McGraw-Hill Education.
<https://doi.org/10.22201/fesc.20072236e.2019.10.18.6>

- Icfes. (2024). Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA). Informe nacional de resultados para Colombia 2022. Ministerio de Educación Nacional.
https://www.mineducacion.gov.co/1780/articles-421217_recurso_03.pdf
- Kaput J.J. (2000a). Teaching and learning a new algebra with understanding. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, University of Massachusetts Dartmouth.
<https://scispace.com/pdf/teaching-and-learning-a-new-algebra-with-understanding-dwxy9tp2e.pdf>
- Kaput J.J. (2000b). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by “algebrafying” the K-12 curriculum. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, University of Massachusetts Dartmouth. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED441664.pdf>
- Kieran, Carolyn. (1989). The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective. En S. Wagner & C. Kieran (Eds.), Research issues in the learning and teaching of algebra (Vol. 4, pp. 33-56). Lawrence Erlbaum.
https://www.researchgate.net/publication/331749734_The_Early_Learning_of_Algebra_A_Structural_Perspective
- Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. En D. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 390-419). Macmillan.
<https://pubs.sciepub.com/education/11/10/9/index.html>
- Küchemann, D. (1981). The understanding of generalised arithmetic (algebra) by secondary school children. En K. Hart (Ed.), Children's understanding of mathematics: 11-16 (pp. 102-119). John Murray.
<https://kclpure.kcl.ac.uk/ws/portalfiles/portal/2933238/276092.pdf>
- MagicSchool AI. (s. f.). *MagicSchool AI*. <https://www.magicschool.ai/>

- Maimó Oliver, J. M., Rosado Fontanet, M., & Cros Lombarte, L. (2021). Juegos de mesa como herramienta pedagógica para el aprendizaje de las matemáticas. *Entorno Abierto*, (43), Article 43.
https://sapm.es/EntornoAbierto/EntornoAbierto-num43/EntornoAbierto-num43_005.pdf
- Merino-Toapanta, A. E., Cueva-Almeida, M. E., Sarmiento-Sarmiento, N. M., & Paredes-Proañó, A. M. (2022). Análisis de los conceptos de variable y constante en los estudiantes del Bachillerato General Unificado del Ecuador. *593 Digital Publisher CEIT*, 7(4-2), 175-185. <https://doi.org/10.33386/593dp.2022.4-2.970>
- Molina, M. (2006). Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria [Tesis doctoral, Universidad de Granada].
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=1210>
- Monsalve Arbeláez, A. (2025). Adaptaciones de juegos de mesa como medio para favorecer el aprendizaje del álgebra en grado octavo [Tesis de maestría, Universidad de Antioquia].
Disponible en: <https://hdl.handle.net/10495/49577>
- Mueller, S. (2024). Why this popular card game is still relevant 52 years after its debut. CNN.
<https://edition.cnn.com/2024/06/03/business/uno-card-game-popularity-cec>
- Petri, G., Gresse von Wangenheim, C., & Borgatto, A.F. (2024). MEEGA+, Systematic Model to Evaluate Educational Games. En N. Lee (Ed.), *Encyclopedia of Computer Graphics and Games*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-23161-2_214
- Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1–19. <https://doi.org/10.1080/14794800903569741>
- Rojas, P. J., & Vergel C. R. (2018). Iniciación al álgebra y pensamiento algebraico temprano: actividades para orientar el trabajo en el aula. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 3(1), 19-30.
https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1149533/document_6.pdf

- Serres Voisin, Y. (2011). Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza. *Sapiens. Revista Universitaria de Investigación*, 12(1), 122-142.
<https://www.redalyc.org/pdf/410/41030367007.pdf>
- Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1–36. <http://www.jstor.org/stable/3482237>
- Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification — The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2), 191–228.
<https://doi.org/10.1007/BF01273663>
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (Ed.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 124-154). ICE/Horsori.
<https://laurabrichetti.wordpress.com/wp-content/uploads/2010/12/socas-robayna-dificultad-es-errores-y-obstculos-en-el-azaje-de-la-matemtica.pdf>
- Stewart, I. (2008). Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años. Crítica.
<https://es.scribd.com/document/720748928/Historia-de-Las-Matematicas-Ian-Stewart>
- Stewart, J. (2012). Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas (7° ed.). Cengage Learning.
https://eva.interior.udelar.edu.uy/pluginfile.php/96366/mod_resource/content/1/Stewart.%20C%C3%A1lculo%20de%20una%20variable..pdf
- Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., & Trigueros, M. (2005). Enseñanza del álgebra elemental: Una propuesta alternativa. Trillas.
<https://es.scribd.com/document/511773585/Algebra-Elemental-Cap-1-6-Ursini>
- Ursini, S., & Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática*, 18(3), 5-38.
<https://www.redalyc.org/pdf/405/40518302.pdf>

- Valencia, P. A. (2015). Propuesta para la enseñanza en el aula del concepto de variable algebraica a través de situaciones problema [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/53935>
- Zapata Castañeda, P. N., Cárdenas Salgado, F. A., & Rendón, M. R. (2010). La asimilación de conceptos: un modelo basado en procesos cognitivos. *Tecné, Episteme Y Didaxis: TED*, (27), 115-130. <https://doi.org/10.17227/ted.num27-992>