USO DE GEOGEBRA EN ACTIVIDADES DE OPTIMIZACIÓN: UN ANÁLISIS DEL TRÁNSITO ENTRE LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS INVOLUCRADAS

Edith Avila Gómez

Maestría en Educación, Facultad Ciencias de la Educación

Universidad La Gran Colombia

Bogotá D.C

2025

Uso de GeoGebra en actividades de optimización: Un análisis del tránsito entre las representaciones semióticas involucradas

Edith Ávila Gómez

Trabajo de grado presentado como requisito para optar

al título de Magister en Educación

Carlos Eduardo León Salinas

Director de Tesis

Maestría en Educación, Facultad Ciencias de la Educación

Universidad La Gran Colombia

Bogotá D.C

2025

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi asesor de tesis, por su paciencia, dedicación y valiosa colaboración durante todo este proceso. Su guía oportuna, sus observaciones pertinentes y su constante acompañamiento fueron fundamentales para la construcción y culminación de este trabajo. A mi familia, gracias por su apoyo incondicional, por estar siempre presentes con palabras de aliento, por su amor y comprensión en cada momento de este camino.

TABLA DE CONTENIDO

Lista de Figuras

Resumen

Esta investigación presenta una propuesta didáctica orientada a facilitar el tránsito entre diferentes registros de representación semiótica en el aprendizaje de conceptos matemáticos relacionados con la resolución de problemas de optimización, a partir de la implementación de la geometría dinámica, particularmente, GeoGebra. La propuesta se fundamenta en la Teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval y el Enfoque Ontosemiótico, adoptando un método cualitativo, cuyo objetivo es comprender cómo los estudiantes de educación media emplean diversos registros (numérico, gráfico, geométrico, algebraico y verbal) al abordar tareas de optimización.

En la implementación se realizó un taller compuesto por tres sesiones que incluyó la manipulación física del papel como estrategia de modelación concreta, la representación gráfica de relaciones funcionales, la inferencia algebraica y la exploración interactiva con GeoGebra. La recopilación de datos se realizó a través de la exploración de las producciones de los estudiantes, observaciones directas en el aula y un análisis de los procesos de resolución.

Los resultados evidencian que los estudiantes realizaron transiciones significativas entre los registros gráfico, numérico y geométrico, siendo GeoGebra un recurso fundamental para reforzar el razonamiento funcional y validar resultados. Sin embargo, se identificaron dificultades en la transición del registro numérico al algebraico, lo cual requiere implementar estrategias pedagógicas que fomenten la formalización simbólica. Esta propuesta aporta al ámbito educativo matemático al enfatizar la relevancia del uso coordinado de registros semióticos y herramientas tecnológicas para enriquecer la comprensión de los objetos matemáticos, promover un pensamiento flexible,

establecer conexiones conceptuales y facilitar una participación activa en la resolución de problemas.

Abstract

This research presents a didactic proposal aimed at facilitating the transition between different registers of semiotic representation in the learning of mathematical concepts related to solving optimization problems, based on the implementation of dynamic geometry, specifically GeoGebra. The proposal is based on Duval's Theory of Registers of Semiotic Representation and the Ontosemiotic Approach, adopting a qualitative method aimed at understanding how high school students use different registers (numerical, graphical, geometric, algebraic, and verbal) when approaching optimization tasks.

The implementation involved a three-session workshop that included the physical manipulation of paper as a concrete modeling strategy, the graphical representation of functional relationships, algebraic inference, and interactive exploration with GeoGebra. Data collection was conducted through exploration of student productions, direct classroom observations, and a thorough analysis of problem-solving processes.

The results show that students made significant transitions between graphical, numerical, and geometric registers, with GeoGebra being a fundamental resource for reinforcing functional reasoning and validating results. However, difficulties were identified in the transition from numerical to algebraic registers, which requires the implementation of pedagogical strategies that foster symbolic formalization. This proposal contributes to the field of mathematics education by emphasizing the importance of the coordinated use of semiotic registers and technological tools to enrich the understanding of mathematical objects, promote flexible thinking, establish conceptual connections, and facilitate active participation in problem-solving.

Introducción

La enseñanza de las matemáticas ha experimentado una transformación significativa con la incorporación de las tecnologías digitales como herramientas mediadoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Estas tecnologías se han integrado progresivamente en los diseños curriculares de todos los niveles educativos, tanto en la educación formal como no formal. Como señala Zangara (2009), desde la educación inicial hasta los niveles superiores, el uso de herramientas tecnológicas ha enriquecido la manera en que se enseñan y aprenden las matemáticas, al ofrecer nuevas posibilidades de representación, exploración y comprensión de los conceptos matemáticos.

En particular, la geometría dinámica ha emergido como una herramienta poderosa que facilita la realización de construcciones geométricas. Gracias a su naturaleza interactiva, permite manipular objetos geométricos dentro de una construcción, conservando las relaciones geométricas establecidas o generando nuevas a partir de esas interacciones. Esta característica convierte a la geometría dinámica en una herramienta no solo para el estudio de la geometría, sino también del cálculo, ya que permite analizar procesos de variación entre magnitudes de forma visual y dinámica.

Precisamente, uno de los programas de geometría dinámica es GeoGebra, desarrollado por Markus Hohenwarter. Según Álvarez et al. (2014), GeoGebra se ha convertido en el software libre más popular en los últimos años, gracias a su capacidad para dinamizar figuras geométricas y examinar objetos matemáticos desde diferentes registros de representación. Su interfaz gráfica se combina con una vista algebraica, de cálculo simbólico y una hoja de cálculo, lo que facilita el establecimiento de relaciones entre representaciones y permite una comprensión más profunda de los conocimientos matemáticos.

En su Teoría de los Registros de Representación Semiótica, Duval (1998), otorga un papel central a las representaciones semióticas en relación con los objetos matemáticos, siendo descritas como construcciones que utilizan signos que pueden ser conscientes (notorias al sujeto) como externos (directamente sensibles y materializadas). Entre las representaciones semióticas más comunes se encuentran las expresiones algebraicas, las gráficas cartesianas, las tablas numéricas y las descripciones en lenguaje natural. Estas formas de representación pertenecen a sistemas semióticos distintos, entendidos como estructuras de signos que operan mediante reglas particulares de codificación, manipulación e interpretación.

No obstante, no todo sistema semiótico califica automáticamente como registro de representación semiótica. Según Duval (1999), un sistema puede considerarse un registro cuando cumple tres condiciones: 1) permite la producción de representaciones identificables; 2) posibilita el tratamiento de las representaciones, es decir, operaciones internas dentro del mismo registro; 3) admite la conversión a otros registros, lo que implica traducir una representación desde un sistema semiótico a otro, como pasar de una expresión algebraica a su representación gráfica.

Ante ello, De Faria (s.f.), destaca que herramientas como GeoGebra permiten desarrollar y profundizar estas representaciones semióticas, presenciando la tecnología como transformadora en la enseñanza de las matemáticas, refiriendo que:

> Se convierte paulatinamente en un agente catalizador del proceso de cambio en la educación matemática, gracias a su potencial para permitir el manejo dinámico de múltiples sistemas de representación de objetos matemáticos, creando espacios en los que el estudiante pueda construir un conocimiento matemático más amplio, más complejo, más profundo y potente. (De Faria, s.f., p. 2).

Esto hace que la geometría dinámica sea una herramienta altamente eficaz para la enseñanza integral de objetos matemáticos, facilitando un aprendizaje más profundo y conectado entre diferentes conocimientos y representaciones. Desde esta perspectiva, las construcciones realizadas mediante herramientas de geometría dinámica, como GeoGebra, cumplen con los criterios necesarios, permitiendo crear figuras reconocibles, manipularlas dentro del entorno gráfico y vincularlas con expresiones algebraicas.

CAPÍTULO 1: Aspectos Generales

En este capítulo se aborda el problema relacionado con las dificultades que presentan los estudiantes al convertir las representaciones semióticas del conocimiento de optimización a la resolución de actividades en contextos específicos. Se establecen los objetivos que guiarán el análisis, en función de los alcances y momentos clave para dar respuesta a la problemática planteada. Finalmente, se justifica la relevancia del estudio en relación con las exigencias educativas nacionales. Estos aspectos generales proporcionan la base para fundamentar y orientar el desarrollo del trabajo de grado.

1.1 Planteamiento del problema

En el contexto educativo colombiano, se han establecido objetivos orientados a mejorar la calidad de la educación mediante un enfoque integral que promueve el desarrollo de competencias y la articulación de capacidades como el pensamiento crítico, la resolución de problemas, la comunicación efectiva, el aprendizaje autónomo y el trabajo colaborativo. En este marco, se han propuesto los Estándares Básicos de Competencias, particularmente en el área de matemáticas, que busca potencializar el pensamiento matemático mediante la formación en las áreas cognitivas, afectivas, sociales y culturales.

Según el MEN (2006), el conocimiento matemático no solo es sustancial en un entorno laboral cada vez más tecnologizado, sino también imprescindible para una participación activa y crítica en la vida social y política. No obstante, alcanzar estos propósitos requiere que el conocimiento matemático se fortalezca desde la educación escolar, de modo que los estudiantes no solo desarrollen habilidades procedimentales, sino que también desarrollen una comprensión profunda de los conceptos involucrados, especialmente aquellos que implican un alto grado de abstracción y aplicación.

En ese sentido, se han identificado retos persistentes en la práctica educativa respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, entre ellos, las dificultades que enfrentan los estudiantes para comprender y realizar registros semióticos y su conversión. El Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006), reconoce que uno de los principales desafíos en el sistema educativo colombiano es garantizar una enseñanza de las matemáticas que no se limite a la repetición de procedimientos, los cuales se han enmarcado en el uso excesivo de metodologías tradicionales centradas en la memorización.

Navarro et al. (2016), explican esta problemática desde una perspectiva didáctica, donde gran parte del aprendizaje que ocurre en la enseñanza tradicional no se aplica en un conocimiento útil para la vida cotidiana, lo que limita la posibilidad de lograr aprendizajes significativos. Esta enseñanza tiende a reproducir lo que Freire (1970), denominó como "educación bancaria", en la que el docente actúa como único conocedor y transmisor de conocimientos que deposita contenidos en los estudiantes, considerados como receptores pasivos (p. 52). Esta visión pedagógica reduce al estudiante a un rol pasivo, en el que se espera que memorice y reproduzca información sin cuestionarla ni relacionarla con su contexto.

Al respecto, Córdoba et al. (2015), advierten que muchas prácticas docentes siguen centradas en la evaluación, donde la satisfacción del docente se basa en las respuestas correctas que los estudiantes ofrecen en pruebas estructuradas, repetitivas y descontextualizadas. Este tipo de evaluación, centrada en la reproducción de procedimientos, refuerza la pasividad del estudiante y perpetúa un modelo de aprendizaje depositado, tal como lo anunció Freire (1970), donde el conocimiento se transmite sin una comprensión innata, reflexión ni contextualización.

En el pensamiento matemático, esta lógica de enseñanza-aprendizaje presenta limitaciones centradas en la repetición mecánica y la memorización de algoritmos, lo cual tiende a generar desmotivación, ya que los estudiantes no perciben una conexión entre los conocimientos matemáticos y su aplicación en la vida real (Ruiz, 2008). Además, el uso predominante de evaluaciones estandarizadas refuerza esta desconexión, al privilegiar respuestas cerradas por encima de procesos de pensamiento más complejos y contextualizados.

Frente a esta realidad, resulta necesario revisar las metodologías utilizadas y replantear el rol del docente en la enseñanza matemática, siendo mediador de aprendizaje y diseñador de experiencias que propicien la comprensión conceptual y la movilización de distintos registros de representación semiótica. En este marco, los problemas de optimización matemática se constituyen en una estrategia didáctica pertinente, ya que, al implicar la maximización o minimización de una cantidad bajo ciertas condiciones, permiten vincular los conceptos matemáticos con situaciones reales, favoreciendo así la construcción de sentido por parte del estudiante.

Con el fin de atender este requerimiento, Moreno et al. (2021), sugieren que el aprendizaje matemático, al estar ligado con las formas de enseñanza que emplean los docentes, debe ir más allá de enfoques exclusivamente deductivos y analíticos. Allí, el autor incorpora la representación semiótica como mediadora en la construcción del conocimiento matemático, permitiendo a los estudiantes interpretar objetos matemáticos a través de múltiples registros como el gráfico, algebraico y verbal.

Una línea de investigación destacada en esta área es la desarrollada por Balcázar (2018), quien analiza el proceso de enseñanza-aprendizaje de la optimización desde el Enfoque Ontosemiótico (EOS) y la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval. Esta investigación plantea dos necesidades: 1) fortalecer la idoneidad didáctica en la enseñanza de la optimización, es decir, la coherencia entre los recursos didácticos, las metas de aprendizaje y las necesidades de los estudiantes; 2) comprender a profundidad los conflictos semióticos, que se refieren a las dificultades que enfrentan los estudiantes al interpretar y transitar entre diferentes registros de representación.

A partir de estas consideraciones, el presente trabajo de grado reconoce la necesidad de diseñar una propuesta didáctica que vaya más allá de los enfoques tradicionales, promoviendo una enseñanza contextualizada y orientada a la comprensión. Para ello, se plantea una estrategia que articula el uso de herramientas tecnológicas con fundamentos teóricos, como la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (Duval, 2006) y el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento Matemático (Godino et al., 2007). Estos enfoques permiten entender el aprendizaje como un proceso complejo de interpretación, conversión y coordinación entre distintos registros, lo cual resulta útil para abordar la enseñanza de temas abstractos como la optimización.

En este sentido, los problemas de optimización constituyen una oportunidad didáctica pertinente para propiciar el tránsito entre registros, ya que implican la construcción y análisis de modelos matemáticos que vinculan variables en contextos reales. Además, permiten movilizar habilidades como la visualización, la interpretación funcional, la toma de decisiones y la argumentación matemática, aspectos que difícilmente se desarrollan en prácticas de enseñanza tradicional centradas en algoritmos fijos. Sin embargo, el abordaje de estos problemas también presenta desafíos, especialmente cuando los estudiantes no logran establecer conexiones entre los distintos sistemas de representación implicados.

Es en este escenario donde el uso del software GeoGebra se plantea como un recurso clave. GeoGebra, al permitir la representación simultánea y dinámica de expresiones algebraicas, gráficas y geométricas, ofrece un entorno propicio para que los estudiantes exploren, validen y comprendan conceptos matemáticos desde múltiples perspectivas. No obstante, su efectividad no radica únicamente en su uso técnico, sino en el diseño de tareas didácticas que promuevan el tránsito intencional entre registros y resuelvan los conflictos semióticos identificados en la literatura (Balcázar, 2018). Por tanto, este trabajo se orienta a responder la siguiente pregunta de investigación: ¿De qué forma el tránsito de los registros de representaciones semióticas, haciendo uso del software GeoGebra, permite la comprensión de los conocimientos matemáticos presentes en los problemas de optimización?

1.2 Justificación

A partir de lo mencionado en el planteamiento de problema, se reconoce que el desarrollo de competencias matemáticas en la educación media sigue siendo un desafío en el sistema educativo colombiano. A pesar de que los Estándares Básicos de Competencias propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (2006), promueven una educación matemática integral, en la práctica escolar persisten metodologías tradicionales centradas en la memorización, que dificultan el desarrollo del pensamiento crítico, la resolución de problemas y la aplicación contextual del conocimiento matemático.

Esto origina la necesidad de implementar estrategias pedagógicas que integren los intereses de los estudiantes, los diversos registros de representaciones semióticas (algebraico, gráfico, geométrico y verbal) y los problemas de optimización. La optimización, en particular, representa un contenido matemático que permite contextualizar el conocimiento en situaciones reales y cotidianas, y suele estar guiada por la intuición y la formulación de conjeturas (Malaspina, s.f.). Su enseñanza exige no solo comprender procedimientos, sino interpretar, representar, modelar y tomar decisiones con base en información relevante.

No obstante, los problemas de optimización se proponen desde distintas representaciones que facilitan la comprensión, el análisis y la resolución de conocimientos para profundizar el problema desde las soluciones más efectivas. Siendo así, las representaciones toman valor por ser un constructo matemático que describe situaciones mediante sistemas simbólicos. Para Ramos y Rodríguez (2018), las representaciones son "entender y utilizar diferentes tipos de representaciones de objetos, fenómenos y situaciones matemáticas, comprendiendo las relaciones entre dichas representaciones" (p. 27).

Para articular estas representaciones necesarias en el enfoque matemático, hay que tener en cuenta los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) que se fundamentan en garantizar el desarrollo de conocimientos, habilidades y valores para la realización de una vida digna. Este marco constituye las representaciones basadas en los DBA de matemáticas a través de enfoques y estrategias que buscan garantizar la comprensión integral de los conocimientos matemáticos.

En ese caso, se exponen una diversificación de representaciones (gráficas, numéricas, algebraicas, verbales y geométricas) según los grados, ya que son requisitos básicos que se necesitan ir construyendo para que el estudiante comprenda los conocimientos y procedimientos, visualizando y manipulando conocimientos matemáticos de distintas maneras (MEN, 2016). Para hacer su contextualización, los DBA proponen hacer una aplicación práctica para situarlas en la vida real, utilizando las representaciones para modelar y resolver problemas.

Los DBA en matemáticas promueven el desarrollo progresivo de habilidades para representar, interpretar y aplicar conceptos matemáticos desde la educación primaria hasta el bachillerato. En primaria se mencionan para construir e interpretar las representaciones para ubicarse en el espacio, ya sea mediante planos o cantidades numéricas en expresiones que involucran distintas operaciones. En bachillerato estas representaciones ya deben pasar de planos para hacer uso de representaciones algebraicas, geométricas y pictóricas adecuadas al conjunto de datos, calculadores y software adecuados.

Estas representaciones permiten a los estudiantes comprender y aplicar conocimientos matemáticos de manera integral, al facilitar la visualización, el análisis y la manipulación de conceptos desde diferentes enfoques: gráficos, numéricos, algebraicos y verbales. Asimismo, la contextualización de problemas en situaciones de la vida real y el uso intencionado de tecnologías digitales enriquecen el proceso de aprendizaje, debido que posibilitan que los estudiantes interpreten, relacionen y traduzcan entre distintas formas de representación.

En ese marco, la comprensión matemática no depende únicamente del uso de una representación aislada, sino de la articulación entre múltiples formas de representar un mismo objeto. Así, las representaciones externas (como gráficos, expresiones algebraicas o figuras geométricas) estimulan la construcción de representaciones internas, es decir, imágenes mentales y estructuras significativas del conocimiento. Este intercambio continuo entre lo externo y lo interno permite que el estudiante relacione sus conocimientos previos con los nuevos, y logre resolver problemas con mayor profundidad, flexibilidad y precisión (Balcázar, 2018).

Ante este proceso, Balcázar (2018), evidencia cuatro representaciones base clasificadas en lo externo, siendo: 1) algebraica, utilizado en ecuaciones y desigualdades describiendo el problema matemáticamente; 2) gráfica, siendo un producto visual del problema, incluyendo gráficos de funciones, regiones factibles, curvas de nivel, etc.; 3) geométrica, enfocado en las propiedades geométricas de las figuras y regiones; 4) verbales, utilizando descripciones verbales del problema ayudando a comprender el contexto y requisitos del problema.

Estas representaciones externas son el medio en la que los estudiantes podrán exteriorizar las imágenes y las representaciones mentales cumpliendo una doble función, primero el de actuar como estímulo hacia los sentidos en la construcción de nuevas estructuras mentales, y, segundo la expresión de conocimientos e ideas. Al hacer uso de una articulación complementaria entre estas representaciones el estudiante puede ajustar sus conocimientos para efectuarlos más amenamente, de hecho, la coordinación de los modos de representación enfocados en los contextos gráficos y algebraicos pueden aplicarse para resolver problemas, lo cual genera una conexión en los estudiantes influidos por las experiencias previas.

En ese contexto, es relevante y necesario hacer un enfoque en el tránsito de las representaciones para los problemas de optimización, ya que permite diferentes abstracciones y significados que derivan en un mejor aprendizaje en los estudiantes. Para Sánchez et al. (2008), la comprensión de un conocimiento se dimensiona a través de la comparación de definiciones equivalentes al conocimiento, sus representaciones y sus propiedades (p. 275). De este modo, las representaciones no solo complementan el aprendizaje, sino que se constituyen en un requisito previo para comprender plenamente los conceptos matemáticos, actuando como herramientas cognitivas que median la construcción del significado. Por ejemplo, el uso coordinado de representaciones gráficas y algebraicas permite abordar un problema desde distintos enfoques, cada uno de los cuales contribuye a formar imágenes mentales distintas pero complementarias del objeto matemático en cuestión.

El objetivo no es visualizar las representaciones como herramientas separadas, sino como una articulación, puesto que inicialmente se le da un sentido a una representación, que después se transforma en otro tipo de representación y se le asigna otro sentido, para el aprendizaje significativo es imprescindible que estos distintos sentidos se estructuren conjuntamente para constituir las representaciones de un mismo objeto matemático. Por ello, para fortalecer el aprendizaje matemático es importante que los docentes propongan actividades que fomenten la conversión entre distintos registros de representación, articulando lo gráfico, lo algebraico, lo verbal y lo numérico. Las actividades, centradas en la visualización y transformación de representaciones, permiten que los estudiantes construyan significados y expresen el pensamiento matemático mediante el lenguaje, lo cual contribuye significativamente a una comprensión más profunda y flexible del conocimiento (Gatica & Ares, 2012).

En definitiva, las representaciones son esenciales en el aprendizaje de las matemáticas, pues permiten a los estudiantes expresar sus ideas, procesos y comprensiones sobre un objeto matemático. La externalización facilita la construcción de representaciones mentales, es decir, estructuras internas que organizan y dan significado al conocimiento adquirido (Caicedo, 2013). Por tanto, las representaciones ofrecen distintas perspectivas que fomenta un mejor entendimiento al problema desde diferentes ángulos para ir promoviendo las representaciones internas.

Adicionalmente, las representaciones favorecen el desarrollo de la flexibilidad cognitiva, entendida como la capacidad de abordar un mismo problema desde distintas perspectivas y de adaptarse a diversas estrategias de resolución de acuerdo a las nuevas demandas (Santana et al. 2022). Así, los estudiantes al utilizar diferentes registros pueden comparar enfoques, seleccionar el más adecuado y comprender mejor las relaciones entre los conceptos implicados, siendo un proceso que fortalece la conexión entre conocimientos previos y nuevos.

En ese sentido, el tránsito entre distintos registros de representación no solo amplía la comprensión de los problemas de optimización, sino que permite a los estudiantes reconocer la misma situación desde perspectivas complementarias. Por ello, la posibilidad de interpretar un problema utilizando expresiones algebraicas, gráficas, geométricas o verbales ofrece múltiples caminos para su resolución y enriquece la construcción del significado matemático.

Teniendo en cuenta que las representaciones son necesarias en la comprensión de los problemas de optimización, se enfatiza en su enseñanza como un componente del pensamiento matemático. La optimización permite abordar situaciones del mundo real que requieren tomar decisiones eficientes, como distribuir recursos limitados, reducir tiempos de espera, diseñar rutas más cortas o lograr el mejor rendimiento en un proceso. En diferentes contextos, tales como la economía, la logística o incluso la vida cotidiana, demandan habilidades para interpretar datos, modelar relaciones matemáticas y evaluar posibles soluciones. Por ello, la enseñanza de la optimización no se limita a la aplicación de fórmulas, pues se basa en estrategias didácticas que integren el tránsito entre distintos registros de representación para que los estudiantes comprendan el procedimiento, el sentido del problema y su conexión con situaciones reales.

La optimización matemática es un proceso mediante el cual se busca encontrar la mejor solución posible a un problema, dentro de un conjunto de condiciones dadas. Según Martínez (2021), consiste en maximizar o minimizar una determinada cantidad a partir de un modelo matemático que representa una situación real. Los autores refieren que la enseñanza de la optimización promueve el aprendizaje de contenidos matemáticos y contribuye al desarrollo de competencias transversales. A través de la exploración, la experimentación y la evaluación de estrategias, los estudiantes fortalecen su capacidad para formular conjeturas, generalizar resultados, argumentar sus decisiones y reflexionar sobre sus procesos de resolución.

En la eficiencia y productividad, por ejemplo, la optimización permite maximizar uso de recursos, reduciendo costos y optimizando los tiempos. Por otro lado, en toma de decisiones es una herramienta que ayuda a evaluar múltiples escenarios y seleccionar la mejor posibilidad a través de datos y representaciones. Allí entra en juego el análisis de máximos y mínimos por la eficiencia en diversos contextos, como en la gestión financiera al maximizar ingresos y minimizar costos, optimizando el rendimiento, e incluso en situaciones como la salud maximizando la efectividad de tratamientos y gestión humana para mejorar la vida del paciente.

Siendo así, GeoGebra se presenta, entonces, como un recurso tecnológico confiable en el aprendizaje matemático y del cálculo, apoyando y mejorando las habilidades de razonamiento de los educandos para ser sujetos resolutivos y comunicativos en el mundo matemático (Yuni & Rachmani, 2019). Los profesores por su parte deben fortalecer y optimizar la comprensión, el interés y las habilidades de los estudiantes, lo cual implica del uso de tecnología estratégicamente integrada y correcta.

Este mecanismo resulta significativo en el contexto del aprendizaje matemático porque permite trabajar con representaciones semióticas basadas en signos y símbolos que tienen como propósito comunicar ideas matemáticas y construir conocimiento. Las representaciones facilitan el pensamiento abstracto mediante la visualización y manipulación de conceptos como ángulos, funciones o rectas, es decir, gracias a la representación simbólica, es posible operar con objetos matemáticos con imágenes mentales (Tamayo, 2006).

En este sentido, dada la importancia de la enseñanza de la optimización en matemáticas y el potencial de GeoGebra como herramienta educativa, existe una necesidad clara de desarrollar propuestas didácticas específicas que aborden el tránsito de los registros de las representaciones semióticas en este contexto; puesto que esta puede mejorar significativamente el proceso de enseñanza y aprendizaje de la optimización en matemáticas, promoviendo un mayor entendimiento de los conocimientos y habilidades matemáticas en los estudiantes.

En resumen, la investigación propuesta busca abordar una necesidad importante en el campo de la educación matemática al desarrollar una propuesta didáctica innovadora y efectiva para la enseñanza de la optimización utilizando GeoGebra, con el objetivo de mejorar la comprensión y el aprendizaje de los estudiantes de educación media, específicamente en la resolución de problemas de optimización.

1.3 Objetivos

A partir del problema identificado y la justificación previamente expuesta, se establecen a continuación los objetivos que guían el desarrollo de esta investigación. Estos objetivos, tanto el general como los específicos, tienen la finalidad de orientar de manera clara y precisa el enfoque del estudio, determinando las metas a alcanzar y los pasos necesarios para abordar la problemática planteada.

1.3.1 Objetivo general

Diseñar una propuesta didáctica que promueva el tránsito de los registros de representaciones semióticas de los objetos matemáticos relacionados con la resolución de problemas de optimización, mediante el uso efectivo del software GeoGebra en estudiantes de educación media.

1.3.2 Objetivos específicos

Realizar una sistematización teórica de las representaciones semióticas en los procesos cognitivos de comprensión en matemáticas en particular los asociados con lo variacional.

Diseñar tareas cognitivas que permitan el tránsito de los registros de las representaciones semióticas en problemas de optimización, por medio del software dinámico GeoGebra.

Evaluar la pertinencia de las actividades cognitivas propuestas para la comprensión de problemas de optimización, a partir de la idoneidad didáctica.

1.4 Estado del arte

La enseñanza de las matemáticas, en especial del cálculo diferencial, ha enfrentado múltiples desafíos, particularmente en lo que respecta la aplicación de conceptos abstractos (como la derivada) a situaciones prácticas de optimización (López, 2024). En respuesta a estas dificultades, se han desarrollado diversas investigaciones que proponen enfoques pedagógicos innovadores, muchos de ellos incorporando herramientas tecnológicas que permiten visualizar y modelar conceptos complejos.

En este contexto, se ha realizado una revisión de estudios centrados en la enseñanza de la optimización mediante el uso del software GeoGebra. Aunque no todos los trabajos hacen de esta herramienta su eje central, sí se reconoce su valor como recurso para facilitar la comprensión de funciones y sus propiedades, así como para apoyar el tránsito entre distintos registros de representación semiótica (gráfico, algebraico, numérico y verbal). Estos registros, entendidos como sistemas de signos que permiten representar un mismo objeto matemático de diferentes formas (Duval, 1999), son importantes para el aprendizaje, pues favorece una comprensión del contenido matemático.

Así, estas investigaciones permiten analizar y sistematizar las metodologías utilizadas en la enseñanza de problemas de optimización, poniendo especial énfasis en las herramientas necesarias para que los estudiantes tengan una comprensión más profunda y aplicada de los conocimientos matemáticos.

Alonso et al. (2017), en su artículo *Pautas para implementar la enseñanza de la Matemática a través de la resolución de problemas*, destacan la relevancia de enseñar matemáticas mediante la resolución de problemas. Más allá de transmitir contenidos, se busca desarrollar habilidades cognitivas, es decir, el pensamiento autónomo, la reflexión y la capacidad de aplicar conocimientos en la cotidianidad, promovido mediante la formulación y resolución de problemas. Este enfoque se basa en una perspectiva socio-constructivista, que enfatiza la interacción entre pares y la guía del docente a través de preguntas orientadoras, con el fin de estimular el pensamiento crítico.

En ese marco, los autores proponen la aplicación del modelo de resolución de problemas de Polya, estructurado en cuatro etapas: comprensión del problema, búsqueda de estrategias, ejecución de la solución y análisis del proceso. Para ilustrarlo, presentan el clásico problema de los dos postes de distinta altura, ubicados a 40 metros de distancia, y se plantea la pregunta: ¿en qué punto del terreno debe ubicarse el anclaje del cable para que la suma de sus longitudes sea mínima? Este problema, ampliamente utilizado en la enseñanza de la optimización, tiene la ventaja de permitir una representación visual clara, un modelado funcional, y un tratamiento tanto geométrico como analítico.

La resolución de este problema, según Alonso et al. (2017), se organiza en distintas fases: 1) comprensión del problema, donde los estudiantes identifican las condiciones del problema y los elementos relevantes para determinar la posición óptima del punto de anclaje; 2) la representación del problema gráficamente y con expresiones matemáticas que facilitan su análisis formal; 3) la búsqueda de soluciones, aquí exploran diferentes estrategias de solución; 4) ejecución y análisis, se aplican conocimientos de cálculo, como el uso de derivadas, para hallar la solución óptima. Aunque reconocen que en este caso la solución geométrica resulta más sencilla, el uso del cálculo permite fortalecer habilidades analíticas y validar los resultados obtenidos.

Entre los principales resultados del estudio, se destaca que la enseñanza basada en la resolución de problemas contribuye al desarrollo de habilidades técnicas y metacognitivas, donde los estudiantes aprenden a reflexionar sobre sus propios procesos de pensamiento, a plantear conjeturas y a analizar críticamente sus soluciones. Asimismo, adquieren herramientas heurísticas como la elaboración de esquemas gráficos, la descomposición del problema en subproblemas y la reformulación de preguntas, aspectos clave para enfrentar situaciones complejas en diversos contextos.

De esa manera, los autores subrayan que la resolución de problemas crea un entorno de aprendizaje activo y colaborativo, en el cual los estudiantes pueden compartir ideas, contrastar enfoques y construir conocimiento colectivamente. Esto contribuye no solo a una mejor comprensión de los conceptos matemáticos, sino también a una actitud más positiva hacia las matemáticas y su aplicabilidad en la vida cotidiana.

El artículo de Hernández (2012), centrado en los procesos cognitivos involucrados en la resolución de problemas clásicos de máximos y mínimos, tuvo como objetivo principal las dificultades cognitivas que enfrentan estudiantes de Ingeniería Civil al abordar problemas de optimización en el contexto del cálculo diferencial. La investigación adoptó un enfoque cualitativo de estudio de casos, con entrevistas a cinco estudiantes y cinco profesores. Hernández se apoyo en referentes teóricos como la entrevista clínica de Piaget, las fases del modelo de Polya y la teoría de la Modificabilidad Cognitiva de Feuerstein.

En su desarrollo, Hernández (2012), propuso una serie de problemas clásicos, entre ellos el de la minimización de cable entre dos postes de diferentes alturas, siendo un recurso frecuente en la enseñanza de optimización por su claridad geométrica y potencial de modelación funcional. Su recurrencia evidencia que se trata de un contexto didáctico eficaz para introducir la derivada y explorar el comportamiento de funciones bajo condiciones específicas.

El análisis de las respuestas de los estudiantes permitió clasificar las dificultades en tres fases: en la fase de entrada, los estudiantes mostraron impulsividad y una percepción poco estructurada del problema, con escasa orientación espacial y temporal; en la fase de elaboración, se evidenciaron dificultades para distinguir información relevante, organizar datos y aplicar razonamiento lógico; y en la fase de salida, se repitieron conductas impulsivas, con intentos de solución por ensayo y error sin justificación matemática.

Las fallas observadas reflejan limitaciones en diversas habilidades cognitivas, entre ellas, se destaca la falta de planificación, entendida como la capacidad de organizar mentalmente los pasos necesarios antes de ejecutar una solución, lo cual lleva a respuestas impulsivas o desorganizadas. Se evidencian dificultades en la inferencia lógica, es decir, en la habilidad para establecer relaciones entre datos, deducir consecuencias y construir argumentos coherentes a partir de premisas dadas. Finalmente, la escasa formulación de hipótesis indica una carencia en la capacidad de anticipar posibles soluciones, hacer conjeturas o prever los resultados esperados de ciertos procedimientos. Estas debilidades cognitivas no solo obstaculizan el proceso de resolución, sino que también limitan la comprensión de los conceptos involucrados y restringen la posibilidad de transferir lo aprendido a nuevos contextos.

A partir de estos hallazgos, Hernández (2012), concluye que es necesario fortalecer las estrategias didácticas en la enseñanza del cálculo diferencial, enfatizando el desarrollo de capacidades metacognitivas que permitan a los estudiantes abordar los problemas de manera más estructurada y lógica. También se resalta la importancia de una mediación docente, que guíe a los estudiantes en la comprensión de los problemas y en la organización de sus procesos de solución.

Complementariamente, Ureña et al. (2022), en su estudio *Los problemas de optimización en el cálculo diferencial de una variable*, abordan la optimización como un componente esencial en la formación de estudiantes de ingeniería y ciencias aplicadas. Destacan que, a pesar de la relevancia de estos contenidos, los estudiantes enfrentan obstáculos persistentes, entre ellos el dominio limitado del lenguaje matemático, esencial para comprender y resolver este tipo de problemas. Según De Oliveira y Cheng (2011, como se citó en Ureña et al., 2022), esta dificultad responde a la naturaleza abstracta y precisa del lenguaje matemático.

Además del lenguaje, Ureña et al. (2022), identifican que la comprensión incompleta de las funciones limita la capacidad de los estudiantes para modelar situaciones de optimización. Esta deficiencia impide transitar adecuadamente entre diferentes registros de representación semiótica, lo que dificulta la conversión de un problema verbal a una función algebraica o su interpretación gráfica. En este sentido, los autores destacan que, sin una comprensión funcional sólida, es complejo establecer conexiones entre registros y aplicar estrategias de resolución efectivas.

Para abordar estas dificultades, el estudio propone un ensayo didáctico experimental con dos grupos de estudiantes. Al grupo control se le impartió la clase con metodología tradicional; al grupo experimental se le ofrecieron orientaciones didácticas centradas en el uso del lenguaje matemático, el cambio entre registros semióticos y el apoyo de herramientas tecnológicas como GeoGebra. Se trabajaron ejemplos como el clásico problema de dos postes (uno de 6 metros y otro de 15 metros, separados por 20 metros) y se les planteó la minimización de la longitud del tensor necesario para unir sus extremos a un punto común en el suelo (Ureña et al., 2022, p. 325).

La propuesta metodológica incluyó plantear múltiples procedimientos de resolución, fomentar la argumentación, exponer buenas prácticas en el uso del lenguaje matemático, entrenar cambios entre registros y utilizar asistentes tecnológicos para modelar los problemas. De manera significativa, el grupo que trabajó con estas orientaciones mostró mejoras en el rendimiento, especialmente en su capacidad para interpretar representaciones gráficas, identificar estructuras funcionales y justificar sus elecciones con base en conceptos matemáticos.

El estudio concluye que integrar herramientas como GeoGebra en el diseño de tareas de optimización, junto con una didáctica centrada en la modelación y el cambio de registros, contribuye notablemente a mejorar el desempeño de los estudiantes. Esta conclusión coincide con lo encontrado por Hernández (2012), en cuanto a la necesidad de una enseñanza que vaya más allá de la repetición de procedimientos y que fortalezca procesos de comprensión y razonamiento lógico.

Además, el uso recurrente del problema de los postes en distintos estudios, tanto en Hernández (2012) como en Ureña et al. (2022), no debe entenderse como mera repetición, sino como una muestra de su utilidad pedagógica. Este problema permite representar la situación gráficamente, modelarla algebraicamente y analizarla desde diferentes registros, lo que facilita una enseñanza articulada entre lo concreto y lo abstracto.

En suma, ambos estudios destacan que las principales dificultades en la enseñanza de la optimización en cálculo diferencial están relacionadas con el manejo del lenguaje matemático, la comprensión funcional y la conversión entre registros de representación. La incorporación de herramientas tecnológicas como GeoGebra, cuando está bien diseñada y fundamentada, se presenta como una alternativa didáctica eficaz para superar estas barreras. Esto abre oportunidades para futuras investigaciones que analicen sistemáticamente cómo los estudiantes articulan distintos registros semióticos cuando usan GeoGebra para resolver problemas de optimización, y cómo se pueden diseñar tareas que fortalezcan estas transiciones desde una perspectiva metacognitiva.

En el artículo *diagnóstico sobre el reconocimiento de la variación con estudiantes de primer semestre de matemáticas aplicadas* de Mojica y Bueno (2009), se tiene como objetivo principal diagnosticar las características del razonamiento de estudiantes de primer semestre de matemáticas aplicadas en la identificación y comprensión de la variación, un conocimiento crucial en la enseñanza del cálculo y la modelación matemática. El diagnóstico se enfoca en cómo estos estudiantes enfrentan problemas de optimización y su habilidad para identificar variaciones en diferentes contextos y representaciones semióticas.

La metodología propuesta por Mojica y Bueno (2009), se basa en la aplicación de un examen diagnóstico a 28 estudiantes, quienes fueron evaluados en siete problemas diferentes, cada uno diseñado para identificar si los estudiantes podían reconocer la existencia de variación en contextos gráficos, algebraicos y contextuales. Los problemas se presentaron en diferentes formatos y se pedía a los estudiantes que justificaran sus respuestas. Por ejemplo, presenciaron el siguiente ejercicio

> La distancia entre dos postes que se emplean en las instalaciones telefónicas es de 10 metros […] La longitud de los postes es de tres y de cinco metros. A manera de soporte, un cable que une la parte superior de ambos se sujetará a un punto P en tierra, localizado en el segmento que une los dos postes. A. ¿La longitud total del cable es variable? B. ¿La longitud total es constante? (p. 14).

Las respuestas se categorizaron en cinco niveles: no entendió el enunciado, razonamiento circular, percepción sin argumentación, argumentación matemática inválida y argumentación matemática válida (Mojica & Bueno, 2009). Estas categorías permitieron analizar en detalle el tipo de razonamiento utilizado por los estudiantes y detectar patrones en sus errores y aciertos.

Los resultados generales mostraron que el rendimiento promedio de los estudiantes en la identificación de la variación fue bajo, con un 42% de respuestas correctas. La mayoría de los estudiantes presentaron dificultades significativas, no solo para resolver los problemas, sino también para comunicar y justificar adecuadamente sus respuestas (Mojica & Bueno, 2009). Los autores concluyeron que el bajo rendimiento de los estudiantes sugiere una deficiencia en la enseñanza y comprensión de los conocimientos relacionados con la variación y la optimización, esenciales en las matemáticas aplicadas. Los estudiantes tienden a apoyarse en razonamientos perceptuales o argumentaciones circulares, sin desarrollar un dominio adecuado de los recursos matemáticos necesarios para resolver estos problemas (2009).

Este estudio pone en evidencia que, si bien los estudiantes pueden enfrentar problemas reales de optimización, muchos carecen de herramientas conceptuales y cognitivas para comprender los fenómenos de cambio. Se concluye que es necesario replantear la enseñanza de la optimización, promoviendo un aprendizaje que priorice la argumentación, la justificación y el tránsito entre representaciones. En este contexto, es pertinente recordar que los registros de representación semiótica son formas distintas de expresar un mismo objeto matemático. Su coordinación y conversión son fundamentales para lograr una comprensión profunda del conocimiento matemático (Duval, 1999).

En una línea complementaria, Masih y Monferrato (2012), centran su investigación en el cálculo diferencial, especialmente en las carreras de ingeniería debido a su amplia aplicación en la resolución de problemas prácticos, como la optimización. En el trabajo de Abdel Masih y Monferrato (2012), se explora el uso de simulaciones con el software Wolfram Mathematica para enseñar conocimientos relacionados con la derivada y su aplicación en la resolución de problemas de optimización. Este enfoque pedagógico se ha mostrado prometedor para mejorar la comprensión y retención de estos conocimientos entre los estudiantes.

Los autores muestran como la metodología tradicional desde la enseñanza de problemas de optimización en cálculo diferencial ha dependido de métodos analíticos, donde los estudiantes aplican las reglas de derivación para encontrar los puntos críticos de una función que representan soluciones óptimas. Sin embargo, la integración de herramientas tecnológicas, como las simulaciones, ha comenzado a ganar terreno como una metodología que no sólo complementa, sino que también transforma la experiencia de aprendizaje (Masih & Monferrato, 2012).

Para ello, se implementaron simulaciones interactivas que permiten a los estudiantes visualizar cómo los cambios en los parámetros de un problema afectan la solución. Este enfoque no solo refuerza la comprensión teórica, sino que también proporciona un medio práctico para experimentar con problemas complejos sin requerir cálculos manuales extensivos. Para demostrar su resultado óptimo, Masih y Monferrato (2012), presentan ejemplos de problemas de optimización como:

> Dos postes, uno de h1 pies y el otro de h2 pies, se encuentran a dos pies de distancia. Se sostienen por dos cables, conectados a una sola estaca, desde el nivel del suelo hasta la parte superior de cada poste. ¿Dónde debe colocarse la estaca para que se utilice la menor cantidad de cable? (p. 11)

Este tipo de problema, recurrente también en otros estudios como los de Hernández (2012) y Mojica y Bueno (2009), se ha consolidado como un recurso didáctico eficaz porque permite representar visualmente la situación, modelarla algebraicamente y analizarla gráficamente, promoviendo el cambio entre registros y el desarrollo del pensamiento funcional.

A través del uso del teorema de Pitágoras y derivadas, los estudiantes pueden explorar distintas configuraciones del problema, verificar hipótesis y comprender las condiciones que conducen a soluciones óptimas. Las simulaciones no solo reducen la carga de cálculo manual, sino que también fortalecen la capacidad para construir modelos matemáticos propios, facilitando una comprensión más sólida y aplicada.

Según Masih y Monferrato (2012), la introducción de simulaciones en cursos de cálculo disminuyó significativamente la tasa de deserción, un problema común en asignaturas matemáticas complejas. Los estudiantes no solo mostraron una mejor comprensión de los conocimientos teóricos, sino que también desarrollaron habilidades en la creación de modelos matemáticos propios, verificando sus hipótesis a través de las simulaciones.

De esto se puede inducir que este enfoque interactivo y visual proporciona a los estudiantes una manera más intuitiva de abordar problemas que tradicionalmente dependen de métodos analíticos, haciendo que el aprendizaje sea más accesible y menos abstracto. Además, las simulaciones permiten una exploración más profunda de cómo varían las soluciones óptimas con cambios en los parámetros, algo que no siempre es evidente con métodos tradicionales.

La experiencia de Masih y Monferrato (2012) sugiere que este enfoque puede ser altamente efectivo para reducir la deserción y mejorar los resultados académicos en cursos de matemáticas avanzadas en ingeniería. Este sitúa la investigación dentro del contexto de una tendencia emergente que combina la tecnología con la enseñanza tradicional, subrayando la importancia de metodologías didácticas innovadoras que permitan a los estudiantes desarrollar una comprensión más profunda y aplicable de los conocimientos matemáticos.

En conjunto, estos estudios subrayan una necesidad compartida: mejorar la enseñanza de la optimización mediante estrategias que favorezcan el razonamiento lógico, la interpretación gráfica, la formulación de hipótesis y la exploración dinámica de soluciones. La presencia recurrente del problema de los postes en contextos diversos sugiere que su uso no solo responde a su claridad geométrica, sino también a su potencial para fomentar la articulación entre registros de representación, aspecto central para un aprendizaje profundo. Finalmente, aunque herramientas como GeoGebra no son el foco central en todos los trabajos revisados, su potencial como mediador semiótico permanece como una línea de investigación promisoria, especialmente si se articula con propuestas didácticas fundamentadas y orientadas al análisis sistemático del cambio de representaciones en la resolución de problemas de optimización.

En esa misma línea, Ever Cruzado (2018), propone el uso de herramientas tecnológicas como recurso didáctico para abordar las dificultades que presentan los estudiantes, particularmente en la resolución de problemas de optimización con funciones reales de variable real. En su estudio, realizado con estudiantes de ingeniería, se analiza cómo estos abordan este tipo de problemas utilizando el software GeoGebra, destacando que los contenidos de optimización constituyen una aplicación crucial de la derivada, cuya comprensión es clave en la formación matemática.

El objetivo principal del estudio fue analizar cómo los estudiantes movilizan distintos registros de representación semiótica (gráfico, algebraico, figural y verbal) al resolver problemas de optimización. Cabe destacar que los registros de representación semiótica, según Duval (1999), se refieren a los distintos sistemas de signos (como gráficos, ecuaciones, palabras, tablas) mediante los cuales se representan y comunican ideas matemáticas. El tránsito entre estos registros, es decir, su tratamiento y conversión, es esencial para la comprensión profunda del objeto matemático.

Cruzado (2018), reporta que los estudiantes suelen presentar dificultades al plantear la función objetivo, un paso crucial en la resolución de problemas de optimización. También identifica errores frecuentes en la interpretación de gráficos y en la aplicación de conocimientos previos, lo que conduce a resultados incorrectos. Estas deficiencias están asociadas a la falta de comprensión del criterio de la primera y segunda derivada, fundamentales para identificar extremos de una función. Según el autor, estas dificultades pueden reducirse mediante un enfoque didáctico que integre de manera efectiva los distintos registros de representación y promueva su coordinación.

El autor implementó un estudio experimental en el que analiza cómo los estudiantes de ingeniería coordinan los diferentes registros de representación semiótica al resolver problemas de optimización, utilizando el software GeoGebra como herramienta de apoyo. Así, se presentaron dos problemas de optimización en los que era necesario movilizar el conocimiento de derivada de funciones reales de variable real. El autor empleó aspectos de un estudio de caso para llevar a cabo este análisis.

El proceso experimental incluyó la presentación de los problemas de optimización en formato de texto (lengua natural), con el objetivo de que los estudiantes realicen conversiones entre los distintos registros de representación (figural, algebraico y gráfico). GeoGebra se utilizó para facilitar las representaciones gráficas y algebraicas de las funciones asociadas a los problemas de optimización. Para su objetivo, el autor presentó a los estudiantes una ficha que se organiza en cinco ítems para orientar al estudiante a seguir un procedimiento adecuado para resolver problemas de optimización con GeoGebra como herramienta de apoyo.

Entre los problemas, Cruzado (2018), planteó "Dos postes de 10 m y 12 m distan entre sí 30 m. Se desea tender un cable que una un punto del suelo (ubicado entre los postes) con los extremos superiores de los postes" (p. 60). A partir de este ejercicio, se pidió a los estudiantes determinar una expresión matemática que modelara la longitud total del cable en función de la distancia al punto de anclaje. En esta tarea, se evidenciaron dificultades iniciales en la coordinación entre los registros gráfico y algebraico, sobre todo en el tratamiento (manipulación dentro de un mismo registro) y en la conversión (traslado de información entre registros). Sin embargo, con la práctica y el uso del software, se observó una mejora notable en la capacidad de los estudiantes para conectar representaciones y formular una solución coherente.

Cruzado concluye que el uso de GeoGebra favorece significativamente la coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica en problemas de optimización. Aunque al inicio los estudiantes presentan errores, la mediación tecnológica facilita el tránsito entre registros y permite una comprensión más integrada del conocimiento matemático, especialmente en relación con la derivada.

Herrera (2012), también aborda los problemas de optimización, enfocándose en aquellos vinculados a la minimización de costos. Su propuesta de intervención gira en torno a la implementación de GeoGebra como recurso para mejorar la transición entre registros de representación en la enseñanza del cálculo diferencial. El autor diseñó una secuencia de actividades para que los estudiantes abordaran problemas de optimización que requieren cálculos complejos, como aquellos que implican derivadas de funciones con raíces.

Uno de los ejercicios propuestos consistía en encontrar la longitud mínima de un cable que une la parte superior de dos postes de diferente altura con un punto de anclaje en el suelo. Esta situación permite trabajar simultáneamente representaciones algebraicas, gráficas y verbales. Los resultados del estudio mostraron una mejora en la comprensión y en la capacidad para transitar entre distintos registros, especialmente cuando los estudiantes podían visualizar la situación geométrica con GeoGebra.

Esta propuesta sugiere que la combinación de métodos tradicionales con herramientas tecnológicas como GeoGebra puede mejorar significativamente la enseñanza y aprendizaje de problemas de optimización en la educación matemática. Esta integración no solo ayuda a resolver problemas complejos, sino que también facilita el desarrollo de habilidades cognitivas fundamentales en el pensamiento matemático avanzado.

En línea, Manuel Trigo y David Benítez (2003), analizaron el uso de recursos tecnológicos en la resolución de problemas de optimización con estudiantes de bachillerato. Su estudio destaca la importancia de emplear múltiples representaciones (gráfica, algebraica, geométrica y dinámica) para construir modelos matemáticos. En esta investigación, los estudiantes resolvieron problemas con apoyo de Excel y software interactivo, trabajando individual y colaborativamente.

El análisis se centró en cómo los estudiantes emplearon distintas representaciones para resolver un problema de optimización relacionado con la minimización de la longitud de un cable que conecta dos postes de diferente altura (Benítez & Trigo, 2003). El problema se abordó desde diferentes perspectivas: visual, algebraica, geométrica y dinámica, con el objetivo de encontrar la solución óptima.

El problema inicial que se enuncia se trata de la distancia de dos postes de 10m, teniendo una longitud de cada poste de 3 a 5m, para soporte se necesita un cable que una la parte superior de dos postes sujetados a punto tierra ¿Dónde debe situarse el punto sobre la tierra de tal manera que la longitud del cable sea la menor? (Trigo & Benítez, 2003).

Los resultados obtenidos por Trigo y Benítez (2003), mediante distintas aproximaciones, comenzaron con la tabulación y la representación gráfica en Excel para organizar los datos relacionados con las posibles posiciones del punto de anclaje del cable en el suelo. Mediante una tabla, calcularon la longitud del cable para diferentes posiciones del punto de anclaje y luego refinaron estos cálculos utilizando valores decimales. Esta metodología les permitió identificar que la longitud mínima del cable se obtenía cuando el punto de anclaje estaba a aproximadamente 3.75 metros del poste más bajo.

Después de construir la tabla, los estudiantes generaron una gráfica que representaba la longitud del cable en función de la posición del punto de anclaje. Esto les permitió observar que, cuando el punto estaba más cerca de uno de los postes, la longitud total del cable aumentaba, confirmando visualmente la solución obtenida mediante la tabla (Trigo & Benítez, 2003). De allí, proviene la aproximación algebraica para la longitud del cable, expresándose mediante una calculadora, que permitió identificar el valor mínimo de la longitud del cable. Posteriormente, mediante la aproximación Geométrica se utilizó la semejanza y congruencia de triángulos para llegar a la solución.

Finalmente, se hizo uso del software dinámico que permitió a los estudiantes visualizar cómo la longitud del cable cambiaba a medida que el punto de anclaje se movía. Este método les permitió explorar de manera interactiva las relaciones geométricas y funcionales del problema, reforzando el entendimiento de la optimización.

Así, Trigo y Benítez (2003) demostraron que el uso de herramientas tecnológicas y múltiples representaciones en la enseñanza de matemáticas no solo facilita la resolución de problemas complejos como la optimización, sino que también promueve un aprendizaje más profundo al conectar diferentes áreas de las matemáticas (geometría, álgebra, cálculo). Los estudiantes fueron capaces de encontrar soluciones más precisas y generar conjeturas significativas al emplear estas metodologías.

Este enfoque interdisciplinario sugiere que la educación matemática puede beneficiarse enormemente de la integración de tecnologías y métodos de enseñanza que fomenten la exploración y el pensamiento crítico, permitiendo a los estudiantes desarrollar competencias matemáticas más robustas y aplicables en contextos reales.

Por último, Teresa Dávila (2010), en su investigación *La derivada a partir de problemas de optimización en Ambientes dinámicos creados con GeoGebra* se centra en el desarrollo de una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada mediante la resolución de problemas de optimización en ambientes dinámicos creados con el software GeoGebra. Este enfoque se enfoca en estudiantes de ingeniería, un grupo que a menudo enfrenta dificultades al conectar los conocimientos abstractos del cálculo con problemas prácticos de su campo profesional.

La metodología desarrollada en esta tesis se basa en una secuencia de actividades diseñadas para promover la comprensión de la derivada como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto. Allí, se incluyen problemas de optimización relacionados con situaciones reales y prácticas, afines al campo de la ingeniería, para que los estudiantes pudieran aplicar los conocimientos de cálculo diferencial en contextos familiares (Dávila, 2010). En ese caso, la autora expone que el uso de GeoGebra permitió la creación de simulaciones dinámicas donde los estudiantes podían manipular variables y observar en tiempo real cómo afectaban las soluciones de los problemas de optimización.

En uno de los problemas se pidió a los estudiantes encontrar la ubicación óptima para una estación de bombeo que minimiza la distancia total necesaria para conectar dos puntos en un terreno. Mediante la manipulación de puntos en GeoGebra, los estudiantes visualizaron las trayectorias posibles y utilizaron la derivada para calcular la posición que minimiza la distancia total.

Teresa Dávila (2010), implementó la propuesta didáctica con resultados positivos, donde los estudiantes lograron comprender de manera más profunda el conocimiento derivado al aplicarlo en contextos prácticos y visuales, lo que les permitió construir significados más ricos y aplicables en su campo. Adicionalmente, se comprobó que el uso de ambientes dinámicos incrementó la participación y motivación de los estudiantes, quienes mostraron una actitud más positiva hacia el aprendizaje del cálculo diferencial.

Así, la autora confirma la eficacia de integrar herramientas tecnológicas como GeoGebra en la enseñanza de la optimización en el cálculo diferencial. Esta integración no solo facilita la comprensión teórica de la derivada, sino que también la hace más accesible y relevante para estudiantes de ingeniería, mejorando su capacidad para resolver problemas complejos en contextos reales.

Este enfoque representa un avance significativo en la didáctica del cálculo, destacando la importancia de utilizar contextos aplicados y herramientas interactivas para construir un aprendizaje significativo y duradero.

El análisis de las investigaciones revisadas confirma que la integración de herramientas tecnológicas en la enseñanza de problemas de optimización, como GeoGebra, ofrece beneficios significativos en la comprensión y aplicación de conocimientos matemáticos complejos. Los estudiantes no solo mejoran su capacidad para resolver problemas de optimización, sino que también desarrollan un enfoque más intuitivo y crítico hacia el aprendizaje de las matemáticas.

Además, la implementación de estas tecnologías en el aula promueve una mayor participación y motivación entre los estudiantes, lo que se traduce en un aprendizaje más significativo y duradero. Las metodologías que combinan enfoques tradicionales con herramientas tecnológicas dinámicas han demostrado ser efectivas para superar las dificultades cognitivas asociadas con la optimización y la derivada, validando la necesidad de un enfoque pedagógico que integre múltiples representaciones y contextos aplicados.

A partir de la revisión teórica, se evidenció que en todas las investigaciones los estudiantes enfrentan dificultades para resolver, comunicar y justificar correctamente los problemas de optimización a través de las representaciones semióticas. En esta investigación, se adoptará un enfoque basado en la resolución de problemas desde una perspectiva socio-constructivista, donde la interacción entre estudiantes y profesores, guiada por el docente, fomente un aprendizaje colaborativo y construido en conjunto.

El proceso seguirá la estrategia de Polya (Citado de Quiñones y Huiman, 2022), que incluye: la comprensión del problema, su representación mediante, la búsqueda de soluciones y la ejecución y análisis de los resultados. Se priorizará la instrucción mediante orientaciones sólidas, que contemplan proponer diferentes procedimientos de resolución, instruir a los estudiantes en diversos recursos para resolver problemas, exponer el uso adecuado del lenguaje matemático y entrenarlos en la transición entre registros semióticos con herramientas como GeoGebra. El uso de simulaciones y ejercicios prácticos transformará la experiencia de aprendizaje, facilitando una mayor comprensión y aplicación de los conocimientos matemáticos.

CAPÍTULO 2: Marco teórico

En el presente capítulo se hace una revisión teórica y conceptual sobre los problemas de optimización mediante las representaciones semióticas y la tecnología (GeoGebra) como estrategia pedagógica. Teniendo en cuenta que la educación matemática contemporánea, las representaciones semióticas, la tecnología y los problemas de optimización juegan roles fundamentales en la facilitación del aprendizaje y la enseñanza.

De esta manera, el capítulo revisa, expone y explica los conocimientos matemáticos mediante veintisiete (27) artículos que establecen y expresan sus resultados respecto a los distintos conocimientos aquí expuestos. Estos autores en general, mediante su énfasis en la enseñanza de los problemas de optimización y las dificultades basadas en las representaciones semióticas ahondaron la tecnología como medio esencial para revolucionar la forma en que se enseña y se aprende en las matemáticas.

Así, herramientas informáticas como GeoGebra proporcionan un entorno dinámico donde los estudiantes pueden explorar y manipular representaciones matemáticas en tiempo real. Además, de facilitar el aprendizaje de todo tipo de representaciones semióticas para hacer uso efectivo de la optimización. Por tanto, el capítulo empezara explicando las representaciones semióticas, para luego dar paso a la tecnología y finalizar con los problemas de optimización.

2.1 Representaciones semióticas

Comprender las matemáticas requiere de construir significados, establecer relaciones y comunicar ideas, implicando mucho más que memorizar fórmulas o seguir procedimientos mecánicos. Para ello, los estudiantes necesitan recurrir a diferentes representaciones que les permitan interactuar con distintos conceptos abstractos. Este proceso se denomina representaciones semióticas, noción central en las teorías actuales del aprendizaje matemático.

En ese sentido, autores como Tamayo (2006) y Caicedo (2013), coinciden en que las representaciones actúan como mediaciones cognitivas y comunicativas, mediante las cuales los individuos organizan, simbolizan y transmiten sus ideas. Mientras Tamayo enfatiza el carácter externo de las representaciones como signos del mundo interior o exterior, Caicedo destaca su dimensión constructiva, al señalar que representar implica también evocar, imitar y generar imágenes mentales. Desde esta perspectiva, la comprensión de un concepto matemático no depende exclusivamente del conocimiento de una fórmula o procedimiento, sino de la capacidad de interpretarlo, transformarlo y conectarlo a través de distintos registros representacionales.

En la enseñanza de las matemáticas, los conceptos no son directamente observables ni tangibles, ya que se trata de objetos abstractos (como funciones, derivadas, límites, etc.). Para que estos objetos puedan ser comprendidos y utilizados por los estudiantes, es necesario representarlos de alguna manera, ya sea con símbolos, gráficos, palabras, diagramas o fórmulas. Así, las representaciones actúan como mediadoras, conectando el objeto matemático con la capacidad de los estudiantes para entenderlo y darle significado.

El aprendizaje matemático exige, entonces, una doble habilidad: por un lado, la capacidad de interpretar representaciones externas, manifestadas mediante signos, notaciones, gráficos, diagramas, expresiones algebraicas o verbales, y, por otro, la habilidad de construir representaciones internas, es decir, imágenes mentales que cada individuo construye para representar objetos o relaciones matemáticas. Desde esta visión, las representaciones externas funcionan como estímulos perceptibles que, al ser interiorizados, pueden convertirse en estructuras mentales organizadas.

Esta doble naturaleza (externa e interna) hace posible que las representaciones sirvan como herramientas tanto para pensar como para comunicar. Así, los estudiantes necesitan desarrollar la habilidad de construir representaciones internas a partir de las externas, y viceversa, en un proceso que favorece el análisis, la modelación y la comprensión profunda de los objetos matemáticos.

En este marco, resulta importante destacar que las representaciones no son los objetos matemáticos en sí, sino formas de acceder a ellos, por ejemplo, el concepto de fracción no se reduce a su expresión numérica, ni una parábola es solo su gráfica. Cada objeto matemático puede representarse de múltiples maneras (algebraica, gráfica, numérica, verbal), y cada forma de representación posee distintas propiedades y niveles de abstracción. De ahí que la comprensión de los conceptos matemáticos requiere no solo conocer sus representaciones, sino también establecer conexiones entre ellas.

A partir de lo anterior, este trabajo asume que el uso y articulación de diferentes representaciones es una condición necesaria para el aprendizaje significativo de las matemáticas. En particular, se enfatiza que el tránsito entre diversos registros semióticos —como el gráfico, algebraico, verbal o numérico— no solo favorece la comprensión conceptual, sino que también permite validar procedimientos y resolver problemas complejos. Esta perspectiva se enmarca en los planteamientos de Raymond Duval, cuya teoría sobre los registros de representación semiótica será desarrollada en el siguiente apartado.

2.1.1 Fundamentos de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica

Las representaciones semióticas, como se abordó en el apartado anterior, constituyen parte importante para la construcción del pensamiento matemático. A través de ellas, los estudiantes pueden organizar sus ideas, establecer relaciones entre conceptos y aplicar sus conocimientos a situaciones diversas, tanto escolares como del mundo cotidiano. En este contexto, la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS), formulada por Raymond Duval, ofrece un marco conceptual sólido para analizar cómo los estudiantes construyen y comunican conocimiento matemático a través de distintas formas simbólicas.

La teoría de Duval (TRRS) se centra en cómo los estudiantes comprenden y aprenden conocimientos matemáticos a través de diferentes representaciones semióticas (formas de representación) y en la importancia de la conversión entre estas representaciones para una comprensión profunda y flexible de las matemáticas.

Para Duval (1999), un registro de representación semiótica es un sistema de signos con reglas propias de producción y transformación de significados. Es decir, no se trata únicamente de cambiar el "formato" de una expresión (por ejemplo, de una ecuación a una gráfica), sino de operar en distintos lenguajes simbólicos que configuran la forma en que se concibe y se trabaja un objeto matemático. En este sentido, comprender un objeto matemático no implica solo conocerlo en un registro, sino ser capaz de reconocerlo, manipularlo y transferirlo entre diferentes representaciones. Esto se conoce como conversión entre registros, y constituye el núcleo del pensamiento matemático según esta teoría.

Ahora bien, es importante distinguir varios registros utilizados en las matemáticas: el registro algebraico, que utiliza símbolos formales para expresar relaciones y operaciones; el registro gráfico, que permite visualizar variaciones y comportamientos funcionales en un sistema cartesiano; el registro verbal, que incluye tanto el lenguaje natural como las descripciones formales; el registro tabular o numérico, que expresa relaciones mediante valores organizados en tablas. Cada uno de estos registros posee reglas propias y aporta una visión particular del objeto representado.

En el marco investigativo, la teoría de Duval permite analizar cómo los estudiantes construyen y comprenden la matemática cuando resuelven problemas de optimización, especialmente al convertir distintos registros. Mediante esta teoría se puede identificar el dominio de los conceptos matemáticos, ya que, si un estudiante logra interpretar una función en un gráfico, convertirla a una expresión algebraica y luego comunicarla en lenguaje natural, revela una comprensión de los registros semióticos.

En el marco de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS), se distinguen tres tipos fundamentales de actividades cognitivas implicadas en el trabajo con objetos matemáticos: 1) la producción, que consiste en representar un objeto mediante signos o símbolos específicos; 2) el tratamiento, que corresponde a la transformación de una representación dentro del mismo registro (por ejemplo, operar algebraicamente una expresión); 3) y la conversión, entendida como el paso de una representación a otra perteneciente a un registro diferente, como traducir una función expresada algebraicamente a su forma gráfica. Estas actividades serán consideradas como ejes centrales del análisis en la presente investigación, en tanto permiten identificar cómo los estudiantes acceden, transforman y articulan los distintos registros involucrados en la comprensión de los objetos matemáticos.

La TRRS es relevante para la presente investigación, ya que se orienta a diseñar una propuesta didáctica que facilite el tránsito entre registros semióticos utilizando GeoGebra como herramienta tecnológica. En este contexto, la teoría de Duval no se limita a ofrecer una clasificación de representaciones, sino que permite analizar las dificultades específicas que enfrentan los estudiantes cuando, por ejemplo, no logran vincular una representación gráfica con una expresión algebraica o cuando interpretan erróneamente un modelo verbal.

Además, la TRRS provee criterios para evaluar las representaciones producidas por los estudiantes en términos de su coherencia, equivalencia y funcionalidad, lo cual resulta útil tanto para el análisis de los procesos de aprendizaje como para el diseño de secuencias didácticas.

En síntesis, esta teoría aporta no solo una comprensión de las dificultades en el aprendizaje matemático, sino también herramientas concretas para abordarlas desde la enseñanza. En la investigación, la TRRS servirá como base para diseñar el taller que promueva la conversión entre registros, integrando GeoGebra como un medio que permite visualizar, explorar y manipular dinámicamente las representaciones.

2.1.2 Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento Matemático (EOS)

La Teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval permitió comprender que la construcción del conocimiento matemático depende en gran medida de la capacidad de los estudiantes para producir, tratar y convertir representaciones. Sin embargo, para profundizar en el análisis de cómo dichas representaciones adquieren significado en contextos reales de enseñanza y aprendizaje, es necesario acudir a marcos teóricos más integrales que consideren la dimensión cognitiva, semiótica, epistemológica y didáctica del conocimiento matemático. En este sentido, el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento Matemático (EOS), propuesto por Godino y colaboradores, ofrece una perspectiva más amplia para estudiar cómo se construye, comunica y contextualiza el conocimiento matemático en situaciones educativas.

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento Matemático (EOS) parte del supuesto de que los objetos matemáticos no existen de manera abstracta y aislada del sujeto, sino que adquieren significado a través de su uso en situaciones concretas. Así, las matemáticas no se tratan de saber definiciones formales, sino de entender cómo usarlas, cómo representarlas, y cómo interpretarlas en distintos contextos (Balcázar, 2018).

El EOS propone que toda actividad matemática usa números o fórmulas que participan en complejidad con signos, discursos y prácticas que tienen un carácter semiótico y ontológico a la vez: semiótico, porque se centran en la producción de significados mediante signos y símbolos; ontológico, porque esos significados se refieren a ideas u objetos matemáticos (como funciones, límites o derivadas) que el sujeto considera válidos dentro de un marco contextual. Esto es especialmente relevante para la enseñanza de temas complejos como los problemas de optimización, donde múltiples registros de representación se deben articular para su comprensión.

Por tanto, comprender un problema matemático significa conocer las reglas formales o aplicar procedimientos, interpretar y dotar de sentido a los objetos matemáticos dentro de un contexto. En el caso de los problemas de optimización, esta articulación es clave, ya que permiten abordar fenómenos del mundo real mediante estructuras matemáticas abstractas. De ahí que integrar el EOS en esta investigación permita analizar no solo el resultado final de una actividad, sino también los significados que los estudiantes construyen al movilizar distintos registros y estrategias para resolverla.

Desde esta concepción del aprendizaje, el Enfoque Ontosemiótico (EOS) resulta pertinente para abordar los problemas de optimización, ya que permite comprender cómo los significados matemáticos emergen en las prácticas del docente al interactuar con distintos registros de representación en contextos de enseñanza. Allí, prevalece la función semiótica, entendida como la relación entre un signo y su significado, que en el EOS es necesaria para analizar cómo los estudiantes interpretan los signos matemáticos que se les presentan.

Según Godino et al. (2006), cuando dos personas (por ejemplo, un docente y un estudiante) entienden de forma distinta una misma expresión matemática, se ocasiona un conflicto semiótico. En el caso específico de los problemas de optimización, estas diferencias pueden manifestarse, por ejemplo, cuando el estudiante interpreta la gráfica de una función sin relacionarla adecuadamente con su expresión algebraica o cuando entiende la derivada solo como una operación mecánica sin vincularla con su significado geométrico.

Identificar este tipo de conflictos permite al docente anticipar y atender las posibles dificultades de interpretación que afectan la comprensión. En consecuencia, se favorece el diseño de estrategias didácticas que promuevan una articulación más clara entre registros, reduzcan ambigüedades y potencien una comprensión más profunda y significativa de los conceptos involucrados en la resolución de problemas de optimización.

Desde el Enfoque Ontosemiótico (EOS), las representaciones pueden analizarse considerando dos dimensiones: como herramientas que median la acción matemática (por ejemplo, resolver un problema de optimización utilizando un gráfico) y como portadoras de significado, es decir, como medios a través de los cuales los estudiantes interpretan y comprenden los objetos matemáticos.

Este enfoque resulta especialmente útil para esta investigación, ya que permite analizar no solo si los estudiantes pueden convertir una representación algebraica en gráfica (como indicaría Duval), sino también qué significado le atribuyen a esa conversión, qué obstáculos encuentran, cómo interviene la tecnología (como GeoGebra) en ese proceso, y cómo se configuran las prácticas matemáticas en el aula. Así, el EOS enriquece la mirada sobre los registros de representación semiótica al situarlos dentro de un entramado de significados más amplio, ofreciendo un marco potente para interpretar la actividad matemática en situaciones reales de enseñanza y aprendizaje.

En esa línea, la presente investigación se apoya en la articulación de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval y el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento Matemático (EOS) propuesto por Godino y colaboradores. Ambos desempeñándose como referentes teóricos en las representaciones y la construcción de conocimiento matemático.

Pues bien, la TRRS se centra en el estudio de los sistemas de representación que permiten acceder a los objetos matemáticos, resaltando la necesidad de movilizar registros y, de realizar conversiones entre ellos. Por su parte el Enfoque Ontosemiótico (EOS) tiene una mirada más amplia, concibiendo el conocimiento matemático como un sistema de prácticas semióticas, sociales y personales, incluyendo el contexto, las normas, y los conflictos semióticos. La articulación en ambas teorías permite comprender los problemas de optimización de manera sistémica e integral.

Esta integración teórica se justifica por la naturaleza misma del objeto de estudio: los problemas de optimización. Estos requieren el uso de múltiples registros (por ejemplo, lenguaje natural, representaciones gráficas, ecuaciones algebraicas) y demandan procesos de interpretación, modelación y toma de decisiones.

Finalmente, al incorporar GeoGebra como herramienta tecnológica en la propuesta didáctica, se hace aún más necesaria esta doble mirada. GeoGebra potencia la visualización, facilita la conversión entre registros y permite representar dinámicamente los objetos matemáticos; sin embargo, su eficacia depende de cómo los estudiantes interpretan y articulan esas representaciones en sus procesos de razonamiento. Así, TRRS y EOS se complementan como marcos analíticos que permiten comprender no solo lo que hacen los estudiantes con las representaciones, sino también cómo construyen sentido a partir de ellas, lo cual es clave para promover un aprendizaje significativo en temas complejos como la optimización.

2.2 Tecnología digital como mediadora semiótica

La tecnología en el ámbito educativo ha transformado las posibilidades y el acceso a la educación según su uso. Entre sus beneficios se encuentra el acceso a la información y a plataformas de aprendizaje en línea, ocupando el aprendizaje de manera interactiva e interesante para los jóvenes. En este contexto, la tecnología digital emerge como un mediador semiótico potente, al ampliar las posibilidades de producción, tratamiento y conversión de representaciones, y al ofrecer entornos dinámicos donde los estudiantes pueden explorar visual, simbólica y numéricamente los conceptos matemáticos.

En la educación media, la tecnología no debe considerarse únicamente como un recurso auxiliar, sino como un medio que potencia los procesos cognitivos de los estudiantes. Herramientas como software de geometría dinámica, calculadoras gráficas, plataformas interactivas o entornos de álgebra computacional permiten a los alumnos experimentar con conceptos abstractos, manipular representaciones y establecer conexiones significativas entre diferentes ideas matemáticas. Estos recursos promueven un aprendizaje más participativo, donde el estudiante no solo recibe información, sino que la construye, la modifica y la analiza desde distintas perspectivas.

Además, el uso de tecnología responde a las demandas de una sociedad cada vez más mediada por lo digital. Preparar a los estudiantes para enfrentar situaciones reales implica desarrollar competencias que integren el razonamiento matemático con el uso efectivo de herramientas tecnológicas. Desde esta óptica, la educación matemática en la escuela media debe propiciar ambientes donde los estudiantes resuelvan problemas contextualizados, modelen situaciones reales y exploren soluciones mediante representaciones múltiples apoyadas por tecnología.

En la presente investigación la tecnología será abordada como un instrumento viable para el aula de clase en la construcción de las representaciones semióticas propios de la resolución de problemas de optimización.

2.2.1 GeoGebra como herramienta de mediación semiótica

La comprensión de los objetos matemáticos exige que los estudiantes sean capaces de movilizar distintas representaciones (gráficas, algebraicas, numéricas o verbales) y realizar conversiones significativas entre ellas. En este proceso, la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval sostiene que el entendimiento matemático no se logra solo operando en un único registro, sino en la capacidad de transformar y convertir representaciones entre distintos sistemas semióticos. A la vez, el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento Matemático (EOS) plantea que dichas representaciones cobran sentido en contextos concretos de práctica y significación, y que el conocimiento se construye en la interacción entre signos, discursos y actividades.

GeoGebra es un software de aplicación libre con código abierto diseñado para la creación de construcciones interactivas que proporcionan imágenes, ideas y conocimientos matemáticos de manera visual y accesible. En la investigación, se considera como una herramienta pedagógica que apoya el acceso a diversas representaciones, su tratamiento y la conversión entre registros de representación. Según Portillo et al. (2019), este software "permite trabajar en una misma ventana los aspectos algebraico, numérico y gráfico de un conocimiento matemático" (p. 7), lo cual favorece un entorno de aprendizaje integrado, donde el tratamiento y la conversión entre registros se vuelven procesos naturales.

Introducir una función y observar de inmediato su gráfica y tabla de valores permite al estudiante visualizar e interpretar relaciones matemáticas complejas. Este tránsito entre, registros se vuelve más accesible cuando los estudiantes pueden ver en tiempo real cómo una modificación simbólica afecta la representación visual del objeto. Esto permite reforzar el sentido del contenido matemático, más allá del procedimiento.

Desde la perspectiva del EOS, el valor de GeoGebra no radica únicamente en su capacidad de mostrar representaciones, sino en cómo estas se significan en la práctica. Este tipo de interacción responde a lo que Balcázar (2018), denomina función semiótica: el proceso mediante el cual los estudiantes interpretan los signos matemáticos dentro de una situación didáctica concreta. Esta posibilidad transforma la función semiótica en una experiencia activa: el signo no se presenta de forma estática, sino que se manipula, se explora y se resignifica en tiempo real.

Más allá de su potencial visual, GeoGebra permite abordar directamente una de las dificultades clave señaladas por Duval: el fracaso en la conversión entre registros. Cuando los estudiantes no logran relacionar la gráfica de una función con su expresión simbólica, o no entienden cómo una derivada se conecta con la pendiente de una curva, se genera un conflicto semiótico. GeoGebra ofrece un entorno donde estos conflictos pueden hacerse explícitos y resolverse, al permitir al estudiante experimentar con los objetos, observar sus transformaciones y validar sus propias hipótesis mediante la manipulación directa, lo que no solo facilita la comprensión, sino que transforma el papel de las representaciones: ya no son solo comunica, sino que permite experimentar, modelar y argumentar.

Sin embargo, la efectividad del uso de herramientas tecnológicas no depende únicamente de su incorporación técnica o instrumental. Si su implementación no se articula dentro de una secuencia didáctica significativa, existe el riesgo de reproducir las mismas prácticas tradicionales bajo un formato digital. Desde una perspectiva semiótica, se reconoce que la construcción de significados matemáticos requiere contextos de enseñanza en los que se conjuguen propósitos claros, reglas institucionales bien definidas y prácticas discursivas coherentes que den sentido a las representaciones utilizadas.

En este marco, actividades como el uso de deslizadores para explorar parámetros, la construcción dinámica de funciones o la verificación gráfica de soluciones permiten al estudiante hacer visible lo que antes debía imaginar, facilitando el tránsito entre registros de representación. Esto no solo reduce la carga cognitiva inicial, sino que propicia una comprensión más profunda del objeto matemático, al fortalecer habilidades como la abstracción, la generalización, la inferencia y la validación, fundamentales en la resolución de problemas complejos como los de optimización.

Este software actúa como un mediador cognitivo y didáctico, en la medida en que posibilita no solo el acceso a representaciones, sino la construcción significativa de conocimiento. En este sentido, las representaciones ya no son solo “formas de mostrar” conocimientos matemáticos, sino también herramientas para pensar, conjeturar, experimentar, argumentar y validar.

Gracias a su enfoque visual y dinámico, GeoGebra permite representar y reinterpretar conceptos abstractos de forma accesible, facilitando la comprensión de contenidos complejos que, en entornos tradicionales, suelen mantenerse en un plano puramente simbólico. Esta experiencia interactiva no solo favorece el desarrollo de la intuición matemática, sino que también estimula habilidades cognitivas superiores como la exploración estratégica, la autorregulación y el pensamiento crítico.

De esa manera, GeoGebra constituye una herramienta potente para facilitar tanto el tratamiento como la conversión entre registros semióticos, tal como lo plantea la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS). Al permitir que los estudiantes transiten entre representaciones algebraicas, gráficas y numéricas en un mismo entorno, se favorece una comprensión más profunda de los conceptos, fortaleciendo su capacidad para reconocer un mismo objeto matemático desde distintas formas de expresión.

Simultáneamente, el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento Matemático (EOS) destaca que estas representaciones adquieren sentido cuando se integran en prácticas discursivas y contextos de interpretación específicos. La interacción con los objetos matemáticos en un entorno dinámico posibilita una resignificación constante, reduciendo la distancia entre lo que se enseña y lo que el estudiante realmente comprende.

Finalmente, la articulación entre la TRRS y el EOS permite comprender que el papel de GeoGebra no se limita a presentar representaciones visuales, sino a mediar procesos de construcción de significado. En este sentido, GeoGebra actúa como un entorno de mediación semiótica donde convergen la acción, la representación y la interpretación.

2.3 Problemas de optimización

Teniendo en cuenta la articulación entre las representaciones semióticas, el uso de tecnologías digitales como GeoGebra, y el enfoque didáctico propuesto por las teorías previamente discutidas, resulta pertinente profundizar en la naturaleza de los problemas de optimización desde una perspectiva educativa. Estos problemas, lejos de ser simples ejercicios mecánicos, constituyen escenarios ricos para fomentar la comprensión de conceptos matemáticos complejos, promoviendo el pensamiento crítico y facilitando la aplicación contextualizada del conocimiento.

Los problemas de optimización en matemáticas se refieren a la búsqueda de la mejor solución posible dentro de un conjunto de alternativas, bajo ciertas condiciones o restricciones. En términos generales, implican maximizar o minimizar una función objetivo, que puede representar cantidad, tiempo, distancia, costo, eficiencia u otros aspectos relevantes. Su importancia trasciende el ámbito puramente académico, ya que este tipo de razonamiento es fundamental en la toma de decisiones en la vida cotidiana: desde elegir la mejor ruta para evitar tráfico, hasta determinar cómo distribuir recursos de manera eficiente o minimizar pérdidas en un proceso productivo.

Desde una perspectiva didáctica, la optimización ofrece un espacio privilegiado para integrar distintas representaciones y trabajar de forma articulada con las nociones de variación, cambio y modelación. En este sentido, la resolución de problemas de optimización se trata de aplicar técnicas o algoritmos, y de comprender la estructura del problema, interpretar condiciones contextuales, traducirlas a un modelo matemático, y luego interpretar las soluciones dentro del mismo contexto. Esta secuencia pone en juego habilidades cognitivas de alto nivel y ofrece un terreno fértil para el desarrollo del pensamiento matemático avanzado.

Los estudiantes, ante situaciones que les exigen encontrar la "mejor" solución, tienden a formular conjeturas y proponer estrategias que revelan un pensamiento orientado a la eficiencia. Así, resolver problemas de optimización implica no solo hallar un valor extremo de una función, sino también reflexionar sobre las condiciones del problema, los parámetros involucrados y las posibilidades de modificar o reinterpretar la situación.

Didácticamente, esto abre la posibilidad de diseñar tareas que desafíen a los estudiantes a movilizar múltiples representaciones para interpretar, modelar y resolver problemas. La riqueza de estos contextos radica en que no existe una única forma de abordarlos, y su resolución requiere el tránsito entre distintos registros semióticos. En este sentido, el uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra no solo apoya la visualización de estos procesos, sino que permite una experimentación activa, que fortalece la comprensión conceptual y promueve la argumentación matemática.

De igual forma, la optimización es una rama de las matemáticas dedicada a caracterizar y determinar los valores máximos o mínimos de una función (Ramos & Rodríguez, 2018). Pero lo relevante desde el punto de vista pedagógico no es solo el resultado final, sino el proceso de construcción, exploración y validación que permite llegar a ese resultado. Desde esta óptica, enseñar optimización implica transmitir técnicas de cálculo, fomentar una comprensión profunda del concepto de variación, de las condiciones de un problema y de la interpretación del modelo matemático.

En suma, la naturaleza didáctica de los problemas de optimización reside en su capacidad para integrar múltiples componentes del pensamiento matemático: la modelación, la interpretación, el uso de representaciones diversas, la toma de decisiones fundamentada y la argumentación. Estas características los convierten en una herramienta pedagógica poderosa para promover aprendizajes significativos, siempre y cuando su enseñanza se articule con enfoques teóricos que reconozcan el papel de las representaciones y la mediación tecnológica como elementos clave en la construcción del conocimiento matemático.

Una de las aportaciones centrales de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval es que comprender un objeto matemático no consiste únicamente en operar dentro de un solo registro, sino en coordinar distintos sistemas de signos para lograr una construcción significativa del conocimiento. En el caso de los problemas de optimización, este tránsito entre registros es fundamental, ya que permite abordar las situaciones desde múltiples perspectivas: algebraica, gráfica, numérica y verbal.

Siendo así, los problemas de optimización, por su naturaleza, requieren comprender la relación entre variables, interpretar comportamientos funcionales y justificar decisiones matemáticas basadas en condiciones máximas o mínimas. Estas exigencias cognitivas difícilmente pueden ser satisfechas desde un único registro de representación. Resolver un problema de este tipo implica, por lo general, movilizar al menos dos representaciones: por ejemplo, expresar algebraicamente una función objetivo y visualizar su comportamiento mediante una gráfica. Esta necesidad de alternar entre registros permite no solo operacionalizar procedimientos, sino también otorgar sentido a los objetos matemáticos involucrados.

Los problemas de optimización, por su estructura, exigen una traducción de condiciones contextuales (en lenguaje natural) a un modelo matemático formal (función algebraica), que luego debe ser representado gráficamente, interpretado numéricamente o contrastado con soluciones posibles. Esta secuencia demanda que el estudiante realice conversiones entre registros y no se quede anclado en uno solo.

En la resolución de problemas de optimización, una de las principales dificultades radica en la falta de articulación entre los distintos registros de representación (Navarro et al. 2016; Portillo et al., 2019; Morales et al., 2022). Es común que algunos estudiantes puedan realizar correctamente procedimientos algebraicos, como el cálculo de derivadas, pero sin lograr interpretar sus resultados en un gráfico o relacionarlos con la situación contextual que originó el problema. De manera inversa, otros estudiantes pueden identificar visualmente el punto de máximo o mínimo en una representación gráfica, pero no disponen de los recursos simbólicos necesarios para justificar esa solución de manera formal. Esta desconexión entre registros revela que el dominio parcial de un lenguaje matemático no es suficiente para una comprensión del fenómeno de optimización, ya que dicha comprensión exige coordinar los diferentes modos de representación involucrados.

Desde esta perspectiva, el tránsito entre registros no solo es una habilidad técnica, sino una forma de pensamiento matemático compleja que debe ser enseñada explícitamente. Esto implica diseñar tareas donde los estudiantes deban producir, tratar y convertir representaciones en distintos registros, y ser capaces de argumentar por qué estas representaciones son equivalentes o complementarias.

Entonces, los problemas de optimización actúan como un puente para conectar las matemáticas con situaciones cotidianas y la realidad de los estudiantes. Esto es crucial, ya que las matemáticas a menudo se perciben como desmotivadoras para los jóvenes, quienes no ven una correlación o importancia en los temas trabajados. Además, los estudiantes suelen enfrentar dificultades porque la enseñanza se centra en la práctica algorítmica y algebraica, lo que carece de sentido para ellos y dificulta la resolución de problemas no rutinarios.

Esto implica entender que los objetos matemáticos no tienen un significado fijo, sino que su interpretación depende del contexto y de las prácticas en las que se utilizan. En la resolución de problemas de optimización, esto es crucial porque permite a los estudiantes desarrollar una comprensión más profunda y flexible de los conocimientos involucrados, facilitando la transición entre diferentes representaciones y enfoques.

CAPÍTULO 3: Aspectos metodológicos

Este capítulo presenta los aspectos metodológicos que guiaron el desarrollo de la presente investigación. Se detalla el enfoque adoptado, el diseño, la población, los instrumentos y los procedimientos seguidos durante el proceso de investigación.

Ilustración 1. *Diagrama del marco metodológico de la investigación. (Diseño propio).*

La presente investigación se enmarca en una metodología de carácter cualitativo, la cual, según Hernández et al. (2014), se desarrolla en contextos naturales, priorizando la interpretación de las experiencias desde la perspectiva de los propios participantes. A diferencia de los enfoques cuantitativos, que buscan generalizaciones estadísticas, la investigación cualitativa se orienta a comprender fenómenos complejos, considerando las experiencias subjetivas, los significados construidos y las relaciones contextuales que configuran el acontecer educativo. En este sentido, resulta pertinente para analizar cómo los estudiantes abordan y significan la resolución de problemas de optimización mediante distintos registros de representación semiótica involucrados en el proceso, ya que permite acceder a las formas particulares en que cada sujeto se relaciona con el conocimiento matemático en situaciones reales de aula.

Así, se articula con el uso de un taller como estrategia metodológica, el cual fue diseñado para promover la exploración activa de conceptos matemáticos mediante el uso del software GeoGebra. Dicha estrategia posibilita observar, desde una perspectiva situada, las acciones, decisiones y construcciones de sentido que emergen en la interacción de los estudiantes con los objetos matemáticos y con la herramienta tecnológica, dentro de un ambiente de aprendizaje estructurado pero flexible.

Asimismo, se adoptaron estrategias propias de la investigación cualitativa según Sampieri et al. (2014), como la validación del instrumento mediante una prueba piloto, y el análisis temático con base en categorías previamente definidas, específicamente, la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (Duval, 2006) y el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento matemático (Godino et al., 2006). Estas decisiones metodológicas fortalecen la credibilidad, transferibilidad y consistencia del estudio, y permiten una comprensión más profunda del fenómeno investigado.

El diseño metodológico corresponde a un estudio de caso instrumental (Stake, 1995), puesto que el interés principal no se centra en los casos particulares en sí mismos, sino en la comprensión del fenómeno didáctico del tránsito entre registros semióticos en un contexto específico de enseñanza y aprendizaje. Este diseño posibilita analizar en profundidad las prácticas y procesos involucrados, facilitando una comprensión rica y contextualizada del fenómeno.

Según Yin (2003), el estudio de caso es adecuado cuando se busca responder preguntas del tipo “cómo” o “por qué” sobre fenómenos contemporáneos, dentro de su contexto real, especialmente cuando los límites entre el fenómeno y el contexto no están claramente definidos. En este sentido, el estudio permite analizar cómo los estudiantes interpretan, coordinan y convierten distintos registros de representación (gráfico, algebraico, verbal, etc.) al interactuar con GeoGebra y enfrentarse a problemas de optimización.

Asimismo, el estudio se inscribe dentro de una perspectiva constructivista e interpretativa, reconociendo que el conocimiento matemático no es una transmisión directa, sino una construcción mediada por herramientas, interacciones y significados compartidos. En esta línea, se adopta una mirada ontosemiótica del aprendizaje (Godino et al., 2006) y se toma como marco teórico la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (Duval, 2006), para interpretar cómo los estudiantes movilizan diferentes representaciones en la resolución de problemas.

La coherencia entre el enfoque cualitativo, el diseño de estudio de caso instrumental y la estrategia metodológica implementada permite abordar el fenómeno desde una mirada integral, contextual e interpretativa. Esta articulación metodológica resulta pertinente para responder a la pregunta de investigación, ya que posibilita comprender cómo los estudiantes transitan entre diferentes registros de representación semiótica al enfrentarse a problemas de optimización mediados por GeoGebra.

3.1 Diseño

El diseño metodológico de esta investigación se enmarca en un estudio de caso cualitativo de tipo interpretativo, centrado en analizar cómo un grupo de estudiantes de educación media transita entre distintos registros de representación semiótica durante la resolución de un problema de optimización con el apoyo del software GeoGebra. Este diseño permite explorar fenómenos complejos en su contexto natural, atendiendo a la construcción de significados, y las estrategias de resolución y las dificultades que emergen en la interacción con la herramienta tecnológica.

Más que describir patrones generales, se busca comprender los procesos individuales y colectivos mediante los cuales los estudiantes representan, interpretan y transforman objetos matemáticos al enfrentarse a tareas cognitivas especialmente diseñadas para este fin. Esta perspectiva interpretativa favorece una aproximación situada y rica en matices, lo cual resulta pertinente para estudiar la mediación semiótica que tiene lugar en entornos de aprendizaje mediados por tecnología digital.

3.2 Población y muestra

La población acorde a la investigación está conformada por estudiantes de educación media del Colegio Agustiniano Norte, ubicado en Bogotá, Colombia. La muestra fue seleccionada mediante un muestreo intencional, propio de los estudios cualitativos, el cual se caracteriza por elegir casos que permitan comprender en profundidad el fenómeno investigado (Hernández et al., 2014). En este caso, se seleccionó intencionalmente a un grupo de cinco estudiantes de grado undécimo bajo criterios definidos que garantizaran su pertinencia y coherencia con los objetivos del estudio.

Los criterios de inclusión fueron: a) estar matriculado en grado undécimo, b) haber cursado asignaturas que incluyeran conceptos de álgebra y cálculo diferencial, en particular el tema de derivadas, c) tener conocimientos básicos en el uso del software GeoGebra y d) disponibilidad y compromiso para participar activamente en todas las sesiones del taller. Estos criterios fueron definidos con base en las demandas del problema matemático propuesto (optimización) y en la necesidad de contar con estudiantes que pudieran interactuar de manera significativa con las representaciones semióticas movilizadas en el desarrollo del taller.

La elección de una muestra reducida responde a los propósitos del estudio de caso instrumental (Stake, 1995), que busca comprender un fenómeno didáctico dentro de un contexto específico, más que representar una población amplia. Esta cantidad de participantes permitió realizar un seguimiento individualizado, detallado y contextualizado de las estrategias, interpretaciones y dificultades observadas, lo cual enriquece el análisis cualitativo desde una lógica interpretativa y constructivista.

La selección se desarrolló en dos fases. Primero, se aplicó una prueba piloto del taller a un grupo más amplio de 30 estudiantes, con el fin de validar el instrumento, identificar posibles dificultades en su diseño y observar patrones preliminares de interacción con GeoGebra. A partir de esta experiencia, se ajustaron las actividades y se identificaron los perfiles de estudiantes que respondían a los criterios establecidos. En la segunda fase, se seleccionaron los cinco casos que mostraron mayor disposición y cumplimiento de los criterios, permitiendo una observación más profunda del tránsito entre registros de representación semiótica en un entorno de aprendizaje mediado por tecnología.

Desde una perspectiva ética, se obtuvo el consentimiento informado de los participantes y sus acudientes, garantizando la confidencialidad, anonimato y uso exclusivo de la información con fines académicos. Se respetaron los lineamientos institucionales de investigación con menores de edad en contextos escolares.

3.3 Instrumentos

Para llevar a cabo la investigación y recopilar los datos, se utilizaron instrumentos cualitativos que permitieron registrar y analizar el tránsito entre los registros de representación semiótica en los estudiantes al resolver problemas de optimización mediante el software GeoGebra. La combinación de estos instrumentos proporcionó una visión integral del proceso de aprendizaje, facilitando la identificación de estrategias, dificultades y percepciones de los participantes.

Dentro de los instrumentos, el taller se estableció como el principal, debido que, según Rodríguez (2012), permite la adquisición de conocimientos y habilidades a través de actividades. Su estructura se concibe como una herramienta de externalización y transformación, ofreciendo a los estudiantes un espacio para relacionar los conocimientos escolares con la vida cotidiana. De este modo, el taller no solo promueve el aprendizaje, sino que también fortalece habilidades esenciales para la vida.

Asimismo, Rodríguez (2012) destaca que los talleres son fundamentales para la interpretación y sistematización en el ámbito de la investigación educativa. En este sentido, el taller diseñado para la investigación se estructuró mediante:

> una secuencia de actividades intencionadas en las cuales se involucra a los participantes en un evento para el logro de sus fines. En los contextos de enseñanza

> y aprendizaje, las estrategias cumplen un papel fundamental en cuanto responden al uso orientado y coordinado de acciones encaminadas a lograr que docentes y alumnos puedan establecer relaciones significativas entre sí, teniendo como marco la relación entre texto y contexto, los propósitos de la interacción, los conocimientos y saberes que circulan en el aula (p.16).

De esta manera, el taller se configura como un instrumento guiado por los principios del constructivismo, actuando como un mecanismo de andamiaje entre la enseñanza de los docentes y el aprendizaje de los estudiantes. En el contexto de la investigación, el taller se considera un recurso importante, pues no limita al estudiante a conocimientos estáticos y predefinidos, sino que promueve la transferencia de saberes. Así, se permite desarrollar la autonomía de los estudiantes y su capacidad para aplicar sus conocimientos previos en nuevas situaciones.

Siguiendo a Rodríguez (2012), el taller permite: 1) una participación libre y activa, en la que los estudiantes dialogan y negocian las acciones, propósitos, funciones, metas y requisitos para abordar la tarea propuesta; 2) el desarrollo de estrategias propias mediante recursos como el diálogo y la argumentación, lo que fortalece la autonomía y el pensamiento crítico; y 3) un espacio de mediación, donde se potencia la dialogicidad y se favorece la construcción de aprendizajes significativos mediante la interacción y el intercambio de sentidos.

Ahora bien, este instrumento fue seleccionado por su capacidad para facilitar tanto la ejecución como la reflexión sobre el tema propuesto, lo cual permite situar la problemática y los nuevos desafíos en la enseñanza de las matemáticas, promoviendo acciones de formación, por su posibilidad de observar, registrar y analizar. Desde esta perspectiva, el taller se concibe como una estrategia metodológica que favorece una participación dinámica y orientada, a través de actividades planificadas y estructuradas dentro de un marco flexible. El taller fue diseñado como una secuencia de actividades que orientan al estudiante a movilizar diferentes registros —gráfico, algebraico, verbal y numérico—, de forma progresiva y reflexiva, con el acompañamiento del software GeoGebra como herramienta de mediación tecnológica.

El diseño de las tareas se fundamentó en los principios de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (Duval) y en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), buscando no solo que los estudiantes resolvieran un problema, sino que representaran, interpretaran y argumentaran en distintos registros. Por ello, las preguntas del taller fueron formuladas con distintos propósitos: unas orientadas al tratamiento interno en un mismo registro (por ejemplo, operar algebraicamente), y otras a la conversión entre registros (por ejemplo, pasar de una gráfica a una explicación verbal), lo que permite evidenciar los procesos cognitivos implicados.

La validación del instrumento se realizó mediante una prueba piloto aplicada a 30 estudiantes del mismo grado y contexto educativo. Esta fase permitió detectar ambigüedades en la redacción de las preguntas, evaluar la pertinencia de los registros involucrados y verificar que las tareas efectivamente promovieran los procesos semióticos deseados. A partir de esta prueba, se ajustaron formulaciones, se reorganizó la secuencia de las actividades y se incorporaron apoyos visuales o técnicos necesarios. Así, el taller final no solo funcionó como instrumento de recolección de datos, sino también como una propuesta didáctica con potencial formativo.

3.3.1. Actividad: Problemas de optimización

Para el desarrollo de la actividad, se tuvo en cuenta los aportes teóricos y los objetivos de la investigación. Ante ello, se hizo una serie de indicaciones, tratándose de:

Doblar una hoja de manera que una de sus esquinas toque el borde largo de esta, de tal manera que se forme un triángulo rectángulo en la esquina, como se muestra en la Figura.

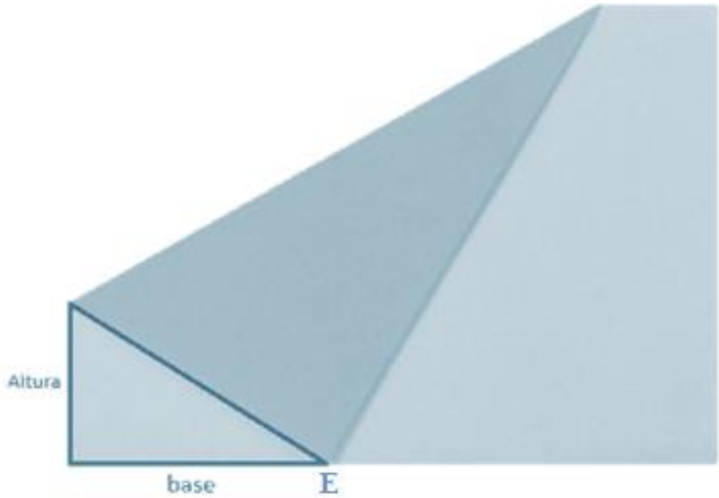


Ilustración 2. *Figura sobre el dobles de la hoja. (Elaboración propia)*

Se les pregunta: ¿Qué longitud debe tener la base y la altura del triángulo para que su área sea máxima?

1. Cambie de posición la esquina de la hoja (**E**) sobre el largo de esta y registre como mínimo 10 datos a partir de los triángulos rectángulos generados.

Tabla 1

Ejemplo de tabla para registrar la base y el área de los triángulos rectángulos.

Base										
Área										

Tabla 2

Ejemplo de tabla para registrar la altura y el área de los triángulos rectángulos.

Altura										
Área										

a. Observar los resultados de cada una de las tablas, ¿Qué relación hay entre los valores de la base y el área? y ¿Qué relación hay entre los valores de la altura y el área?

Respuesta esperada:

Cuando la base del triángulo rectángulo aumenta, el área del triángulo también aumenta. Sin embargo, después de alcanzar un cierto valor máximo, el área comienza a decrecer. Por ende, la relación entre la base y el área es también una función cuadrática, que tiene un máximo punto que representa el área máxima que el triángulo pueda tener.

La relación entre la altura y el área también es lo mismo, ya que la función del área respecto a su altura es una función cuadrática.

b. ¿Qué valores de la base y la altura parecen dar un área máxima? ¿Se podría deducir el valor del área máxima del triángulo?, si es así ¿Cuál sería su valor?

Respuesta esperada:

El área del triángulo alcanza su valor máximo cuando la base está entre 13 cm y 14 cm, y la altura esta entre 10 y 11 cm. El área máxima del triángulo esta entre 42 y 43 cm^2

2. Con los datos anteriores trazar la gráfica 1 (base vs área) y la gráfica 2 (altura vs área).

a. Al observar la gráfica 1 que relaciona la base y el área. ¿Qué tipo de función parece ser? ¿Qué información proporciona la gráfica sobre el área máxima?

Respuesta esperada:

La relación entre la base y el área sigue el comportamiento de una función cuadrática. La curva tiene una forma de parábola que abre hacia abajo, lo que indica que el área aumenta conforme la base crece hasta un cierto punto máximo y luego comienza a disminuir.

b. Al analizar la gráfica 2 que relaciona la altura y el área. ¿Cómo se comporta el área a medida que cambia la altura?

Respuesta esperada:

La relación entre la altura y el área sigue el mismo comportamiento que en la gráfica de base vs. área. Hasta cierto punto la altura incrementa el área del triángulo, luego de ese punto máximo, el área empieza a disminuir si la altura sigue incrementando.

c. ¿Qué relación existe entre la gráfica 1 y 2 respecto al área máxima? ¿Cómo se relaciona las medidas de la base, la altura y el área?

Respuesta esperada:

Ambas gráficas muestran un comportamiento cuadrático con una parábola que abre hacia abajo, lo que indica que existe un punto máximo en cada una donde el área del triángulo alcanza su valor máximo y es el mismo.

La base y la altura están directamente relacionadas y afectan el área del triángulo de la misma manera.

3. Usar GeoGebra para crear una simulación geométrica del papel doblado y así realizar mediciones en esta simulación. Luego, comparar estos resultados con los obtenidos anteriormente.

   3.1 Usar los ejes de coordenadas para alinear el tamaño del papel A4, ubicar en el eje x la distancia de 29.7 cm y en el eje y la distancia de 21 cm, usar la herramienta 

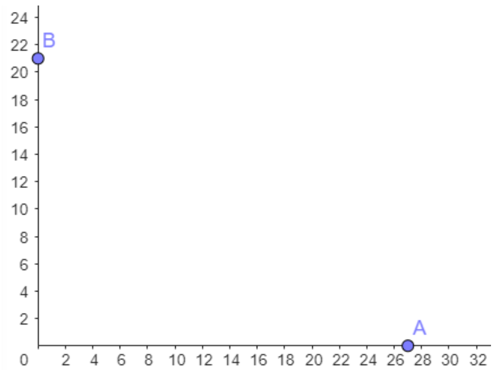
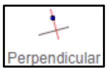


Ilustración 3. *Ejemplo de las coordenadas generado en GeoGebra.*

3.2 Usar la herramienta 

para trazar una recta perpendicular al eje x que pase por A y una recta perpendicular al eje y que pase por B.

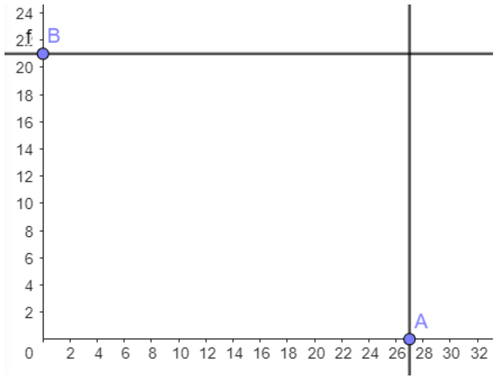


Ilustración 4. *Ejemplo del ejercicio generado en GeoGebra.*

Luego, usar la herramienta 

y hacer clic en las intersecciones donde se encuentran los cuatro vértices. Hacer clic una vez más en la primera intersección donde comenzó para indicarle a GeoGebra que ha terminado.

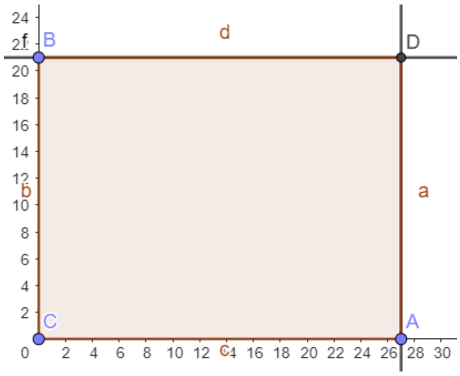


Ilustración 5. *Ejemplo del paso 3.2 generado en GeoGebra.*

Ahora, ocultar las líneas con la herramienta 

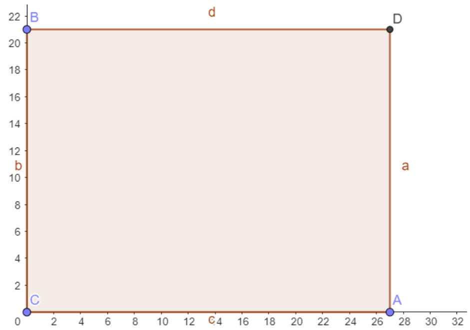


Ilustración 6. *Ejemplo del paso 3.2 generado en GeoGebra.*

3.3 Usar la herramienta 

en el borde inferior para representar la posición de la esquina superior izquierda después del pliegue. Conectar la esquina superior izquierda con este punto usando la herramienta 

pliegue, o doblez, será una bisectriz perpendicular de este segmento, seleccionar la herramienta 

ubicar el punto medio, luego trazar una recta perpendicular por este punto.

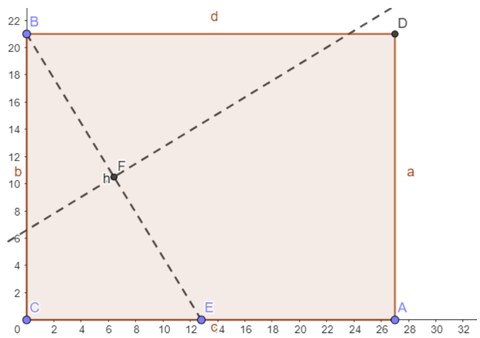


Ilustración 7. *Ejemplo de ilustración del paso 3.3 generado en GeoGebra.*

3.4 Ubicar el punto donde el pliegue se encuentra con el borde corto del papel, es decir, donde la bisectriz intersecta el borde. Para hacer la intersección de manera que pueda moverse alrededor de todos los bordes del papel, se necesita crear la intersección con el polígono, en lugar de solo una de sus aristas. Usar la herramienta 

dar clic en la recta bisectriz y luego en el polígono.

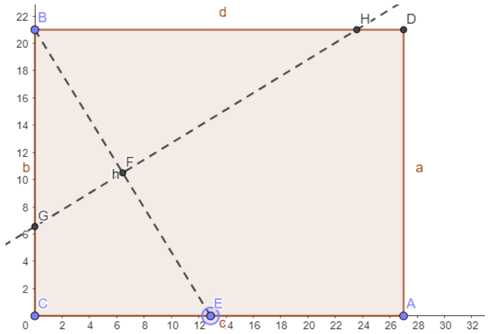
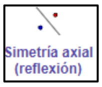


Ilustración 8. *Ejemplo de gráfica del punto 3.4 generado en GeoGebra.*

3.5 Usar estos puntos para generar un nuevo polígono que represente la parte del papel que se está doblando, que es el triángulo superior izquierdo del papel. Luego, seleccionar la herramienta 

y hacer clic en este polígono y en la línea de pliegue de la bisectriz para crear la ilusión de que realmente se está doblando el papel. Colorear los polígonos para que las diferentes partes se puedan discernir fácilmente.

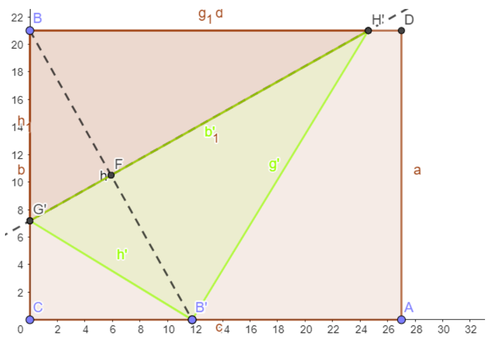


Ilustración 9. *Ejemplo del paso 3.5 generado en GeoGebra.*

3.6 Trazar el triángulo rectángulo inferior izquierdo con la herramienta 

, y con la herramienta 

determinar el área del triángulo. Este valor es el área que se necesita.

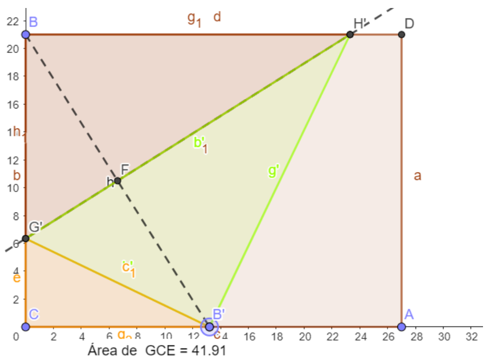


Ilustración 10. *Ejemplo de grafica del paso 3.6 en GeoGebra.*

3.7 Abrir el Área de Gráficos 2 presionando Ctrl-Shift-2. Hacer clic una vez en Gráficos 2 para asegurar de que esté activo y luego crear un punto allí escribiendo $L = (x(E), t2)$ en el campo de entrada, donde E es el punto móvil que representa la esquina doblada hacia abajo, y $t2$ es el es el área del triángulo inferior izquierdo que se pide maximizar. Hacer clic derecho en este punto en Gráficos 2 y seleccionar Mostrar rastro. Luego, haz clic derecho en la esquina que se mueve en el borde, el punto E en Gráficos 1, y seleccionar Activar Animación.

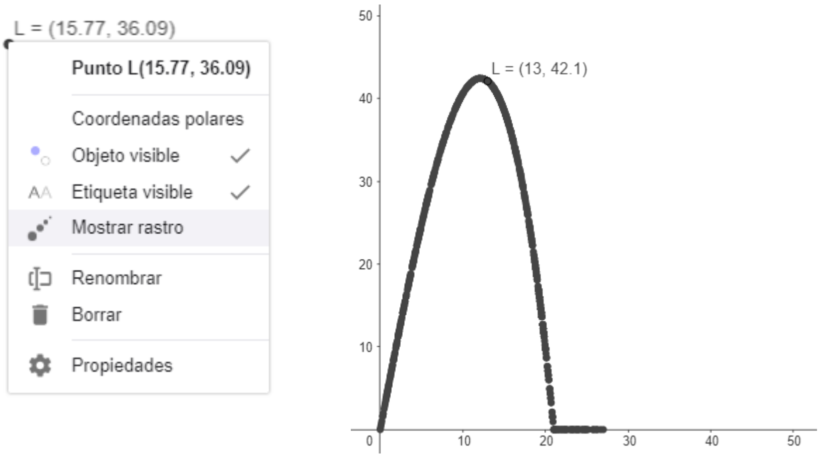
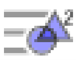


Ilustración 11*. Ejemplo de tabla y gráfica del paso 3.7 generado en GeoGebra.*

3.7 En la parte superior derecha de la vista Gráficos 2, hacer clic en el icono  y luego en los tres puntos ⋮ para seleccionar la opción de Hoja de cálculo.

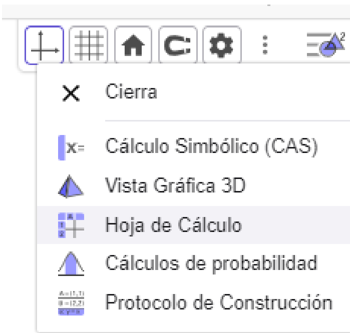


Ilustración 12. *Ilustración de despliegue de opciones del paso 3.7 generado en GeoGebra.*

3.8 Luego, hacer clic derecho en el punto de la vista Gráficos 2, para activar Mostrar Rastro y Registro en hoja de cálculo.

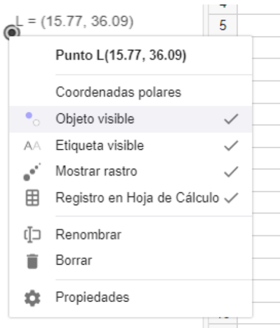


Ilustración 13. *Despliegue de opciones generado en GeoGebra para el paso 3.8.*

De esta manera se generará el registro de los valores de la base y el área del triángulo.

	A	B
1	x(L)	y(L)
2	15.46	37.17
3	15.07	38.38
4	14.67	39.43
5	14.5	39.83
6	14.28	40.31
7	14.11	40.64
8	13.83	41.12
9	13.77	41.21
10	13.71	41.3
11	13.49	41.6
12	13.26	41.86
13	13	42.1
14	12.87	42.19
15	12.7	42.29
16	12.53	42.36
17	12.36	42.41
18	12	42.43
19	11.79	42.39

Ilustración 14. *Ejemplificación de tabulación con valores de base y área, generado en GeoGebra.*

4. Teniendo en cuenta la simulación en GeoGebra, responda las siguientes preguntas:
   a. ¿Cómo se comparan los valores de la base y la altura del triángulo obtenidos en la simulación de GeoGebra con los registrados manualmente?

Respuesta esperada:

Los valores de la base y la altura del triángulo obtenidos en la simulación de GeoGebra son muy similares a los registrados manualmente. La diferencia entre ambos conjuntos de datos puede deberse a errores de medición, redondeo o precisión en el registro manual.

   b. ¿Cómo describirías el cambio en el área del triángulo conforme se desliza la esquina en la simulación de GeoGebra? ¿Coincide esta variación con las expectativas basadas en los datos manuales?

Respuesta esperada:

A medida que se desliza la esquina de la hoja en la simulación de GeoGebra, el área del triángulo rectángulo cambia de manera gradual. Inicialmente, cuando la base es pequeña, el área es también pequeña. Conforme la base aumenta, el área del triángulo crece hasta alcanzar un valor máximo en un punto específico. Después de este punto, si la base sigue aumentando, el área comienza a disminuir progresivamente. Este comportamiento confirma que la relación entre la base y el área es una función cuadrática, con un punto máximo claro.

La simulación en GeoGebra confirma los resultados obtenidos manualmente, mostrando que el área del triángulo sigue un comportamiento parabólico y que existe un punto en el que la base y la altura generan un área máxima.

c. Al observar la relación entre los valores de la base y el área en la tabla, ¿qué patrón se puede identificar? ¿Hay un punto en que el área aumenta y luego empieza a disminuir conforme cambia la base?

Respuesta esperada:

El área del triángulo aumenta conforme la base crece desde valores pequeños, pero después de alcanzar un punto máximo, el área comienza a disminuir a medida que la base sigue aumentando. Este comportamiento es característico de una función cuadrática, lo que indica que el área sigue una parábola que abre hacia abajo.

Hay un punto en el que el área del triángulo alcanza su valor máximo. Antes de este punto, el área crece conforme la base aumenta, pero después de ese punto, el área comienza a decrecer. Este punto corresponde al vértice de la parábola en la función cuadrática que modela el área.

d. Al comparar la gráfica con los datos tabulares, ¿es el punto de área máxima el mismo? ¿Qué tan precisa es esta representación gráfica respecto a los datos manuales?

Respuesta esperada:

El punto de área máxima identificado en la tabla de datos coincide con el máximo en la gráfica. En ambos casos, el área máxima del triángulo ocurre cuando la base es aproximadamente 13.97 cm y la altura es 10.80 cm, alcanzando un área máxima de 42.44 cm^2.

Aunque los datos tabulares reflejan el mismo patrón, la gráfica ofrece una forma más precisa y continua de analizar la relación, minimizando errores de medición y redondeo.

e. ¿Qué pasaría si se cambia el tamaño de la hoja (por ejemplo, usando papel tamaño oficio en lugar de carta)? ¿Cómo afectaría esto al área máxima del triángulo formado? ¿Por qué?

Respuesta esperada:

Si se usa una hoja tamaño oficio en lugar de carta, el área máxima del triángulo formado es significativamente mayor porque tanto la base como la altura pueden alcanzar valores más altos. Esto confirma que el área máxima depende directamente del tamaño del papel y que una hoja más grande permite obtener un triángulo de mayor área.

3.4 Aplicación del instrumento

La implementación del taller se llevó a cabo en tres sesiones de clase, cada una con una duración de 60 minutos.

Primera hora: Desarrollo de las actividades iniciales

Durante la primera sesión, se trabajaron las actividades 1 y 2 del taller. A cada estudiante se le entregó el material necesario para la actividad, que incluía:

- Una hoja tamaño carta,
- Una hoja milimétrica,
- El taller en físico,
- Regla, lápiz y borrador.

Los estudiantes realizaron los dobleces en la hoja de papel, registraron los datos obtenidos en la tabla correspondiente, trazaron las gráficas requeridas y respondieron las preguntas relacionadas con las actividades.

Segunda hora: Simulación del problema en GeoGebra

En la segunda sesión, se llevó a cabo la actividad 3, que consistió en la simulación del problema de optimización en GeoGebra. Para ello, se hizo uso de la sala de informática, permitiendo que cada estudiante trabajara individualmente en un computador. Se utilizó GeoGebra Clásico, ya que esta versión puede ejecutarse en línea, evitando así la necesidad de solicitar permisos para su instalación en los equipos.

Tercera hora: Análisis de la simulación y actividad final

En la última sesión, se retomó la simulación en GeoGebra, lo que permitió a los estudiantes responder las preguntas correspondientes a la actividad 4. Durante este tiempo, los estudiantes analizaron los resultados obtenidos en la simulación y compararon estos con los datos registrados manualmente, lo que les facilitó la comprensión del problema de optimización planteado en el taller.

A través de la implementación del taller, se promovió la transición entre los registros de representación semiótica (algebraico, gráfico, tabular y geométrico), permitiendo además registrar las interacciones de los estudiantes con las actividades y el software GeoGebra.

En segundo lugar, se llevaron a cabo observaciones directas durante la implementación del taller, con el objetivo de analizar la manera en que los estudiantes abordaban la resolución del problema, cómo utilizaban GeoGebra y qué estrategias empleaban para transitar entre los diferentes registros de representación semiótica.

Se realizó un registro sistemático mediante el diario de campo, entendido como una herramienta necesaria en la investigación para recopilar información contextual, ampliar las descripciones y proporcionar una base para el análisis de los datos (Sampieri, 2003). En ese caso, las anotaciones se derivan de la observación directa, incluyendo la descripción detallada de lo observado, así como aspectos relevantes del contexto educativo. Además, el diario de campo permitió formular y ajustar hipótesis, plantear preguntas de investigación y registrar otras observaciones clave para la realización coherente de la investigación. Así, las impresiones sobre el desarrollo del taller las reacciones de los estudiantes, sus avances y las dificultades observadas. Este instrumento permitió profundizar en la interpretación del proceso de aprendizaje, identificando patrones en la resolución de problemas.

Por último, como instrumento se maneja las producciones matemáticas de los estudiantes, incluyendo sus representaciones algebraicas, gráficas, tabulares y geométricas generadas en GeoGebra. Estas producciones permitieron evaluar cómo los estudiantes construían su comprensión del problema y cómo se manifestaba su tránsito entre los diferentes registros semióticos.

3.5 Procedimiento

La investigación se desarrolló mediante varias fases estructuradas, con el propósito de analizar el tránsito entre los registros de representación semiótica en los estudiantes al resolver problemas de optimización con el software GeoGebra. Cada etapa fue planificada para garantizar la recopilación de datos precisos y la adecuada implementación del taller didáctico diseñado para este estudio.

Fase 1:

1. Primer paso

En un primer momento, se diseñó un taller que se implementará como eje principal de la investigación, estructurado con base a un problema de optimización, modificado para responder a los objetivos y pregunta problema. En un inicio, el problema de optimización consistía en determinar la ubicación de un punto de apoyo para minimizar la longitud de un cable entre dos postes de diferentes alturas. No obstante, con el objetivo de incluir el uso de material concreto y tener una mayor interacción con los conceptos matemáticos, se prefirió modificar el problema, planteando la situación en la que los estudiantes debían doblar una hoja de papel donde una de sus esquinas tocara el borde largo de la misma, formando un triángulo rectángulo cuya área debía maximizarse.

Para el diseño del taller, se tuvo en cuenta los diferentes registros de representación semióticas, asegurando que los estudiantes tuvieran la oportunidad de transitar entre ellos durante la resolución del problema. Además, se incorporó el uso del software GeoGebra, con el objetivo de facilitar la visualización y comprensión de los conceptos matemáticos implicados en el problema de optimización.

2. Segundo paso

Antes de la aplicación definitiva del taller, se llevó a cabo una prueba piloto con 30 estudiantes de grado undécimo, con el propósito de evaluar la claridad de las instrucciones, la pertinencia de las actividades y la efectividad del uso de GeoGebra en la modelación del problema.

Durante la prueba piloto, se realizaron observaciones directas para registrar la interacción de los estudiantes tanto con el problema como con el software, identificando posibles dificultades en la comprensión y en la transición entre distintas representaciones semióticas. Para sistematizar estas observaciones, se emplearon rúbricas de observación, las cuales, según De La Cruz, (2022) resultan fundamentales, ya que la observación requiere una atención focalizada, la identificación de elementos clave y la recopilación de información relevante. En este sentido, la rúbrica es una herramienta que "describe el grado de logro que una persona ha demostrado en el desarrollo de actividades específicas de su carrera" (Santos, 2010). Su aplicación permite evaluar de manera objetiva el desempeño de los estudiantes en las tareas de aprendizaje, estableciendo estándares que facilitan el análisis del cumplimiento de los objetivos de la investigación. Además, al estructurar criterios específicos, la rúbrica proporciona un marco detallado para valorar cada tarea realizada en función de los objetivos planteados en el estudio.

Al finalizar la prueba piloto, se recolectaron y analizaron los datos, en los cuales se documentaron las estrategias y dificultades de los participantes. Esta información permitió realizar ajustes en el diseño del taller, asegurando que las actividades fueran claras y facilitando la transición entre los registros semióticos de manera más efectiva.

3. Tercer paso

Después de la prueba piloto y la implementación de ajustes del taller, se llevó a cabo la aplicación final con una muestra de cinco (5) estudiantes seleccionados de las 30 iniciales, destacados por su disposición para participar y sus estudios de cálculo diferencial. Siendo así, se trabajó bajo la metodología de grupo focal, siendo una técnica utilizada para recopilar datos cualitativos al explorar percepciones, aprendizajes y posibles disonancias dentro del grupo frente al taller (Sutton, 2012).

Desde esta perspectiva, a diferencia de enfoques individuales, el grupo focal permite captar la construcción colectiva del conocimiento en un contexto de interacción, donde los participantes pueden expresar ideas, debatir sus conocimientos y generar nuevas reflexiones a partir de las intervenciones. Este método posibilita la identificación de consensos y divergencias, facilitando la comprensión de los procesos cognitivos y sociales involucrados en la investigación.

De igual manera, el grupo focal según Sutton (2012) opera como un espacio de dialogo, donde la interacción de los participantes con la actividad es guiada, pero no restringida, logrando un equilibrio entre el control y la espontaneidad del proceso de investigación.

La actividad consto de:

1. Exploración inicial del problema, donde los estudiantes analizaron la situación y formaron un plan inicial con estrategias para abordar la optimización del área del triángulo formado al doblar la hoja.
2. El uso de registros de representación semiótica, incentivando a los estudiantes a representar el problema en diferentes formas, promoviendo la conversión entre registros.
3. La simulación en GeoGebra, por la cual se solicitó a los estudiantes que utilizarán GeoGebra para construir la representación gráfica del problema y verificar sus resultados mediante herramientas digitales.

4. Discusión y argumentación, etapa donde los estudiantes explicaron sus estrategias y resultados, reflexionando sobre la utilidad de cada registro de representación en la comprensión del problema.

Durante toda la sesión, se realizaron observaciones estructuradas e indicaciones descriptivas, documentando la forma en que los estudiantes transitaban entre los registros semióticos y cómo interactuaban con el software GeoGebra.

Fase 2: Recopilación y análisis de datos

Una vez terminado el taller, se analizó cada una de las respuestas. Lo cual incluyó la recopilación y revisión de las hojas de trabajo de los estudiantes, que contenían representaciones algebraicas, gráficas, tabulares y el uso de GeoGebra.

La intención era entender cómo habían interpretado el problema de optimización, y cómo se había realizado o no la transición de una representación a otra.

Adicionalmente, se consideró analizar el tránsito de lo concreto a lo numérico, los estudiantes doblaron la hoja de papel generando diferentes triángulos rectángulos, de manera simultánea registraron en la tabla las medidas de la base y la altura de cada figura resultante, y con esto se calculó las áreas correspondientes.

Esta etapa es considerada como un acto perceptual semiótico, debido a que la interacción con el material concreto hasta llegar a los números puede representar la construcción de un significado matemático. Según Tamayo (2006), este tipo de representación permite construir visualmente significados antes de su formalización simbólica.

Según la teoría de Duval (1999), el paso de lo concreto (Doblar la hoja) a lo numérico (tabla) puede verse como el tránsito de un registro figural a uno numérico, lo cual permite al estudiante verificar, comparar y predecir relaciones entre variables.

Este tránsito además concibe el uso de material concreto como mediador semiótico, ya que facilita la estructuración del conocimiento matemático a través de su acción, observación y medición (Caicedo, 2013; Balcázar, 2018).

Capítulo 4: Resultados

En este capítulo se analizan los procesos de resolución de cinco estudiantes que participaron en las actividades diseñadas. El análisis se centra en identificar las estrategias utilizadas por los estudiantes, los registros semióticos movilizados y los obstáculos observados en el tránsito entre ellos. Para ello, se utiliza como marco interpretativo la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval, focalizándose en los procesos de tratamiento y conversión entre los registros algebraico, gráfico, numérico, verbal y geométrico, y el Enfoque Ontosemiótico (EOS) para examinar los significados emergentes y los conflictos semióticos en la interacción con los objetos matemáticos.

En primer lugar, se expondrán los resultados numéricos, que serán base para las representaciones gráficas, permitiendo una transacción gradual desde los datos cuantitativos hacia su interpretación visual. A continuación, se presentarán los resultados en su forma algebraica, para luego dar paso a la representación geométrica mediante el uso de GeoGebra, que según Aguilar et al. (2014) es una herramienta que facilita la visualización de conceptos geométricos y matemáticos. Posteriormente, se realizará una representación entre lo geométrico y lo numérico, para identificar interrelaciones. Finalmente, se utilizará el lenguaje natural como mediador semiótico para interpretar y contextualizar los resultados, proporcionando una correlación entre las representaciones abstractas y su comprensión en términos cotidianos (Gruszycki et al., 2014).

De este modo, se presentarán los resultados obtenidos a partir de la revisión del taller aplicado a cinco estudiantes. Se expondrán de manera individual los registros de las representaciones semióticas en los ejercicios, lo que permitirá realizar un análisis preliminar que servirá como base para la propuesta sobre el uso del software GeoGebra.

Estudiante 1.

1. Numérico → Gráfico

Realiza el registro de las medidas de la base y la altura en la tabla, con base en estos datos calcula el área de los triángulos rectángulos generados (Ver anexo 1).

El estudiante procede a graficar la relación entre la base y el área, deduce que la función se ve como una parábola y que el área máxima se encuentra en su vértice (Ver anexo 2).

Esta conversión es una demostración de las actividades cognitivas de tratamiento (reorganización de datos) y conversión (cambio de tabla a gráfico), tal como lo propone Duval (1999).

Desde la perspectiva de Hernández et al. (2017), se encuentra una clara diferenciación funcional en el uso de los registros. Es decir, el estudiante no confundió el objeto matemático (área máxima) con sus representaciones. Esto muestra el tránsito de representación semiótica adecuado, de acuerdo con Duval y Godino.

2. Numérico → Algebraico

El estudiante no escribe una expresión algebraica explícita para esa relación, pero verbalmente afirma que es una función cuadrática. Esto, consecuentemente, induce el tránsito hacia el registro algebraico, pero sin un tratamiento formal de manipulación de símbolos (Ver anexo 3).

Según Valerio et al. (2021), esto está en línea con errores comunes observados en estudiantes que son capaces de identificar patrones, pero no formalizan la expresión algebraica. Quizás haya algún tipo de interferencia semiótica aquí, donde el significado funcional se intuye, pero se deja formalmente sin expresar.

3. Gráfico → Geométrico (GeoGebra)

En la simulación de GeoGebra, el estudiante construye la figura del papel doblado y analiza cómo cambia el valor del área del triángulo en función del movimiento de una esquina. Dicho comportamiento se tabula y se valida gráficamente, mostrando una coordinación entre los tres registros: gráfico, tabular y geométrico (Ver anexo 4).

Esta transición múltiple responde a la articulación de las representaciones en la configuración de significado descrita por Balcázar (2018) y por el Enfoque Ontosemiótico. Por otra parte, asume a GeoGebra como un medio para explorar y validar, lo que mejora la visualización del objeto matemático (Navarro et al., 2016).

4. Geométrico → Numérico

Los valores registrados en la simulación fueron reconocidos por el estudiante como iguales a los de la tabla. Esta comparación puede unificar la comprensión del objeto matemático, ya que diferentes representaciones del área máxima pueden ser directamente contrastadas entre sí (Ver anexo 5).

Estas diferentes representaciones son fundamental en el tránsito semiótico ya que el estudiante muestra flexibilidad en el pensamiento, apoyado por una construcción activa a través de diferentes representaciones externas (Sánchez et al., 2008) y Caicedo (2013).

5. Lenguaje Natural como mediador semiótico

Utiliza un lenguaje explicativo claro para describir las relaciones de proporcionalidad, el comportamiento creciente y decreciente de la función, y para justificar su elección de dónde el área debería ser máxima (Ver anexo 6).

Esto muestra el papel mediador del lenguaje en lo que Tamayo (2006), llama registro mediador, donde se comunican significados matemáticos y se establecen vínculos entre registros.

Conclusión

El estudiante realiza el tránsito de los registros numérico, gráfico, geométrico y verbal, mostrando una comprensión del objeto matemático (área máxima). Aunque el registro algebraico como tal no está completamente desarrollado, se verifica una apropiación del concepto de optimización, con el apoyo de la visualización y la validación tecnológica.

El análisis converge con la propuesta teórica, corroborando la necesidad de fomentar actividades didácticas que permitan establecer diferentes representaciones semióticas, como las proporcionadas por GeoGebra, para potenciar el tránsito de una representación a otra.

Estudiante 2.

1. Numérico → Gráfico

A partir de los valores tabulados, la estudiante ve que el área aumenta hasta un valor máximo y luego disminuye. Y observa que la relación base-área y altura-área corresponde a una función cuadrática (Ver anexo 7).

Esta conversión debe considerarse una movilización semiótica adecuada, ya que traduce datos numéricos en representaciones gráficas y permite la identificación de elementos de la función cuadrática como, el vértice la parábola (Ver anexo 8). De acuerdo con Hernández et al. (2017), esta transición permite que la representación de la función sea diferenciada y que se comprenda su comportamiento.

2. Numérico → Algebraico

En lugar de desarrollar la expresión algebraica dada en el enunciado del problema, el estudiante reconoce que la relación entre la base y el área es cuadrática y que la relación entre la altura y el área también es cuadrática. Este reconocimiento refleja un tipo de inferencia simbólica, pero sin un tratamiento formal bajo una expresión algebraica (Ver anexo 9).

Según Valero et al. (2021), refleja una problemática común en los estudiantes que identifican patrones funcionales, pero no logran articularlos simbólicamente. El tránsito de la representación numérica a algebraica es parcial.

3. Gráfico → Geométrico (GeoGebra)

En la simulación de GeoGebra, el estudiante recrea el escenario establecido con el papel doblado y explica los cambios en el área a medida que se arrastra la esquina. Compara los valores derivados de la simulación con los que figuran en la tabla y reconocen que ambos tienen el mismo comportamiento: crece, punto máximo y decrece (Ver anexo 10).

Este tránsito es una transformación entre representaciones gráficas y geométricas (dinámicas), comparando la diferencia con respecto a los datos tabulados. Según Balcázar (2018), Navarro et al. (2016), el uso de GeoGebra como recurso tecnológico permite validar representaciones y refuerza el sentido funcional ante el problema.

4. Geométrico → Numérico

La estudiante reconoce que, aunque no sean idénticos los valores de GeoGebra a los de los manuales, encajan con el mismo comportamiento y punto máximo. Esta comparación permite analizar las representaciones dinámicas que valida resultados y fortalece el tránsito entre registros (Ver anexo 11).

Desde el punto de vista de Duval (1999), esto significa un retorno del registro geométrico (visual y dinámico) al numérico, fortaleciendo el tránsito semiótico sobre el objeto matemático.

6. Lenguaje Natural como mediador semiótico

Durante el taller, la estudiante expone de manera clara los comportamientos de las funciones, los patrones de cambio y la relación entre los resultados (Ver anexo 12).

Emplea el lenguaje para aclarar, justifificar y contrastar los diferentes registros, lo que la con vierte en un mediador esencial, según lo indicado por Tamayo (2006) y Caicedo (2013).

Conclusión

La estudiante realiza el tránsito de una representación a otra de manera coherente, logra pasar de lo concreto, numérico, tabular, gráfico, geométrico y verbal, apoyada en la observación, la comparación y el uso de GeoGebra como herramienta de validación. Aunque el registro algebraico no se desarrolla de manera explícita, hay una apropiación significativa del problema de optimización a través del uso coordinado de representaciones. El análisis evidencia que la estudiante construye significados matemáticos a partir de la exploración gráfica y análisis verbal, lo cual es coherente con el marco teórico de la investigación.

Estudiante 3.

1. Numérico → Gráfico

El estudiante analiza el comportamiento funcional al graficar las relaciones entre base y área, así como altura y área. Reconoce que ambas funciones presentan una forma parabólica y que existe un punto máximo, correspondiente al área máxima (Ver anexo 13).

Este proceso demuestra un manejo y conversión eficaces entre diferentes registros, facilitando visualmente el comportamiento de la función (Ver anexo 14). Según lo expuesto por Hernández et al. (2017), este paso es crucial para fomentar una comprensión del comportamiento de la función desde una perspectiva visual y continua.

2. Numérico → Algebraico

Aunque el estudiante no formula una función simbólica, identifica patrones de proporcionalidad y deduce de manera verbal que el área máxima se alcanza cuando la base y la altura mantienen una proporción similar. Incluso menciona que “la altura es aproximadamente la mitad de la base”, lo que refleja una inferencia estructural (Ver anexo 15).

Valiero et al. (2021) indican que esta dificultad es frecuente cuando los estudiantes identifican patrones sin llegar a formalizarlos. Pineda et al. (2021) sugieren que esto podría atribuirse a la predominancia de un enfoque inductivo que carece de una traducción simbólica. Además, Tamayo (2006) señala que la falta de coordinación entre diferentes registros puede restringir el acceso al objeto matemático, sobre todo si el docente no fomenta dicha conexión.

3. Gráfico → Geométrico (GeoGebra)

En esta fase, el estudiante utiliza GeoGebra para recrear de manera geométrica el contexto del papel doblado, observando las variaciones en el área del triángulo al mover una de sus esquinas. A lo largo de este procedimiento, establece una comparación entre los resultados generados digitalmente, los valores graficados y los que ha registrado manualmente en una tabla, lo que demuestra una coordinación efectiva entre los registros geométrico, gráfico y tabular (Ver anexo 16).

Desde la perspectiva teórica de Duval (1999), es fundamental diferenciar entre el objeto matemático y sus diversas representaciones. En este contexto, GeoGebra se posiciona como una herramienta que permite la validación visual. Navarro et al. (2016) señalan que esta clase de tecnología facilita la exploración de funciones, mientras que Balcázar (2018) enfatiza su función mediadora en la construcción de significados. Asimismo, según lo argumentan Caicedo (2013) y Tamayo (2006), el uso de representaciones visuales externas contribuye a la interiorización de conceptos al establecer un vínculo entre lo numérico y lo visual-geométrico.

4. Geométrico → Numérico

El estudiante compara los resultados de la simulación con los valores que se han tabulado manualmente. Si bien detecta ligeras discrepancias en los valores del área máxima, admite que el comportamiento general es consistente en ambos casos. Esta validación demuestra una transición del registro visual-geométrico al numérico, lo que refuerza la comprensión del fenómeno (Ver anexo 17).

De acuerdo con Duval (1999), esta conversión no solo implica transferir información entre registros, sino también asegurar su coherencia. En este contexto, el estudiante emplea el registro numérico para corroborar y ajustar lo que ha observado de manera geométrica. Navarro et al. (2016) indican que tales comparaciones refuerzan el sentido funcional, y según Balcázar (2018), esta articulación promueve la consolidación de significados a través del uso integrado de tecnología y representaciones externas.

5. Lenguaje Natural como mediador semiótico

A lo largo de sus respuestas, el estudiante emplea el lenguaje para ilustrar las relaciones entre las variables, justificar sus decisiones y clarificar la variación del área. Si bien su exposición no siempre es técnicamente correcta, desempeña un papel significativo como intermediario entre lo observado y lo entendido (Ver anexo 18).

Según Tamayo (2006), el lenguaje natural facilita la expresión de ideas matemáticas antes de que sean formalizadas, lo que favorece la asimilación de significados. Caicedo (2013) también indica que este tipo de representación es fundamental para vincular lo concreto con lo abstracto. En este contexto, el lenguaje asiste al estudiante en la articulación de lo visual, lo numérico y lo gráfico, aunque aún presenta algunas limitaciones en términos de rigor conceptual.

Conclusión

El estudiante efectúa una transición semiótica y bien estructurada entre los registros figural, numérico, gráfico, geométrico y verbal, empleando de manera significativa GeoGebra como herramienta de exploración. Aunque no presenta la función de manera algebraica, muestra una comprensión del problema de optimización a través del análisis de patrones, proporciones y validaciones cruzadas. Este desarrollo es consistente con el marco teórico de la investigación y evidencia una construcción sustancial del conocimiento matemático a partir del uso coordinado de diferentes registros de representación.

Estudiante 4.

1. Numérico → Gráfico

La estudiante representa gráficamente los datos obtenidos de las mediciones manuales, mostrando la relación entre la base y el área, así como entre la altura y el área (Ver anexo 19). Reconoce visualmente la forma parabólica de los gráficos y localiza el punto donde se alcanza el área máxima. Este proceso demuestra una comprensión funcional que se manifiesta gráficamente, permitiendo interpretar la tendencia general del comportamiento de las variables (Ver anexo 20). De acuerdo con Duval (1999), este enfoque gráfico facilita la construcción de significados globales a partir de datos específicos. Además, Hernández et al. (2017) apuntan que estas representaciones gráficas permiten observar claramente la evolución de la función, lo que mejora la interpretación visual continua del objeto en estudio.

2. Numérico → Algebraico

En sus respuestas, la estudiante no formula una expresión simbólica, pero reconoce una relación funcional entre las variables. Por ejemplo, menciona que "el área parece ser la mitad de la base", lo cual indica un razonamiento más estructurado, aunque no esté formalizado algebraicamente (Ver anexo 21). Esta transición parcial hacia lo algebraico es común cuando el enfoque inductivo no se conecta con el registro simbólico (Valiero et al., 2021; Pineda et al., 2021). Tamayo (2006) también advierte que, si el docente no facilita explícitamente el paso entre registros, es posible que los estudiantes permanezcan en niveles intuitivos sin alcanzar una formulación algebraica general.

3. Gráfico → Geométrico (GeoGebra)

Durante la modelación en GeoGebra, la estudiante observa cómo cambia el área del triángulo al ajustar la posición de uno de los vértices del papel doblado. Al comparar estos resultados con los gráficos previamente elaborados y con los datos obtenidos manualmente, confirma que el punto del área máxima es similar con todos los registros utilizados. Esta correlación demuestra una conversión efectiva entre lo gráfico, lo geométrico y lo tabular (Ver anexo 22). Según Duval (1999), esta habilidad para relacionar diferentes representaciones es crucial para un control semiótico adecuado del objeto matemático. Además, autores como Navarro et al. (2016) y Balcázar (2018) resaltan el valor de GeoGebra como una herramienta que fomenta tanto la visualización funcional como la experimentación estructurada.

4. Geométrico → Numérico

La estudiante establece conexiones entre los valores obtenidos en la simulación y aquellos registrados manualmente. Aunque nota que no son idénticos, reconoce su cercanía y consistencia en términos funcionales (Ver anexo 23). Esto indica una validación entre registros que refuerza su comprensión del problema desde diversas perspectivas. Duval (1999) sostiene que esta verificación entre representaciones fortalece la aprehensión del objeto matemático. Asimismo, Navarro et al. (2016) señalan que este tipo de comparación contribuye a consolidar el sentido funcional en los estudiantes al corroborar sus predicciones iniciales.

5. Lenguaje Natural como mediador semiótico

La estudiante utiliza lenguaje natural para describir, argumentar y reflexionar sobre las relaciones existentes entre las variables y cómo cambia el área (Ver anexo 24). A pesar de que algunas expresiones son intuitivas, logra comunicar lo que entiende. Tamayo (2006) afirma que el lenguaje representa un registro esencial para expresar ideas matemáticas antes de su formalización. Igualmente, Caicedo (2013) destaca que el lenguaje verbal ayuda a conectar diferentes representaciones, especialmente durante la construcción del significado de un concepto matemático desde perspectivas gráficas, numéricas y visuales.

Conclusión

La estudiante utiliza coherentemente diversos registros de representación: numérico, gráfico, geométrico y verbal. Aunque no expresa simbólicamente la función matemática, interpreta con claridad las relaciones funcionales subyacentes. El uso de GeoGebra junto con comparaciones entre registros y su capacidad para razonar visualmente le permiten desarrollar una comprensión significativa acerca del problema de optimización; todo esto está alineado con los referentes teóricos abordados en esta investigación y evidencia un avance en su consolidación del conocimiento matemático mediante transiciones entre distintos registros semióticos.

Estudiante 5

1. Numérico → Gráfico

El estudiante establece gráficamente la relación entre la base y el área, así como entre la altura y el área. Reconoce correctamente que ambas gráficas tienen una forma parabólica y que existe un punto en el que se alcanza el área máxima (Ver anexo 25). Esta representación le ayuda a visualizar el comportamiento general de la función, facilitando la identificación del valor máximo sin depender únicamente de cálculos (Ver anexo 26). Según Duval (1999), este enfoque gráfico permite entender una función en su totalidad, más allá de valores individuales. Hernández et al. (2017) destacan que estas representaciones gráficas favorecen la interpretación continua del fenómeno funcional y su análisis visual.

2. Numérico → Algebraico

Aunque el estudiante no formula una función simbólica, identifica explícitamente relaciones de proporcionalidad entre base y altura, deduciendo que el área máxima se produce cuando ambos valores son equivalentes (Ver anexo 27). Estas observaciones reflejan una comprensión funcional que aún no se traduce en una expresión algebraica formalmente definida. Esta situación es habitual cuando los estudiantes fundamentan su análisis en regularidades observadas sin elaborar una generalización simbólica (Valiero et al., 2021; Pineda et al., 2021). Además, Tamayo (2006) advierte que, sin una clara articulación entre registros, la transición hacia la formalización simbólica puede quedar incompleta.

3. Gráfico → Geométrico (GeoGebra)

En la modelación con GeoGebra, el estudiante reconstruye el escenario del papel doblado y examina cómo varía el área al mover una esquina (Ver anexo 28). Compara esta representación con los datos tabulados y graficados previamente, reconociendo patrones similares. Este proceso evidencia una coordinación entre los registros gráfico, tabular y geométrico-dinámico. Como señala Duval (1999), esta conversión valida que diferentes registros representan un mismo objeto matemático. Navarro et al. (2016) indican que herramientas como GeoGebra promueven una comprensión funcional a través de la experimentación visual, mientras Balcázar (2018) subraya su valor como mediador para construir significados.

4. Geométrico → Numérico

El estudiante contrasta los resultados obtenidos en la simulación con los datos registrados manualmente y concluye que, aunque hay mínimas diferencias, el comportamiento general es consistente (Ver anexo 29). Este paso muestra cómo se convierte un registro visual-dinámico a uno numérico, lo cual permite validar resultados y fortalecer el sentido funcional del problema planteado. Duval (1999) sostiene que esta verificación entre registros es esencial para llevar a cabo el transito semiótico. Por otro lado, Navarro et al. (2016), sugieren que estas comparaciones ayudan a confirmar hipótesis funcionales previamente formuladas.

5. Lenguaje Natural como mediador semiótico

El estudiante emplea lenguaje natural para describir las relaciones funcionales entre variables, justificar sus observaciones y reflexionar sobre la coherencia entre diferentes registros. (Ver anexo 30) Aunque algunas expresiones son informales, cumplen con la función de conectar los diversos registros utilizados. Tamayo (2006), menciona que el lenguaje natural permite al estudiante articular ideas matemáticas aún no formalizadas adecuadamente. En línea con esto, Caicedo (2013), destaca que este tipo de representación favorece la conexión entre lo concreto, lo visual y lo simbólico cuando aún se está formando el pensamiento algebraico.

Conclusión

El Estudiante realiza el tránsito semiótico a través de los registros numérico, gráfico, geométrico y verbal. A pesar de no desarrollar una expresión algebraica formalizada, identifica relaciones funcionales y valida sus observaciones mediante diversas representaciones. El uso de GeoGebra fortalece su comprensión visual y contribuye a consolidar su razonamiento funcional. Estas acciones son coherentes con los referentes teóricos de esta investigación, reflejando una apropiación significativa del problema de optimización mediante un uso articulado de registros semióticos.

Análisis General

Uno de los ejes centrales en el análisis de los cinco estudiantes es la manera en que coordinan los distintos registros de representación semiótica al abordar los problemas de optimización. Según la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (1999), comprender un objeto matemático no implica únicamente operarlo dentro de un único sistema de signos, sino reconocerlo, tratarlo y convertirlo entre múltiples registros: algebraico, gráfico, geométrico, numérico y verbal. Desde esta perspectiva, el aprendizaje significativo de las matemáticas requiere que el estudiante establezca correspondencias entre registros, es decir, que no solo convierta una forma a otra, sino que mantenga el significado del objeto matemático durante esa conversión.

En los casos analizados, se observó que la mayoría de los estudiantes presentaron una coordinación parcial entre registros, con fortalezas en los registros geométrico, gráfico y numérico, especialmente cuando utilizaron GeoGebra como herramienta de apoyo. Estos registros resultaron más accesibles para la exploración inicial del problema, la identificación de patrones y la visualización de comportamientos funcionales (como máximos o mínimos). Este proceso evidencia una actividad de conversión semiótica, entendida por Duval (1999), como el paso de una representación en un registro a otra representación de un mismo objeto en un registro diferente, lo cual es central para la comprensión de conceptos matemáticos.

Todos los estudiantes iniciaron con una tabulación de datos (registro numérico), en la que calcularon las áreas resultantes a partir de distintas configuraciones del triángulo rectángulo formado al doblar una esquina del papel. Este paso inicial evidencia una comprensión funcional básica del problema y una organización sistemática de datos que les permitió identificar regularidades.

Posteriormente, todos realizaron una conversión gráfica de esos datos: construyeron representaciones en el plano cartesiano que mostraban la relación entre una variable (por ejemplo, la base del triángulo) y el área resultante. En todos los casos, los estudiantes identificaron que la curva obtenida tenía forma de parábola y señalaron correctamente la existencia de un punto máximo, lo que revela que pudieron vincular visualmente la noción de máximo relativo con la forma geométrica de la gráfica. Esta habilidad indica un uso funcional del registro gráfico, más allá de una simple reproducción mecánica.

El paso siguiente involucró el uso de GeoGebra para modelar el problema. Al manipular la construcción geométrica dinámica del papel doblado, los estudiantes exploraron cómo cambia el área al modificar la posición de la esquina. Esta experiencia permitió conectar el comportamiento geométrico visual del triángulo con los valores numéricos previamente tabulados y con las gráficas construidas. De esta forma, los estudiantes realizaron una coordinación entre el registro geométrico (visual/dinámico), el gráfico (gráfica cartesiana) y el numérico (valores tabulados).

Este tránsito no solo fue una actividad mecánica, sino que en varios casos (como en el Estudiante 1 y Estudiante 4) se observó un proceso reflexivo en el que los estudiantes verificaban la correspondencia entre representaciones, identificaban puntos clave (como el vértice de la parábola) y justificaban sus conclusiones a partir de la consistencia entre registros. Aquí se evidencia lo que Duval denomina tratamiento y conversión integrados, lo cual es un signo de comprensión conceptual.

Además, desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico (EOS), este tránsito representa un proceso de asignación de significados mediante la interacción con distintos sistemas de representación. GeoGebra funcionó como un medio de exploración semiótica, donde el significado del objeto matemático no se derivó de una única representación, sino de la convergencia interpretativa entre varias. En palabras de Balcázar (2018), esta interacción entre representaciones externas y cognitivas configura un entorno donde el conocimiento matemático se construye activamente, y no se transmite de forma estática.

No obstante, se evidenciaron dificultades importantes en el registro algebraico, tanto en su producción como en interpretación. Aunque el taller no solicitaba explícitamente la formulación de una expresión algebraica, se observó que, a pesar de que algunos estudiantes reconocieron la naturaleza cuadrática de la relación entre las variables y verbalizaron ciertas regularidades funcionales, ninguno logró traducir estos hallazgos a una representación simbólica formal. Esto concuerda con lo planteado por Valiero et al. (2021) y Pineda et al. (2021), quienes identifican como frecuente este tipo de bloqueo en estudiantes que intuyen patrones, pero enfrentan dificultades para formalizarlos algebraicamente.

Por ejemplo, el estudiante 1 afirma que la relación es una parábola, y otros como el Estudiante 3 o 5 mencionan que "el área es mayor cuando base y altura son iguales" o que “la altura es la mitad de la base”, lo que indica que intuyen la forma funcional del comportamiento, pero no logran formalizar esa intuición en términos algebraicos.

Este hallazgo es coherente con lo planteado por Duval (1998), quien sostiene que uno de los principales obstáculos para el aprendizaje de las matemáticas reside en la dificultad para efectuar conversiones entre registros —especialmente hacia el registro algebraico, que requiere operar con un sistema simbólico abstracto y altamente codificado. A menudo, los estudiantes comprenden la situación desde una perspectiva visual o numérica, pero no logran realizar la traducción a la forma simbólica sin perder el significado del objeto.

Desde el punto de vista de la TRRS, como señalan Valiero et al. (2021), es común que los estudiantes reconozcan patrones y hagan inferencias funcionales sin desarrollar la habilidad para construir expresiones algebraicas formales. Esta disociación entre la comprensión intuitiva y la expresión simbólica podría estar vinculada a una insuficiente coordinación entre registros, o a una falta de significado asociado al lenguaje algebraico, que es visto frecuentemente como una técnica aislada y mecánica.

Desde una perspectiva didáctica, esta falta de coordinación completa entre registros pone de manifiesto que la producción y conversión entre representaciones no ocurre de manera automática, sino que requiere una intervención explícita por parte del docente y una secuencia didáctica que guíe dicho tránsito. Además, revela la importancia de tareas que demanden la articulación intencionada entre registros, y no solo su tratamiento aislado.

Asimismo, el uso de GeoGebra favoreció una comprensión funcional del problema, aunque no necesariamente estructural. Es decir, los estudiantes comprendieron "cómo se comporta" el área al mover una esquina del papel, pero no todos pudieron generalizar ese comportamiento en términos algebraicos. Esta diferencia entre la comprensión funcional (exploración de lo que ocurre) y estructural (capacidad de generalizar y simbolizar) es una distinción relevante desde el EOS y desde la TRRS, y puede orientar futuras propuestas didácticas para equilibrar ambos aspectos.

Desde el enfoque del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento Matemático (EOS), GeoGebra actúa como un artefacto semiótico institucional que los estudiantes incorporan en su práctica. Su valor no reside únicamente en lo que muestra, sino en cómo es interpretado por quienes lo utilizan. En los cinco casos, se observó que los estudiantes atribuyeron sentido al problema a partir de la interacción con el software, estableciendo relaciones entre las variaciones observadas y los conceptos matemáticos implicados (como el vértice de la parábola, el punto de área máxima, o la proporción base-altura). Esto indica que, al menos en los registros visuales y numéricos, GeoGebra potenció la producción de significados contextualizados, lo cual se alinea con los principios del EOS.

Por otra parte, en términos didácticos, GeoGebra ayudó a transformar el rol del estudiante. En lugar de adoptar una actitud pasiva, los participantes tomaron decisiones, formularon conjeturas y validaron activamente sus ideas. Este tipo de participación, que permite la construcción de conocimiento mediante la interacción y la exploración, es uno de los principales aportes del software, como también lo destacan Portillo et al. (2019) y Córdoba et al. (2015). No obstante, para que esta actividad sea significativa, debe estar mediada por tareas bien diseñadas que obliguen al estudiante a transitar entre registros y a reflexionar sobre lo que ve, lo que representa y lo que significa.

En conclusión, los hallazgos de esta investigación destacan la importancia de diseñar experiencias educativas que promuevan el tránsito entre registros semióticos, el uso significativo de herramientas tecnológicas y la integración de enfoques teóricos que comprendan el aprendizaje matemático como una actividad situada, contextualizada y semióticamente mediada. Esta mirada permite repensar las prácticas de enseñanza de las matemáticas, no como transmisiones de técnicas, sino como procesos de construcción colectiva de significados.

CONCLUSIONES

Las conclusiones presentadas buscan responder al objetivo de la investigación mediante el diseño de una propuesta didáctica que facilitara el tránsito de los registros de representaciones semióticas de los objetos matemáticos relacionados con la resolución de problemas de optimización, mediante el uso efectivo del software GeoGebra. A partir de los resultados obtenidos y el análisis de la experiencia realizada con los estudiantes, se presentan a continuación las conclusiones que dan cuenta del objetivo y los hallazgos de investigación.

En ese sentido, se hizo uso de una metodología cualitativa, utilizando como un instrumento un taller aplicado a estudiantes de grado undécimo. Se buscó generar condiciones para analizar las formas en que los estudiantes transitan entre los registros numéricos, gráficos, geométricos, algebraicos y verbales. Así, las conclusiones integran la propuesta respondiendo al objetivo y los aspectos relevantes del trabajo, ofreciendo una visión comprehensiva del impacto pedagógico, didáctico y teórico sobre el aporte que representa en el campo de la educación la matemática contemporánea.

Primeramente, se establecen contribuciones desde el diseño didáctico y el uso de GeoGebra, pues permitió una aproximación progresiva y significativa a los conceptos abordados en la optimización matemática. Para ello, se resalta la manipulación concreta del papel, la tabulación de datos, la representación manual y digital, y el análisis verbal de resultados como diferentes procesos que permitieron una secuencia coherente que promovió en los estudiantes el tránsito entre los registros semióticos. Como bien lo menciona Duval (2006) los obstáculos de los aprendizajes en las representaciones se desarrollan por la dificultad de la diversificación de los registros de representación semiótica y la coordinación de los registros.

En esa línea, GeoGebra jugó un papel importante en el proceso, siendo una herramienta que les permitía a los estudiantes visualizar, manipular y validar los resultados con un enfoque exploratorio y funcional. En efecto, la herramienta comprendió articulación de lo geométrico, y lo gráfico, facilitando la comprensión de la estructura funcional detrás del problema. Por ende, se comprobó que el uso de GeoGebra no puede verse de manera aislada, e incluso de las TIC en sí mismas, ya que son herramientas que articulan didácticas y secuencias que complementan la educación tradicional. En este caso, se hizo uso de varias estrategias de andamiaje, incluyendo actividades previas de manipulación concreta, seguida de representaciones gráficas, lo que permitió que los estudiantes por sus propios medios construyeran una comprensión de los conceptos de variación, pendiente y máximos o mínimos, para después ser graficados y profundizados con herramientas tecnológicas. Este enfoque fomenta un aprendizaje activo y significativo, alejándose de modelos tradicionales centrados únicamente en la transmisión de contenidos.

La investigación evidenció que el tránsito entre registros no es lineal, requiere de andamiajes y acompañamiento mediante una guía basada en la educación horizontal, donde se potencie los conocimientos de los alumnos y se tenga en cuenta sus capacidades para hacer y consolidar un conocimiento colectivo. Esto incluye la formulación de preguntas orientadoras, la retroalimentación del docente y el uso del lenguaje verbal. El taller se destacó como un recurso potencializador, pues los estudiantes lograron enlazarlo con su diario vivir y cotidianidad, transformando el ejercicio en una herramienta que se externalizo y promovió otros espacios de conocimiento. De igual forma, el lenguaje permitió establecer puentes entre registros, constituyéndose en un vehículo clave para acceder al significado matemático. Este hallazgo refuerza la importancia de incluir explícitamente la argumentación y la comunicación matemática como ejes estructurantes del currículo. Asimismo, se constató que los registros no deben abordarse de forma aislada, sino como un sistema integrado que permite múltiples formas de validación y exploración del objeto matemático.

De esa manera, la propuesta didáctica planteada en esta investigación se basa en un taller que propició el tránsito entre los distintos registros de representación semiótica. En primer lugar, desde ejercicios base cercanos a los estudiantes, luego desde la realización de los ejercicios de manera concreta, y luego con recursos como GeoGebra, la cual favoreció la interacción dinámica de las representaciones. El taller diseñado y aplicado mostró ser pertinente para motivar en los estudiantes la exploración activa de los conceptos de optimización. En especial, las fases de manipulación manual del problema (plegado de papel), la simulación gráfica en GeoGebra y el análisis de las relaciones funcionales permitieron evidenciar cómo se facilita la comprensión del objeto matemático cuando los registros no se trabajan de manera aislada, sino de forma coordinada y complementaria.

Se contribuye así al fortalecimiento de competencias como el pensamiento variacional, el razonamiento funcional y la modelación, a través de problemas contextualizados y actividades que integran lo concreto, lo visual y lo simbólico. La elección de un problema de optimización con contexto manipulativo y cercano a la realidad escolar respondió a la necesidad de situar las matemáticas en experiencias significativas que conecten con el entorno del estudiante.

La investigación aporta a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas al proponer un modelo didáctico fundamentado en la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (Duval) y el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento matemático (EOS). Esta propuesta promueve el tránsito entre registros semióticos mediante el uso de TIC y actividades contextualizadas, que favorecen una participación del estudiante en la construcción del conocimiento. Así, se impulsa una enseñanza significativa en la que el alumno explora, representa, argumenta y valida ideas desde múltiples perspectivas, desarrollando habilidades como la visualización, la interpretación funcional y la modelación.

Para el docente, se ofrece orientaciones centradas en tres ejes: (1) el diseño de tareas didácticas que integren situaciones contextualizadas y abiertas, donde los estudiantes puedan explorar distintas formas de representación; (2) la incorporación de recursos tecnológicos como GeoGebra, articulados con propósitos pedagógicos claros que permitan visualizar, experimentar y validar conceptos matemáticos; y (3) el fortalecimiento del pensamiento algebraico mediante actividades que promuevan la traducción, conversión y coordinación entre registros semióticos. Se trata de una práctica reflexiva que exige un rol más activo del profesor como mediador cognitivo y diseñador de experiencias de aprendizaje, capaz de generar ambientes dinámicos donde se privilegie la indagación, el error como oportunidad y la evaluación formativa como acompañamiento real del proceso.

En conclusión, este trabajo ha permitido una sistematización de los procesos de tránsito semiótico en problemas de optimización, apoyados en el Enfoque Ontosemiótico y la teoría de

Duval. En igual sentido, la triangulación de datos mediante observación directa, producción estudiantil y simulación digital permitió un análisis profundo y coherente de las prácticas de los estudiantes, estableciendo un modelo replicable y adaptable para futuras investigaciones o intervenciones didácticas que busquen integrar tecnologías digitales al aprendizaje matemático.

Finalmente, esta propuesta constituye un aporte al campo de la didáctica de las matemáticas, con implicaciones prácticas y teóricas relevantes para la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje en el nivel de educación media. De igual forma, se invita a repensar la formación docente, la integración efectiva de la tecnología, y la necesidad de una educación matemática centrada en la comprensión, la argumentación y la construcción de sentido. También, a reflexionar sobre el trabajo docente, donde se abren nuevas líneas de investigación en torno al análisis de las trayectorias de aprendizaje, siendo un papel guía en la conversión entre registros y el diseño de secuencias didácticas multimodales que respondan a los retos del contexto educativo actual.

RECOMENDACIONES

A partir de los resultados obtenidos, se identificaron tanto logros como retos en el proceso de transición entre diferentes registros de representación por parte de los estudiantes. Aunque se observan progresos en la transición entre los registros numérico, gráfico, geométrico y verbal, aún existen dificultades en la formalización simbólica, especialmente al avanzar hacia el registro algebraico. Además, la incorporación de herramientas tecnológicas como GeoGebra se establece como un recurso didáctico eficaz para investigar, validar y profundizar en el razonamiento funcional. En este contexto, con el objetivo de contribuir a la práctica docente y al diseño de propuestas didácticas que fomenten una comprensión más sólida de los objetos matemáticos, se presentan a continuación algunas recomendaciones:

Diseñar secuencias didácticas que faciliten la transición entre diferentes registros: Los talleres deben incluir de manera explícita actividades que requieran a los estudiantes moverse entre lo concreto, lo visual, lo simbólico y lo verbal, con el objetivo de fortalecer la comprensión del objeto matemático.

Incorporar tecnologías como GeoGebra desde un enfoque exploratorio y reflexivo: Más allá de su aplicación técnica, esta herramienta debe ser utilizada para apoyar la validación de conjeturas, facilitar la visualización funcional y permitir comparaciones entre distintos registros, promoviendo así una experiencia matemática significativa.

Fomentar el uso del lenguaje como herramienta para el aprendizaje.
El docente debe estimular la argumentación verbal y la descripción de procesos como estrategias para conectar representaciones, justificar procedimientos y construir significado, especialmente en aquellos estudiantes que aún no han formalizado sus ideas simbólicamente.

REFERENCIAS

Aguilar, B., Illanes, L., & Zúñiga, L. (2014). *Resolución de problemas matemáticos con el método de Polya mediante el uso de GeoGebra*. Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación, 1, 1–22. https://www.oei.es/historico/congreso2014/memoriactei/1190.pdf

Álvarez, M., Almeida, B., & Villegas, E. (2014). *El proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática*. La Habana: Pueblo y Educación.

Alonso, I., Gorina, A., Iglesias, N., & Álvarez, J. (2017). *Pautas para implementar la enseñanza de la Matemática a través de la resolución de problemas.* Cuba: Rev. Maestro y Sociedad.

Augusto, F., & Yañez, J. (2016). *Las competencias tic y su relación con las habilidades para la solución de problemas de matemáticas*. file:///D:/Las_competencias_TIC_y_su_relacion_con_las_habilid.pdf

Aznar, M., Moler, E., & Pesa, M (2017). *Conversiones de representaciones de números complejos desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico*. Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Retrieved February 9, 2024, from https://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/aznar.pdf

Balcázar, T. (2018). *Investigación acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la optimización en Bachillerato, desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico y de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica*. https://enfoqueontosemiotico.ugr.es/tesis/Tesis_TBalcázar.pdf

Caicedo, S. (2013). *Pensamiento variacional de estudiantes de grado noveno de educación básica aplicado en el proceso de resolución de situaciones problema que se pueden modelar con una función cuadrática*. Colombia: Universidad Del Tolima.

Cervantes, J. A., Ordoñez, J. S., García, M. D. S., & Hernández-Moreno, A. (2017). *Teoría de registros de representaciones semiótica*. Universidad Autónoma de Guerrero.

Córdoba, Y., Ruiz, K. Y., & Rendón, C. E. (2015). *La comprensión del concepto de derivada mediante el uso de GeoGebra como propuesta didáctica*. Repositório Digital de Documentos En Educación Matemática, 1.

Cruzado, E. (2018). *Problemas de optimización mediados por el GeoGebra que movilizan el concepto de derivada de funciones reales de variable real en estudiantes de ingeniería*.

Dávila, M. (2010). *La derivada a partir de problemas de optimización en ambientes dinámicos creados con GeoGebra*. *Universidad de Sonora, México*.

De Faria, E. (s.f.). *La tecnología y las múltiples representaciones*. Universidad de Costa Rica. https://audentiagestion.fr/TEXASINSTRUMENTSEDUCATION/La_tecnologia_y_las_multiples_representaciones.pdf

Duval, R. (2016). *Comprensión a aprendizaje en matemáticas:Perspectivas semioticas seleccionadas*. https://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/comprension_y_aprendizaje_en_matematicas_perspectivas_semioticas_seleccionadas.pdf

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. Investigaciones en Matemática Educativa II, 173–201. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizaje*s. Universidad del Valle. Cali. Colombia.

Freire, P. (1970). *Pedagogía del oprimido*. Montevideo: Tierra Nueva. Sacado de: https://www.servicioskoinonia.org/biblioteca/general/FreirePedagogiadelOprimido.pdf

Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). *La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática*. https://www.redalyc.org/pdf/335/33511205.pdf

Gruszycki, A., Oteiza, L., Maras, P., Gruszycki, L., & Ballés, H. (2014). *Geogebra y los sistemas de representación semióticos.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 5. http://funes.uniandes.edu.co/6186/

Porillo, H., Ávila, M., & López, C. (2019). *La derivada y el uso de GeoGebra en problemas de optimización*. https://recacym.org/index.php/recacym/article/view/41/23

Hernández, R. (2012). *Los procesos cognitivos en la resolución de problemas clásicos de máximos y mínimos en estudiantes de Ingeniería Civil de la Universidad Francisco de Paula Santander*. Revista Ecomatemático, 3(1), 1–14.

Herrera, C. (2012). *Propuesta de intervención en el aula para resolver problemas de optimización relacionados con la minimización de costos, implementando como apoyo el software GeoGebra*. Universidad Pedagógica Nacional.

López, H. (2024). *Aplicaciones de la derivada mediante un aprendizaje basado en proyectos: un estudio en el bachillerato*. RIDE. Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo, 14(28).

Masih, A., & Monferrato, M. (2012). *Las simulaciones como herramienta de enseñanza de la derivada de funciones de una variable.* Argentina: Universidad Tecnológica Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas: ¡El reto es aprender! Lo que necesitamos saber y saber hacer*. Bogotá: MEN. Imprenta Nacional de Colombia. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89997_archivo_pdf7.pdf

Mojica, D., & Bueno, A. (2009). *Diagnóstico sobre el reconocimiento de la variación con estudiantes de primer semestre de matemáticas aplicadas*. México: Instituto Politécnico Nacional.

Morales, A., Contreras, M., Damián, A., & Locia, E. (2022). *Uso de GeoGebra para mejorar la comprensión de la resolución de problemas de optimización en el bachillerato*. Universidad de los Andes.

Navarro, L., Robles, A., Ansaldo, J., & Castro, F. (2016). *Secuencia didáctica apoyada en tecnología para la construcción del concepto derivada en problemas de optimización*. Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 46, 171–187. http://www.asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/article/view/32/pdf

Oviedo, L., Kanashiro, A., Benzaquen, M., & Gorrochategui, M. (2011). *Los registros semióticos de representación en matemática.* Aula Universitaria, 13. https://doi.org/10.14409/au.v1i13.4112

Pineda, W., Sepúlveda, O., & Romera, G. (2022). *Registros de representación semiótica para la comprensión de la elipse interactuando con GeoGebra*. Revista Boletín Redipe, 11(3). https://doi.org/10.36260/rbr.v11i3.1719

Portillo, H., Ávila, M., Cruz, M., & López, C. (2019). *GeoGebra y Problemas de Optimización.* Cultura Científica y Tecnológica, 16(1). https://doi.org/10.20983/culcyt.2019.1.2.1

Ramos, M. (2018). *Problemas de optimización a la luz de la historia de las Matemáticas en el currículo escolar*. http://hdl.handle.net/20.500.12209/11116

Rojas, P. (2015). *Objetos matemáticos, representaciones semióticas y sentidos.* Enseñanza de Las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 2015, Vol. 33, n.o 1, Pp. 151-165, 151–165. https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/v33-n

Ruiz, J. (2008). *Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la matemática*. Rev. Iberoamericana de Educación: Cuba.

Gatica, S., & Ares, O. (2012). *La importancia de la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos*. Edmetic, 1 (2), 2012, E-ISSN: 2254-0059; Pp.88-107, Revista de Educación Mediática y TIC, 88–107.

Santana, A., Roazzi, A., Pimentel, A. (2022). *The relationship between cognitive flexibility and mathematical performance in children: A meta-analysis*. Trends in Neuroscience and Education.

Stake, R. E. (1995). The art of case study research. Sage Publications.

Yin, R. K. (2003). Case study research: Design and methods (3rd ed.). Sage Publications.

Tamayo, O. (2006). *Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas*. Revista Educación y Pedagogía, 18(45).

Trigo, M., & Benítez, D. (2003). *Herramientas tecnológicas en el desarrollo de sistemas de representación para la resolución de problemas*. México: Instituto de Investigaciones sobre la Universidad y la Educación Distrito Federal, vol. XXV, núm. 100, 2003, pp. 23-41.

Martínez, D (2021). *Competencias matemáticas: una mirada desde las estrategias de enseñanza en educación a distancia*. Góndola, enseñanza y aprendizaje de las ciencias,16(2), 382-398. DOI:https://doi.org/10.14483/23464712.16167

Quiñones, A., & Huiman, H. (2022) *Resolución de problemas con el método matemático de Polya: La aventura de aprender.* Revista de Ciencias Sociales (Ve), vol. Esp. 28, núm. 5, pp. 75-86, Universidad del Zulia

Ureña, N., Blanco, R., & Heredia, W. (2022). *Los problemas de optimización en el cálculo diferencial de una variable.* Transformación, 18(2), 317-335. Recuperado de http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2077-29552022000200317&lng=es&tlng=es.

Valiero, E., Barrionuevo, M., & Villenas, F. (2021). *Ordenamiento de los registros semióticos en la didáctica del álgebra en la escuela secundaria.* Correspondencia con la enseñanza de expresiones algebraicas racionales. Educación Matemática, 33(2). https://doi.org/10.24844/em3302.07

Villamizar, F., Rincón, O., & Vergel, M. (2018). *Diseño de escenarios virtuales para problemas de optimización a través de geometría dinámica*. Revista Logos Ciencia & Tecnología, 10(2).

Villegas, J., Castro, E., & Gutiérrez, J. (2009). Representaciones en Resolución de Problemas: Un estudio de caso con problemas de optimización. Electronic Journal of Research in Education Psychology, 7(17). https://doi.org/10.25115/ejrep.v7i17.1342

Yuni, F., Rachmani, N. (2019). *GeoGebra As a Tool to Enhance Student Ability in Calculus*. UNNES International Conference on Research Innovation and Commercialization 2018, KnE Social Sciences. DOI 10.18502/kss.v3i18.4714

Zambrano, C. (2013). *Pensamiento variacional de estudiantes de grado noveno de educación básica aplicado en el proceso de resolución de situaciones problema que se pueden modelar con una función cuadrática*. Universidad del Tolima.

Zangara, A. (2009). Uso de nuevas tecnologías en la educación: Una oportunidad para fortalecer la práctica docente. https://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/art_revistas/pr.4366/pr.4366.pdf

ANEXOS

Anexo 1. Tabulación numérico estudiante 1.

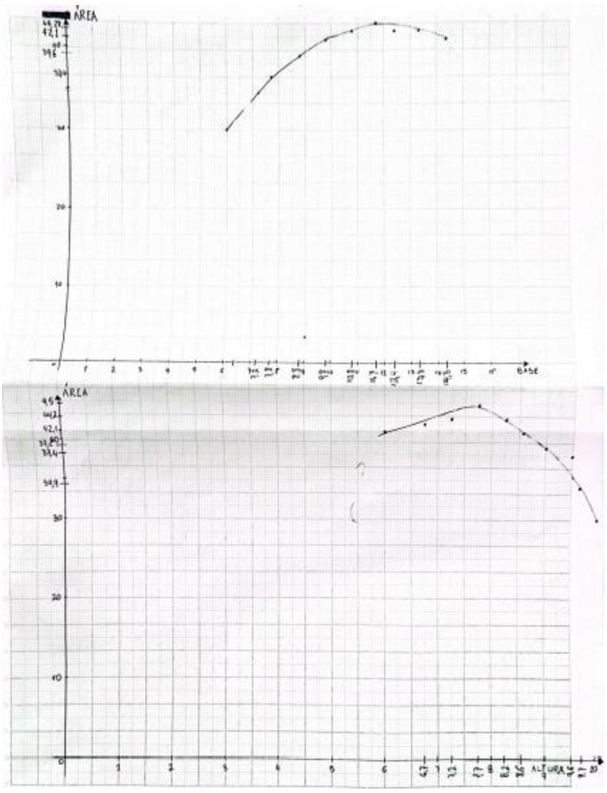
1. Cambie de posición la esquina de la hoja (**E**) sobre el largo de esta y registre como mínimo 10 datos a partir de los triángulos rectángulos generados.

Base	6	7,2	7,8	8,6	9,8	10,8	11,7	12,4	13,3	14,3
Área	~~10~~	~~9,9~~	~~9,9~~	~~9,0~~	~~8,6~~	~~8,2~~	~~7,7~~	~~7,2~~	~~6,7~~	~~6,0~~

30 34,9 37,4 39,6 42,1 44,28 45,0 44,6 44,5 42,9

Altura	10	9,7	9,6	9,0	8,6	8,2	7,7	7,2	6,7	6,0
Área	30	34,9	37,4	39,6	42,1	44,28	45,0	44,6	44,5	42,9

Anexo 2. Gráfica estudiante 1.



a. Al observar la gráfica 1 que relaciona la base y el área. ¿Qué tipo de función parece ser? ¿Qué información proporciona la gráfica sobre el área máxima?

La relación entre la base y el área es directamente proporcional Para una función cuadrática. El área máxima se evidencia por el punto más alto de la parábola

b. Al analizar la gráfica 2 que relaciona la altura y el área. ¿Cómo se comporta el área a medida que cambia la altura?

En la medida que la altura disminuye, el área aumenta, es decir, son inversamente proporcionales

c. ¿Qué relación existe entre la gráfica 1 y 2 respecto al área máxima? ¿Cómo se relaciona las medidas de la base, la altura y el área?

La relación que existe entre la gráfica 1 y 2 radica en el hecho de que el área máxima se muestra en el punto más alto de la gráfica, que para este caso es el vértice de la parábola

Anexo 3. Expresión algebraica estudiante 1.

La relación entre la base y el área es directamente proporcional Para una función cuadrática. El área máxima se evidencia por el punto más alto de la parábola

Anexo 4. Uso de GeoGebra estudiante 1.

4. Teniendo en cuenta la simulación en GeoGebra, responda las siguientes preguntas:

a. ¿Cómo se comparan los valores de la base y la altura del triángulo obtenidos en la simulación de GeoGebra con los registrados manualmente?

La base y la altura son magnitudes inversamente proporcionales

b. ¿Cómo describirías el cambio en el área del triángulo conforme se desliza la esquina en la simulación de GeoGebra? ¿Coincide esta variación con las expectativas basadas en los datos manuales?

El área del triángulo aumenta hasta cierto valor (45,0) cuando la base es 11,7 y la altura es 7,7. A partir de estos valores, el área disminuye.

c. Al observar la relación entre los valores de la base y el área en la tabla, ¿qué patrón se puede identificar? ¿Hay un punto en que el área aumenta y luego empieza a disminuir conforme cambia la base?

Para el caso de los valores de la base se puede afirmar que aumentan en promedio 1 unidad, mientras el área aumenta en promedio 2 unidades cuando la base toma el valor de 11,7, el área empezó a disminuir.

d. Al comparar la gráfica con los datos tabulares, ¿es el punto de área máxima el mismo? ¿Qué tan precisa es esta representación gráfica respecto a los datos manuales?

Sí, en la tabla y en la Gráfica el punto de área máximo corresponde a 45,0, de igual forma se puede verificar en la simulación en GeoGebra

e. ¿Qué pasaría si se cambia el tamaño de la hoja (por ejemplo, usando papel tamaño oficio en lugar de carta)? ¿Cómo afectaría esto al área máxima del triángulo formado? ¿Por qué?

Pienso que el cambio en el Tamaño de la hoja no modificaría el área máxima del triángulo, ya que este aumentaría de forma proporcional al tamaño de la hoja

Anexo 5. Datos numéricos estudiante 1.

d. Al comparar la gráfica con los datos tabulares, ¿es el punto de área máxima el mismo? ¿Qué tan precisa es esta representación gráfica respecto a los datos manuales?

Si, en la tabla y en la Gráfica el punto de área máximo corresponde a 45,0, de igual forma se puede verificar en la simulación en Geogebra

Anexo 6. Lenguaje como mediador semiótico estudiante 1.

En la medida que la altura disminuye, el área aumenta, es decir, son inversamente proporcionales

La relación que existe entre la Gráfica 1 y 2 indica en el hecho de que el área máxima se muestra en el punto más alto de la gráfica, que para este caso es el vértice de la parábola

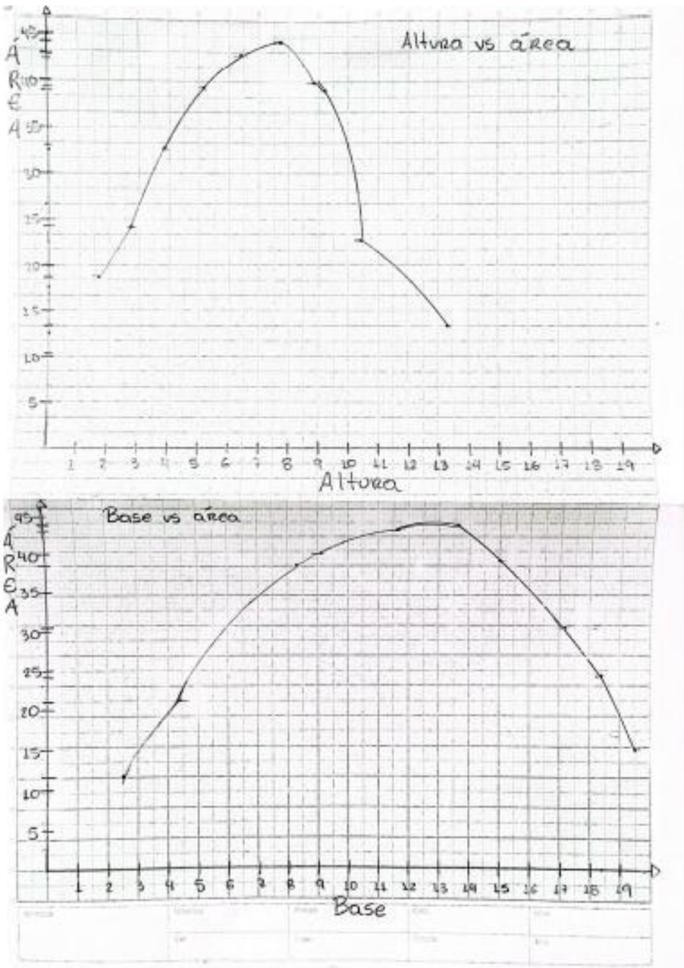
Anexo 7. Tabulación numérico estudiante 2.

1. Cambie de posición la esquina de la hoja (**E**) sobre el largo de esta y registre como mínimo 10 datos a partir de los triángulos rectángulos generados.

Base	8,3	13,6	18,4	11,6	4,4	15	19,5	2,5	9,1	17,2
Área	38,18	43,52	24,84	44,66	22,88	38,25	15,6	13,3	40,04	32,68

Altura	9,2	6,4	2,7	7,7	10,4	5,1	1,6	10,7	8,8	3,8
Área	38,18	43,52	24,84	44,66	22,88	38,25	15,6	13,3	40,04	32,68

Anexo 8. Grafica estudiante 2.



a. Al observar la gráfica 1 que relaciona la base y el área. ¿Qué tipo de función parece ser? ¿Qué información proporciona la gráfica sobre el área máxima?

la funcion es cuadratica y proporciona la informacion de que la base 14,6 es la que tiene el área maxima

b. Al analizar la gráfica 2 que relaciona la altura y el área. ¿Cómo se comporta el área a medida que cambia la altura?

Primero comienza aumentando, hasta que llega al punto maximo. Despues empieza a disminuir

c. ¿Qué relación existe entre la gráfica 1 y 2 respecto al área máxima? ¿Cómo se relaciona las medidas de la base, la altura y el área?

La relacion que existe entre las graficas es que suben hasta el vertice y mientras la base aumenta el área disminuye y viceversa

Anexo 9. Expresión algebraica estudiante 2.

la relacion que hay entre la base y area es que antes de 11,6 en la base, el área aumenta; despues, disminuye.
la relacion que hay entre la altura y area es que antes de 7,7 en la altura, el área aumenta; despues, disminuye

Anexo 10. Uso de GeoGebra estudiante 2.

4. Teniendo en cuenta la simulación en GeoGebra, responda las siguientes preguntas:

a. ¿Cómo se comparan los valores de la base y la altura del triángulo obtenidos en la simulación de GeoGebra con los registrados manualmente?

los valores se pueden comparar ya que, a pesar de haber un desface menor entre los resultados, se sigue evidenciando que las 2 variables son inversamente proporcionales

b. ¿Cómo describirías el cambio en el área del triángulo conforme se desliza la esquina en la simulación de GeoGebra? ¿Coincide esta variación con las expectativas basadas en los datos manuales?

lo describiria como, al principio un incremento del area, luego llega a un punto maximo y empieza a disminuir. Por lo que si se podria considerar que las expectativas son correctas

c. Al observar la relación entre los valores de la base y el área en la tabla, ¿qué patrón se puede identificar? ¿Hay un punto en que el área aumenta y luego empieza a disminuir conforme cambia la base?

Si, conforme la base cambia el area tambien hasta un punto maximo, donde empieza a dis-minuir como se identifica y refleja en los datos

d. Al comparar la gráfica con los datos tabulares, ¿es el punto de área máxima el mismo? ¿Qué tan precisa es esta representación gráfica respecto a los datos manuales?

Al compararlos, el punto maximo es el mismo. Comparandolo con los manuales se podria decir que hay un margen de error pequeño ya que en los manuales fueron 44,66 y en los digitales fue 47,3

e. ¿Qué pasaría si se cambia el tamaño de la hoja (por ejemplo, usando papel tamaño oficio en lugar de carta)? ¿Cómo afectaría esto al área máxima del triángulo formado? ¿Por qué?

Si se cambia el tamaño a uno más grande, por ejemplo, creo que el punto maximo del triangulo aumentaria; ya que habria mas área sobre la cuál poder trabajar

Anexo 11. Datos numéricos estudiante 2.

d. Al comparar la gráfica con los datos tabulares, ¿es el punto de área máxima el mismo? ¿Qué tan precisa es esta representación gráfica respecto a los datos manuales?

Al compararlos, el punto maximo es el mismo.
Comparandolo con los manuales se podria decir
que hay un margen de error pequeño ya que en
los manuales fueron 44,66 y en los digitales fue 42,3

e. ¿Qué pasaría si se cambia el tamaño de la hoja (por ejemplo, usando papel tamaño oficio

Anexo 12. Lenguaje como mediador semiótico estudiante 2.

la relacion que hay entre la base y area es que antes de
11,6 en la base, el área aumenta; despues, disminuye.
la relacion que hay entre la altura y area es que antes de
7,7 en la altura, el área aumenta; despues, disminuye

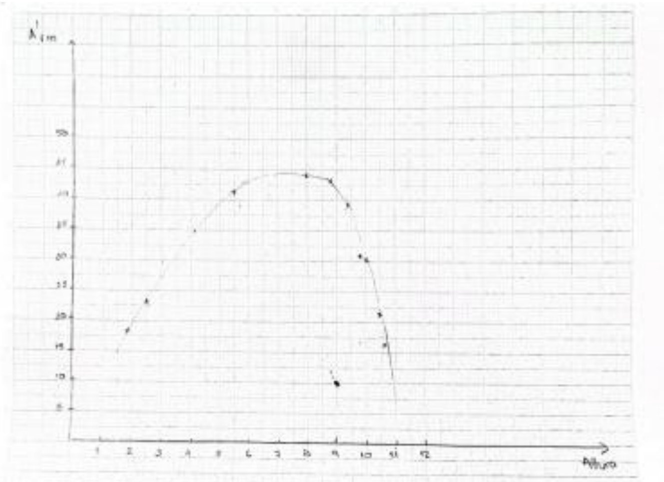
La relacion que existe entre las graficas es que
suben hasta el vertice y mientras la base aumenta
el área disminuye y vice versa

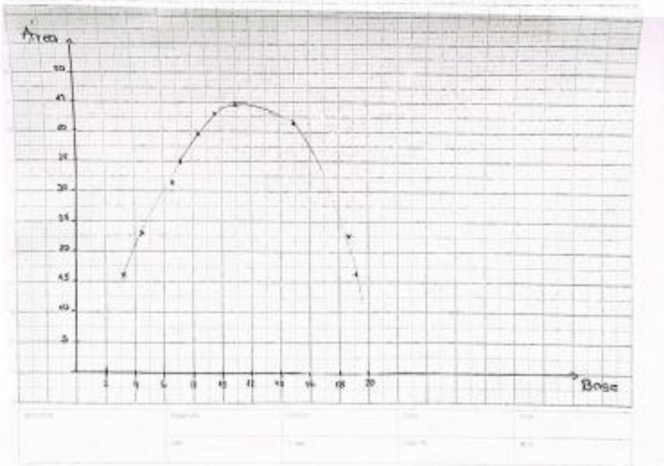
Anexo 13. Tabulación numérico estudiante 3.

Base	3,1 cm	6,6 cm	9,8 cm	15,1 cm	18,9 cm	8,3 cm	11 cm	4,4 cm	19,7 cm	6,3 cm
Área	16,43 cm	32,34 cm	43,12 cm	41,52 cm	23,62 cm	39 cm	44 cm	23,1 cm	17,73 cm	31,18 cm

Altura	10,6 cm	9,8 cm	8,8 cm	5,5 cm	2,5 cm	9,4 cm	8 cm	10,5 cm	1,8 cm	9,9 cm
Área	16,43 cm	32,34 cm	43,12	41,52 cm	23,62 cm	39 cm	44 cm	23,1 cm	17,73 cm	31,18 cm

Anexo 14. Grafica estudiante 3.





a. Al observar la gráfica 1 que relaciona la base y el área. ¿Qué tipo de función parece ser? ¿Qué información proporciona la gráfica sobre el área máxima?

Parece ser una función parabólica, el área máxima de la función se acerca con el valor de base de ≈13 cm, y de ese punto para adelante o atrás se reduce el área.

b. Al analizar la gráfica 2 que relaciona la altura y el área. ¿Cómo se comporta el área a medida que cambia la altura?

El área llega a su punto máximo cuando la altura se acerca a 7,5cm, y después de ese punto el área se reduce; Inicialmente el área aumenta hasta llegar a 7,5 cm y se reduce desde ahí.

c. ¿Qué relación existe entre la gráfica 1 y 2 respecto al área máxima? ¿Cómo se relaciona las medidas de la base, la altura y el área?

La altura es aproximadamente la mitad de la base, con cierta diferencia, y eso parece dar el área máxima del triángulo, h= 7,5cm CA: 13cm.

Anexo 15. Expresión algebraica estudiante 3.

En el caso de la base, se observa una relación directamente proporcional con el área hasta cierto punto, lo mismo sucede con la altura; si se rebasa cierta cantidad el área disminuye.

... dar un área máxima? ¿Se podría deducir el

Anexo 16. Uso de GeoGebra estudiante 3.

a. ¿Cómo se comparan los valores de la base y la altura del triángulo obtenidos en la simulación de GeoGebra con los registrados manualmente?

Se puede ver un tipo de proporción cuando vemos el área máxima, en ambas situaciones las longitudes y los triángulos formados tienen longitudes muy similares lo que permite un área mayor.

b. ¿Cómo describirías el cambio en el área del triángulo conforme se desliza la esquina en la simulación de GeoGebra? ¿Coincide esta variación con las expectativas basadas en los datos manuales?

Considero que si los triángulos no varían tanto en su medida (acercándose a equiláteros) se tiene un área mayor, y eso se evidencia en la simulación, en los datos manuales se evidencia que cuando hay una gran variación, el área es menor.

Anexo 17. Datos numéricos estudiante 3.

d. Al comparar la gráfica con los datos tabulares, ¿es el punto de área máxima el mismo? ¿Qué tan precisa es esta representación gráfica respecto a los datos manuales?

El punto no es el mismo, pero es cercano al área máxima. La representación gráfica es similar a los datos manuales aunque se ve un área máxima mayor.

e. ¿Qué pasaría si se cambia el tamaño de la hoja (por ejemplo, usando papel tamaño oficio

Anexo 18. Lenguaje como mediador semiótico estudiante 3.

En el caso de la base, se observa una relación directamente proporcional con el área hasta cierto punto, lo mismo sucede con la altura; si se rebasa cierta cantidad el área disminuye.

b. ¿Qué valores de la base y la altura parecen dar un área máxima? ¿Se podría deducir el en lugar de carta? ¿Cómo afectaría esto al área máxima del triángulo formado? ¿Por qué?

El área máxima sería mayor, ya que las dimensiones podrían ser mayores lo que permitiría un área máxima más grande que con una hoja tamaño carta

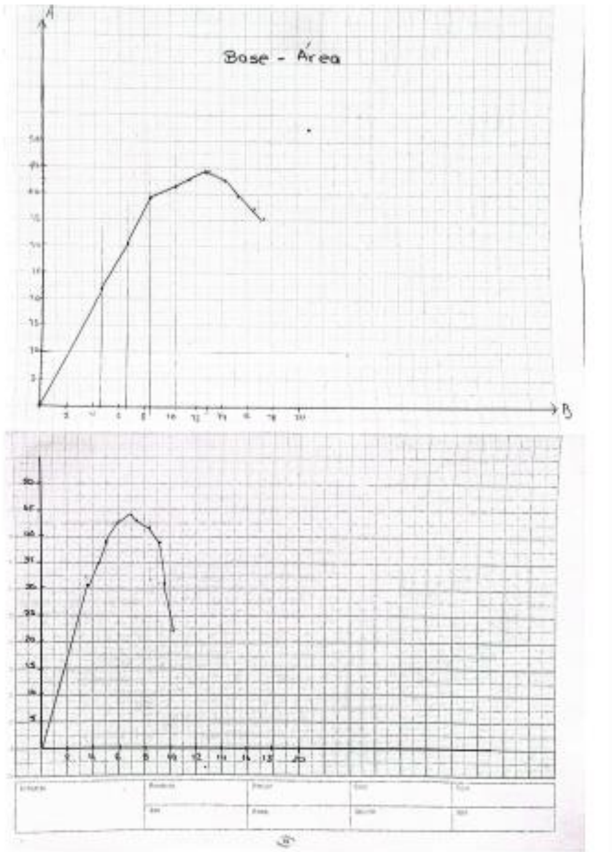
Anexo 19. Tabulación numérico estudiante 4.

datos a partir de los triángulos rectángulos generados.

Base	5,5cm	7,5cm	9,2cm	10,2cm	11,6cm	12,9cm	13,8cm	16,6cm	17,1cm	18,2cm
Área	27,5	35,62	40,02	42,84	44,66	44,50	42,09	34,03	32,49	28,21

Altura	10cm	9,5cm	8,7cm	8,4cm	7,7cm	6,9cm	6,1cm	4,1cm	3,8cm	3,1cm
Área	27,5	35,62	40,02	42,84	44,66	44,50	42,09	34,03	32,49	28,21

Anexo 20. Gráfica estudiante 4.



a. Al observar la gráfica 1 que relaciona la base y el área. ¿Qué tipo de función parece ser? ¿Qué información proporciona la gráfica sobre el área máxima?

Parece ser una función parabólica que nos permite ver que el punto de área máxima está cerca de 44.

b. Al analizar la gráfica 2 que relaciona la altura y el área. ¿Cómo se comporta el área a medida que cambia la altura?

Se ve que, en este caso, el punto máximo llega cuando la altura está entre 7-8. A medida que cambia la altura, disminuye el área.

c. ¿Qué relación existe entre la gráfica 1 y 2 respecto al área máxima? ¿Cómo se relaciona las medidas de la base, la altura y el área?

En ambas gráficas se ve un área máxima cercana a ≈44, el área parece ser la mitad de la base, en algunos casos, dándonos así el área.

Anexo 21. Expresión algebraica estudiante 4.

Cuando la base es menor que la altura, el valor del área es menor, a comparación de cuando la base es mayor que la altura. Podría haber una relación directa entre base-área.

b. ¿Qué valores de la base y la altura parecen dar un área máxima? ¿Se podría deducir el

Anexo 22. Uso de GeoGebra estudiante 4.

a. ¿Cómo se comparan los valores de la base y la altura del triángulo obtenidos en la simulación de GeoGebra con los registrados manualmente?

El área máxima es similar, a mayor base se tiene menor altura. Hay valores en los lados de los triángulos muy similares, esto genera y permite un área mayor. Y vemos que en los registrados manualmente hay relación inversamente proporcional entre base-altura.

b. ¿Cómo describirías el cambio en el área del triángulo conforme se desliza la esquina en la simulación de GeoGebra? ¿Coincide esta variación con las expectativas basadas en los datos manuales?

Cuando la esquina se desliza, el área del triángulo aumenta. Sin embargo, llega un punto en el que este empieza a disminuir. En el triángulo, cuando sus lados llegan a verse "iguales", es su punto de área máxima.

Anexo 23. Datos numéricos estudiante 4.

d. Al comparar la gráfica con los datos tabulares, ¿es el punto de área máxima el mismo? ¿Qué tan precisa es esta representación gráfica respecto a los datos manuales?

Es cercano el punto de área máxima, pues en la tabla se marcó como punto máximo 44, y en la gráfica se ve cerca a 42. Es relativamente precisa la representación gráfica pues nos muestra valores similares más NO iguales.

Anexo 24. Lenguaje como mediador semiótico estudiante 4.

Cuando la base es menor que la altura, el valor del área es menor, a comparación de cuando la base es mayor que la altura. Podría haber una relación directa entre base-área.

b. ¿Qué valores de la base y la altura parecen dar un área máxima? ¿Se podría deducir el

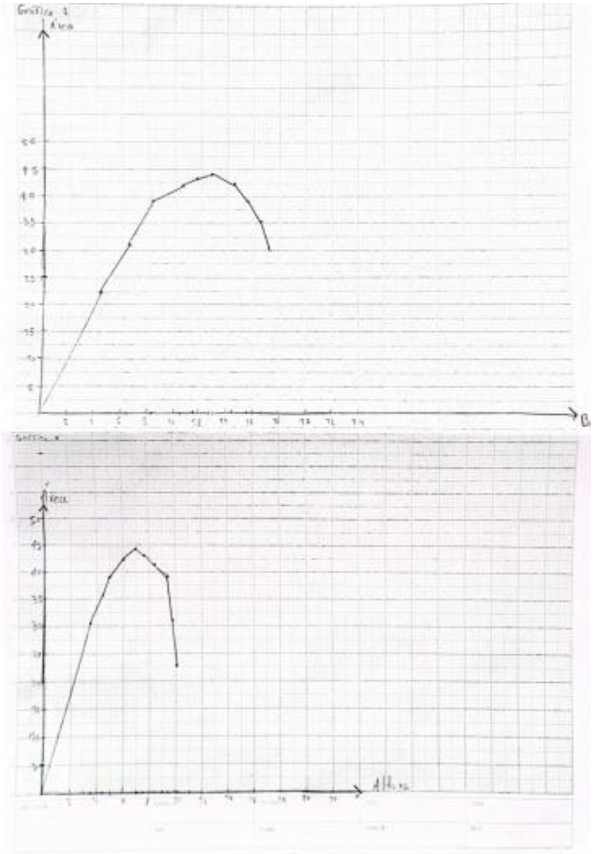
El tamaño cambiaría, lo que significa que sus dimensiones también, entonces, al ser tamaño cierto podría llegar haber un área máxima mayor.

Anexo 25. Tabulación numérico estudiante 5.

Base	4,5	6,5	8,3	10,4	11,6	14,2	12,1	15,6	16,7	17,5
Área	22,95	31,52	38,59	42,64	43,5	42,6	44,45	39	35,9	30,62

Altura	10,2	9,7	9,3	8,2	7,5	6	4	5	4,3	3,5
Área	22,95	31,52	38,59	42,64	43,5	42,6	44,45	39	35,9	30,62

Anexo 26. Gráfica estudiante 5.



a. Al observar la gráfica 1 que relaciona la base y el área. ¿Qué tipo de función parece ser? ¿Qué información proporciona la gráfica sobre el área máxima?

Parece ser una función cuadrática (Parabola), en específico abre hacia abajo, por la cual, la info que proporciona es que hay un dato el cual es el más optimo o gueste el valor máximo con respecto al área.

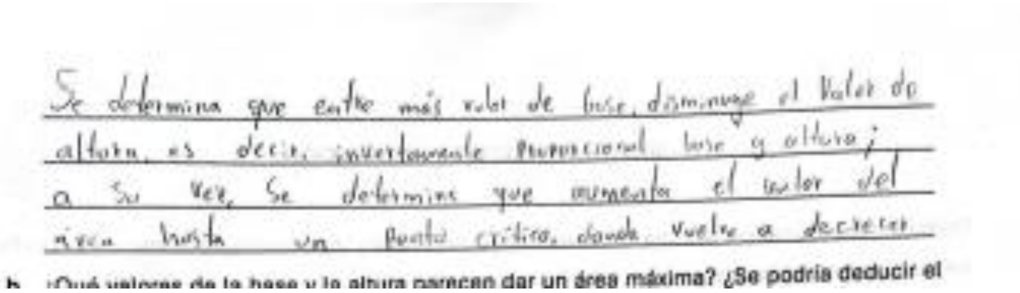
b. Al analizar la gráfica 2 que relaciona la altura y el área. ¿Cómo se comporta el área a medida que cambia la altura?

a medida que cambia la altura, el área llega a una imagen que es el máximo posible en cm^2. Por lo que hay un dato el cual es el más optimo al obtener un área máxima.

c. ¿Qué relación existe entre la gráfica 1 y 2 respecto al área máxima? ¿Cómo se relaciona las medidas de la base, la altura y el área?

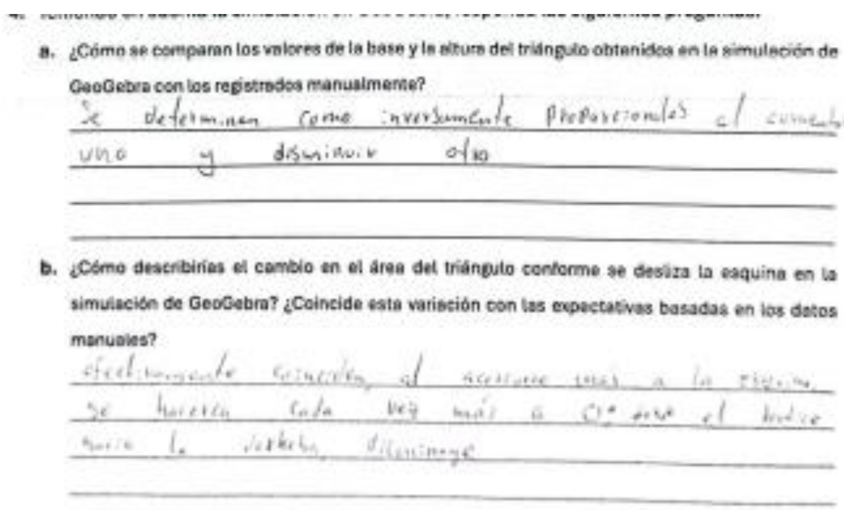
Dependiendo del base y altura (variables independientes) se llega a un dato claro (dependiente) con respecto al área.

Anexo 27. Expresión algebraica estudiante 5.


Se determina que entre más valor de base, disminuye el valor de altura, es decir, inversamente proporcional base y altura; a su vez, se determina que aumenta el valor del área hasta un punto crítico, donde vuelve a decrecer

b. ¿Qué valores de la base y la altura parecen dar un área máxima? ¿Se podría deducir el

Anexo 28. Uso de GeoGebra estudiante 5.

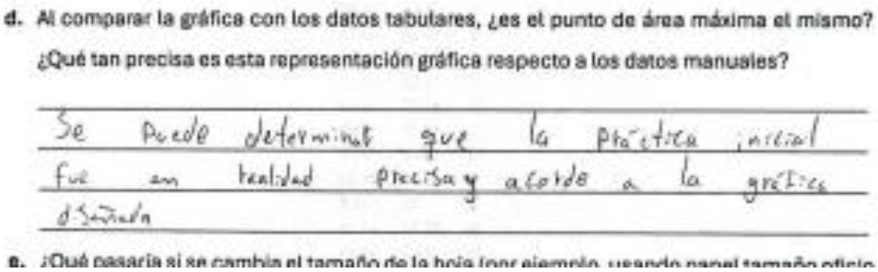

a. ¿Cómo se comparan los valores de la base y la altura del triángulo obtenidos en la simulación de GeoGebra con los registrados manualmente?

Se determinan como inversamente proporcionales al aumentar uno y disminuir otro

b. ¿Cómo describirías el cambio en el área del triángulo conforme se desliza la esquina en la simulación de GeoGebra? ¿Coincide esta variación con las expectativas basadas en los datos manuales?

efectivamente coinciden, al acercarse más a la esquina, se acerca cada vez más a 0° pero el área hacia la derecha disminuye

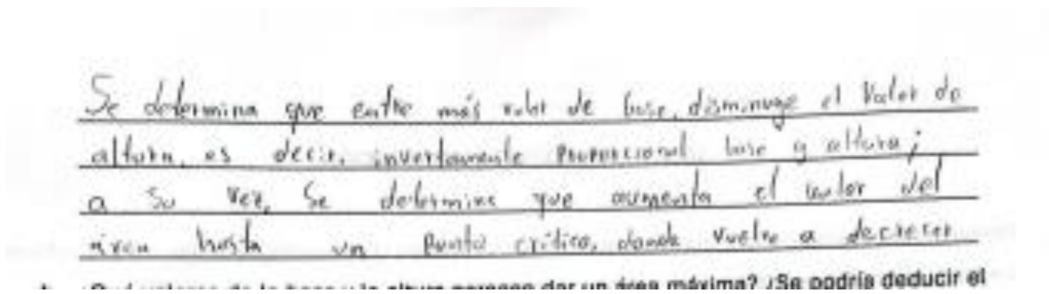
Anexo 29. Datos numéricos estudiante 5.


d. Al comparar la gráfica con los datos tabulares, ¿es el punto de área máxima el mismo? ¿Qué tan precisa es esta representación gráfica respecto a los datos manuales?

Se puede determinar que la práctica inicial fue en realidad precisa y acorde a la gráfica diseñada

e. ¿Qué pasaría si se cambia el tamaño de la hoja (por ejemplo, usando papel tamaño oficio

Anexo 30. Lenguaje como mediador semiótico estudiante 5.


Se determina que entre más valor de base, disminuye el valor de altura, es decir, inversamente proporcional base y altura; a su vez, se determina que aumenta el valor del área hasta un punto crítico, donde vuelve a decrecer

b. ¿Qué valores de la base y la altura parecen dar un área máxima? ¿Se podría deducir el

Obtendriamos una gráfica con un dominio mayor, por lo que el vértice de la parabola alcanzaria un punto más alto