

**MEDIOS SEMIÓTICOS DE OBJETIVACIÓN QUE EMERGEN AL RESOLVER TAREAS DE
TIPO GEOMÉTRICO RELACIONADAS CON LA ELIPSE VISTA COMO LUGAR
GEOMÉTRICO**

David Alexander Aroca Chico, Santiago Andrés Fajardo Guzmán, Roberto Mauricio Patiño

Cubillos



UNIVERSIDAD
La Gran Colombia

Vigilada MINEDUCACIÓN

Licenciatura en matemáticas, Facultad ciencias de la educación.

Universidad la Gran Colombia

Bogotá D. C.

2025

**Medios semióticos de objetivación que emergen al resolver tareas de tipo geométrico
relacionadas con la elipse vista como lugar geométrico**

David Alexander Aroca Chico, Santiago Andrés Fajardo Guzmán, Roberto Mauricio Patiño

Cubillos

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Licenciado en matemáticas

Director: Gómez Triana, John Edilberto.



UNIVERSIDAD
La Gran Colombia

Vigilada MINEDUCACIÓN

Licenciatura en matemáticas, Facultad ciencias de la educación.

Universidad La Gran Colombia

Bogotá D.C.

2025

Dedicatoria:

A mi esposa Claribel por su amor incondicional, paciencia y apoyo en cada etapa de este camino académico, gracias por ser mi compañera y mi motivación matutina.

A mi hija Sara que siempre me inspiro para superar este reto.

A mi madre Bidalva por su ejemplo de esfuerzo y perseverancia.

David Alexander Aroca.

A mi madre Emilsen por su amor incansable y con su ejemplo enseñarme el valor del esfuerzo y el sacrificio.

A mi hermano Julián por su compañía constante, por cada momento compartido y por ser un apoyo incondicional en este camino.

A mis abuelos Hugo y Paulina por estar siempre presentes en mi corazón, guiando cada uno de mis pasos.

Santiago F. Guzmán

A mi madre Liliana, por ser mi guía, mi refugio y la base firme sobre la que he construido cada uno de mis sueños.

A mis hermanas Paula y Carolain, por su alegría, complicidad y la fuerza silenciosa que siempre me impulsó a seguir adelante.

A la memoria de mi perro Kiko, cuyo amor leal y compañía fiel dejaron huella en este recorrido.

Roberto Mauricio Patiño.

Agradecimientos:

A nuestro director, el Profesor John Gómez Triana, por su constante apoyo, su sabio consejo y el compromiso que asumió con la dirección de este trabajo.

A los estudiantes de grado décimo del colegio bilingüe Cedam, quienes, con su entusiasmo y disposición, nos brindaron su valiosa ayuda en el estudio. Su colaboración fue esencial para la realización de este proyecto, y su participación activa enriqueció considerablemente nuestra investigación.

A nuestro amigo Edward Alexander Casas Solaque, por su apoyo incondicional, sus ocurrencias y por recordarnos la importancia de mantenernos conectados, especialmente al sugerir reunirnos por Zoom. Su amistad ha sido una fuente constante de empeño y motivación.

Tabla de contenido

RESUMEN	9
ABSTRAC	10
INTRODUCCIÓN	11
CAPÍTULO I. Propuesta de investigación	14
1.1 POSICIONAMIENTO TEÓRICO Y CONTEXTO PROBLEMÁTICO.....	14
1.2 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN	20
1.3 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN	21
1.3.1 <i>Objetivo general:</i>	21
1.3.2 <i>Objetivos específicos:</i>	21
1.4 ANTECEDENTES.....	21
1.5 JUSTIFICACIÓN.....	26
CAPÍTULO II. Marco teórico	28
2.1 LA TEORÍA DE LA OBJETIVACIÓN	30
2.2 SABER Y CONOCIMIENTO	32
2.3 APRENDIZAJE	33
2.4 PROCESOS DE OBJETIVACIÓN	34
2.5 PROCESOS DE SUBJETIVACIÓN	36
2.6 ENSEÑANZA-APRENDIZAJE.....	37
2.7 ACERCA DE LA ELIPSE	39
2.8 PRINCIPIOS GEOMÉTRICOS Y ALGORÍTMICOS EN EL ORIGAMI.....	42
CAPÍTULO III. Metodología	44
3.1 FUNDAMENTACIÓN CONCEPTUAL DEL ESTUDIO	48

MEDIOS SEMIOTICOS EMERGENTES EN TAREAS SOBRE LA ELIPSE	6
3.2 DISEÑO DE TAREAS	48
3.3 IMPLEMENTACIÓN DE TAREAS Y RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN.....	50
3.4 JUICIO DE EXPERTOS.....	51
3.5 CONFIGURACIÓN DE LOS DATOS A ANALIZAR.	52
3.6 ANÁLISIS MULTIMODAL DE LOS DATOS	53
3.7 PRODUCCIÓN DE RESULTADOS	15
CAPÍTULO IV. Análisis de resultados.....	18
4.1 SESIÓN 1.....	40
4.2 SESIÓN 2.....	45
4.3 SESIÓN 3.....	45
4.4 SESIÓN 4.....	46
4.5 SESIÓN 5.....	57
4.6 SESIÓN 6.....	59
CAPÍTULO V. Conclusiones	59
5.1 ACERCA DE LOS OBJETIVOS	61
5.2 DISCUSIÓN SOBRE LA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN	63
5.3 RECOMENDACIONES	64
Referencias	66

Lista de figuras

Figura 1	La dialéctica entre el saber y el conocimiento y sus respectivas expansiones.....	15
Figura 2	Secciones cónicas.....	18
Figura 3	Representación geométrica de la elipse.....	40
Figura 4	La actividad θ y alguno de sus “momentos”	45
Figura 5	Plan de ejecución de una observación clínica	45
Figura 6	Esquema metodológico adaptado para el desarrollo del estudio	46
Figura 7	Estudiantes señalando la circunferencia.	57
Figura 8	Estudiante señalando el centro de la circunferencia a un punto cualquiera (Radio) ...	59
Figura 9	Estudiante midiendo el diámetro de la circunferencia con un lápiz.	59
Figura 10	Uso de artefactos mediadores para medir el radio en la circunferencia.....	61
Figura 11	Descripción de rectas paralelas y perpendiculares realizado por una estudiante.	63
Figura 12	Estudiante realizando la construcción de la circunferencia por medio de dobleces ..	64
Figura 13	Relación del radio al trasladar un punto	66
Figura 14	Descripción del radio al trasladar un punto, por una estudiante.....	67
Figura 15	Estudiante señala las propiedades de la elipse con la construcción de origami.	70
Figura 16	Docente señala la construcción de la elipse a través de dobleces de origami.	73
Figura 17	Estudiante señala los puntos de la elipse.	75
Figura 18	Estudiante I integra conocimientos geométricos sobre la circunferencia y la elipse..	78
Figura 19	Estudiante explica la construcción usando gestos y expresiones verbales.....	79
Figura 20	Estudiante comunica su comprensión de la elipse.	79
Figura 21	La estudiante expresa saberes adquiridos sobre la elipse.....	80

Lista de tablas

Tabla 1 Guía 1: Desarrollo conceptual de la circunferencia.	56
Tabla 2 Conversación 1 docente-estudiantes sobre la tarea hecha en la sesión 1.	57
Tabla 3 Conversación 2 docente-estudiantes sobre la tarea hecha en la sesión 1.	61
Tabla 4 Guía 2: se exploran los significados de rectas paralelas y perpendiculares.	62
Tabla 5 Conversación 1 docente y estudiantes sobre la tarea hecha en la sesión 5.....	70
Tabla 6 Conversación 2 docente-estudiantes sobre la tarea hecha en la sesión 5.	71
Tabla 7 Conversación 3 docente-estudiantes sobre la tarea hecha en la sesión 5.	73
Tabla 8 Guía 6: Elaboración de significados de la elipse.	75
Tabla 9 Conversación 1 docente-estudiantes sobre la tarea hecha en la sesión 6.	77

RESUMEN

Este trabajo de grado tiene como objetivo describir los Medios Semióticos de Objetivación (MSO) que emergen en la enseñanza-aprendizaje de un grupo de estudiantes de grado decimo de un colegio privado de la ciudad de Bogotá. Se fundamenta en la Teoría de Objetivación (TO) de Luis Radford, la cual, desde un enfoque sociocultural, permite analizar cómo se construye el conocimiento matemático mediante interacciones mediadas por artefactos, signos y prácticas sociales.

Para ello, se diseñó e implementó una secuencia de tareas utilizando el doblado de papel como herramienta mediadora, con el fin de favorecer la emergencia de MSO y analizar la elaboración de significados del concepto de la elipse. La metodología adoptada fue cualitativa, apoyada en la observación clínica adaptada, lo que permitió registrar gestos, acciones y producciones significativas de los estudiantes.

Los resultados mostraron que los estudiantes activan saberes previos durante el desarrollo de las tareas, mientras continúa la emergencia de los MSO, tales como los señalamientos, los gestos faciales y las expresiones verbales. Estos MSO constituyen una materialización del pensamiento de los estudiantes y permiten observar cómo elaboran significados relacionados con la elipse, posicionando así el pensamiento espacial como un saber situado, histórico y cultural.

Palabras claves: prácticas sociales, procesos de enseñanza-aprendizaje, sociocultural, expresiones, kinestésico.

ABSTRAC

This undergraduate thesis aims to describe the Semiotic Means of Objectification (MSO) that emerge in the teaching-learning process of a group of tenth-grade students from a private school in Bogotá. It is grounded in Luis Radford's Theory of Objectification (TO), which, from a sociocultural perspective, allows for the analysis of how mathematical knowledge is constructed through interactions mediated by artifacts, signs, and social practices.

To this end, a sequence of tasks was designed and implemented using paper folding as a mediating tool, with the purpose of fostering the emergence of MSO and analyzing the construction of meaning regarding the concept of the ellipse. The adopted methodology was qualitative, supported by adapted clinical observation, which allowed for the recording of gestures, actions, and meaningful productions by the students.

The results showed that students activate prior knowledge during the development of the tasks, while MSO such as pointing gestures, facial expressions, and verbal expressions continue to emerge. These MSO represent a materialization of the students' thinking and allow us to observe how they construct meanings related to the ellipse, thereby positioning geometric thinking as situated, historical, and cultural knowledge.

INTRODUCCIÓN

En el campo de la educación matemática comprender cómo los estudiantes elaboran significados de los conceptos matemáticos sigue siendo un tema de interés, especialmente cuando se reconoce la necesidad de transformar las prácticas tradicionales que han estado centradas en la memorización de definiciones y la aplicación mecánica de fórmulas. Estas prácticas, aún predominantes en la enseñanza escolar, limitan, por un lado, la comprensión por parte del estudiante de los diferentes conceptos y su vinculación con contextos significativos; y por otro, la interpretación que el profesor llega a hacer del proceso de aprendizaje llevado por los estudiantes cuando se enfrentan a tareas matemáticas en el aula. Por tal motivo, el presente trabajo de grado se enmarca en el enfoque sociocultural del aprendizaje, específicamente en la Teoría de la Objetivación (TO), una teórica propuesta por Luis Radford que permite analizar los procesos de enseñanza-aprendizaje como una actividad que se da por medio de artefactos, signos, lenguaje, expresiones corporales y prácticas sociales, donde el saber y el conocimiento son participativos desde un enfoque histórico-cultural.

El ejercicio de investigación, reportado en este trabajo de grado, se inscribe en la línea de investigación: Problematización del Conocimiento Matemático, de la Licenciatura en Matemáticas. Se centró en el análisis y explicación de las múltiples formas en las que un grupo de estudiantes elabora significados del concepto de elipse como lugar geométrico, cuando se enfrenta al desarrollo de una secuencia de tareas aplicada durante seis sesiones y que fueron diseñadas partiendo de los constructos teóricos de la TO. La propuesta se diseñó con el objetivo de potenciar el pensamiento espacial por medio del desarrollo de sistemas geométricos, permitiendo una exploración activa y modelación del espacio por parte de los estudiantes, generando espacios para la reflexión matemática que emerge cuando dichas tareas se realizan a través del trabajo colaborativo y la interacción social propia de un aula de clase.

El diseño metodológico se enmarca en un enfoque cualitativo, basado en una adaptación de la metodología denominada observación clínica, la cual permitió documentar detalladamente los gestos, las interacciones y las producciones, tanto escritas como orales, que los estudiantes manifestaron durante el desarrollo de las tareas y que permitieron identificar procesos de objetivación que son caracterizados, según Radford(2006; 2013; 2014; 2023a; 2023b; 2024), por diferentes Medios Semióticos de Objetivación (MSO) y que son entendidos como: manifestaciones, gestos, símbolos, uso de artefactos, actividades corpóreas y corporalidad que emergen en la elaboración de significados matemáticos por parte de los estudiantes.

En el capítulo I se presenta la propuesta de investigación que fundamenta y da sentido al presente ejercicio de investigación. Se inicia con un abordaje de la Teoría de la Objetivación, la cual se enmarca en el paradigma sociocultural de la educación matemática y permite analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje como fenómenos que emergen a través de interacciones sociales construidas histórica y culturalmente. A continuación, se expone las razones que justifican la elección de la elipse como concepto matemático objeto de estudio en la secuencia de tareas diseñada. Seguidamente, se describe el contexto problemático en el que se enmarca el trabajo, se presentan los antecedentes relevantes, se delimita el problema de investigación, y se expone su justificación. Finalmente, se formula la pregunta problema junto con los objetivos que orientan el desarrollo de la investigación, y cuyo cumplimiento permitirá responder de manera fundamentada a dicha pregunta.

En el capítulo II se desarrolla el marco teórico que sustenta el trabajo de grado, exponiendo los elementos relevantes de la TO. Se profundiza en conceptos claves como saber, conocimiento, aprendizaje, procesos de objetivación y subjetivación. Se contextualiza el concepto de la elipse vista como lugar geométrico y como objeto cultural e histórico. Se presentan los principios geométricos y algorítmicos del origami con el fin de sustentar cómo el

doblado de papel constituye una herramienta mediadora en el desarrollo de las tareas de la secuencia.

En el capítulo III se describe la metodología utilizada, la cual se enmarca en un enfoque cualitativo con fundamentos en los postulados de la TO. Se detalla el diseño de la secuencia de tareas, el doblado de papel como artefacto mediador; y la forma en cómo se recolectaron, se depuraron y analizaron los datos a través de la observación clínica adaptada y de un análisis multimodal de estos. Finalizando este capítulo con una explicación de cómo se obtienen los resultados y se derivan las conclusiones.

En el capítulo IV se presenta la discusión y el análisis multimodal de los datos obtenidos durante la implementación de la secuencia de tareas. Se identifican y se describen los diferentes MSO que emergieron en las interacciones de los estudiantes durante el desarrollo de las tareas propuestas.

Finalmente, el capítulo V presenta las conclusiones generales derivadas de la pregunta problema y los objetivos planteados. Se reflexiona sobre los MSO observados, evidenciando cómo la secuencia de tareas propició su emergencia. Asimismo, se analizan las implicaciones pedagógicas de los hallazgos y se formulan recomendaciones para futuros trabajos, orientados a profundizar en el diseño y uso de secuencias de tareas, que favorezcan procesos de objetivación de saberes enmarcados en diferentes contextos de las matemáticas.

CAPÍTULO I. Propuesta de investigación

La belleza de las matemáticas solo se presenta a los seguidores más pacientes.

M. Mirzakhani

1.1 Posicionamiento teórico y contexto problemático.

En el campo de la educación matemática existen diferentes aproximaciones teóricas que buscan explicar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Estas aproximaciones se pueden enmarcar en dos grandes paradigmas, un paradigma cognitivo y un paradigma sociocultural. En el primero, se busca explicar el proceso de enseñanza-aprendizaje poniendo el foco de atención en el estudiante visto como el principal protagonista del proceso, en el segundo, se abren diferentes posibilidades, pues se concibe que el aprendizaje no se reduce a entender al estudiante como único agente del proceso ni al profesor como único proveedor de conocimiento. Además, una aproximación sociocultural no se centra solo en los contenidos, sino también en el desarrollo de los individuos implicados en el proceso educativo. Al inscribirse en un paradigma sociocultural, se está reconociendo que el estudiante y el profesor son ambos seres que están en constante formación, transformación y en una búsqueda conjunta de conocimiento (Radford, 2023).

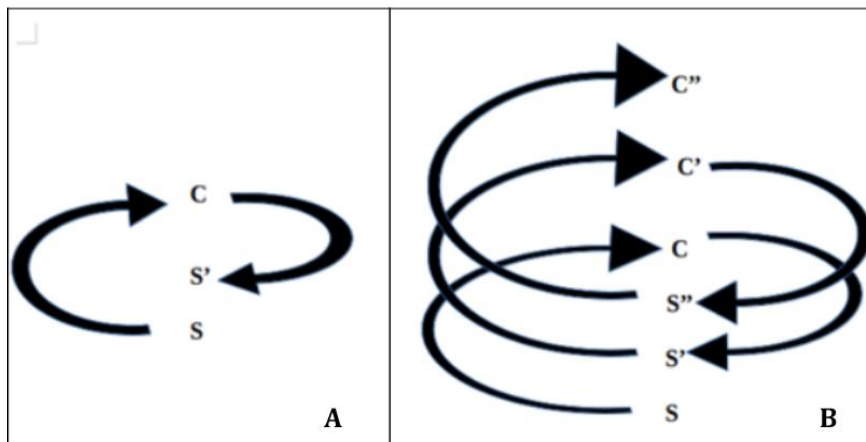
Dentro de un enfoque sociocultural se encuentran varias perspectivas del conocimiento, una de ellas es la perspectiva histórico-cultural que en años recientes ha sido explicada y desarrollada por diferentes teorías donde se inscribe la Teoría de la Objetivación (TO) planteada por Luis Radford. Este enfoque histórico-cultural inspirado por Vygotsky, postula que la acción mediada, dada por el lenguaje, expresiones corporales y herramientas culturales, son un principio fundamental en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Esta teoría ha evolucionado con el tiempo, integrando elementos de diversas disciplinas como antropología, filosofía, ontología y epistemología para sustentar sus planteamientos. Al reinterpretar estos

conceptos en contextos contemporáneos, la TO genera nuevos constructos teóricos que influyen en áreas como la enseñanza de las matemáticas, ofreciendo una mirada más amplia sobre cómo los individuos, tanto profesores como estudiantes, comprenden el mundo a través de la interacción mediada.

En el contexto de la TO, se precisa lo que se entiende por el saber y el conocimiento. El saber se considera una potencialidad que puede ser innata o adquirida y, dependiendo del contexto, debe ser potenciado para su actualización. Este término se refiere al conjunto de información disponible y objetivada. Por otro lado, el conocimiento se deriva de la interpretación y comprensión individual del saber, influenciado por factores culturales y ambientales. Cada vez que un individuo adquiere conocimiento, su saber se actualiza, y este nuevo saber está constantemente en búsqueda de nuevo conocimiento (Radford, 2023). Ver Figura 1

Figura 1

La dialéctica entre el saber y el conocimiento y sus respectivas expansiones.



Nota. Adaptada de "La teoría de la objetivación" por L. Radford. 2023a.

Radford postula que el saber y el conocimiento, aunque a menudo se entrelazan, poseen distinciones fundamentales que trascienden la mera transmisión de información. El saber, más que una entidad estática, es una capacidad generativa arraigada en lo histórico-

cultural, una fuente de posibilidades que se activa a través de la acción humana. En este contexto, el conocimiento emerge como una actualización palpable del saber, materializándose en formas perceptibles y concretas. En la sección A de la Figura 1 se muestra que el saber (S) está en constante actualización de conocimiento (C) y este conocimiento se convierte en un nuevo saber (S') que a su vez es la actualización del conocimiento, es decir se actualiza o se materializa en una forma desarrollada mediante la intervención humana (simbolizada por flechas curvas). Por ejemplo, si imaginamos una persona que sabe cocinar pasta básica (este sería su Saber S). Un día decide ver un video en internet donde aprende una nueva técnica para hacer una salsa casera (este sería la actualización de su conocimiento C). Luego, aplica esta técnica y logra preparar una pasta más elaborada y sabrosa (esto se convierte en un nuevo Saber, S'). Ahora cada vez que cocina, usa esa técnica, pero también la ajusta con su propia experiencia: tal vez le agrega otros ingredientes o cambia los tiempos de cocción. Con eso genera un nuevo conocimiento culinario (Esto sería su nuevo conocimiento, C'), que luego puede compartir con alguien más o seguir perfeccionando. Así, su Saber se actualiza constantemente gracias a la experiencia, la reflexión y la práctica. Tal como se ilustra en la sección B de la Figura 1, se muestra que el saber siempre está en constante actualización (Radford, 2023b).

El saber es un sistema histórico-cultural que se ha formado a través de procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y reflexión. Este saber cambia entre diferentes culturas y a lo largo del tiempo. No es solo una herramienta para hacer algo, sino que también tiene una dimensión estética, ética, simbólica y política. Siempre está inmerso en estructuras culturales complejas. Se reconoce que el saber no es universal ni estático, sino dinámico y multifacético, adaptándose a los contextos y necesidades particulares de cada comunidad. Además, el saber incorpora una comprensión profunda del entorno y las interacciones humanas dentro de ese contexto, destacando la importancia de la experiencia y la participación

activa en la elaboración del conocimiento. En este sentido, se enfatiza que el saber no solo se transmite, sino que se construye a través de la práctica y la reflexión constante, reflejando la riqueza y diversidad de las culturas humanas, mientras el individuo va construyendo su aprendizaje desde las prácticas sociales (Radford, 2023a).

Desde esta perspectiva, el conocimiento de las secciones cónicas se concibe como una interacción dinámica entre el individuo y algún artefacto. Para el caso de este estudio, se utiliza la técnica del plegado de papel como artefacto mediador en el proceso de elaboración de significados del concepto de elipse, entendido como un lugar geométrico en el plano. Mediante dicha mediación se espera que el estudiante tome consciencia y reelabore significados matemáticos a través de la manipulación y la observación directa. La comprensión del concepto de elipse se ve enriquecida mediante la materialización del saber abstracto en formas tangibles, consolidando así la comprensión y apropiación de este. En este sentido, se propone entender que el aprendizaje de conceptos geométricos no ocurre en un vacío, sino que está intrínsecamente ligado a la interacción con el entorno físico y las prácticas manuales, dichas prácticas mediadas con el papel permiten la visualización de las propiedades geométricas y posibilitan la interacción y posterior actualización del saber por parte de los estudiantes.

Ahora bien, para ejemplificar los constructos teóricos mencionados anteriormente y para efectos del presente trabajo, se toma como saber el concepto de sección cónica (saber S), que es un concepto matemático construido a través de la historia desde su primera versión postulada por Menecmo¹ hasta su formalización por Apolonio de Perga². Históricamente, el primer reporte que se conoce del concepto sección cónica hace referencia a los cortes que se

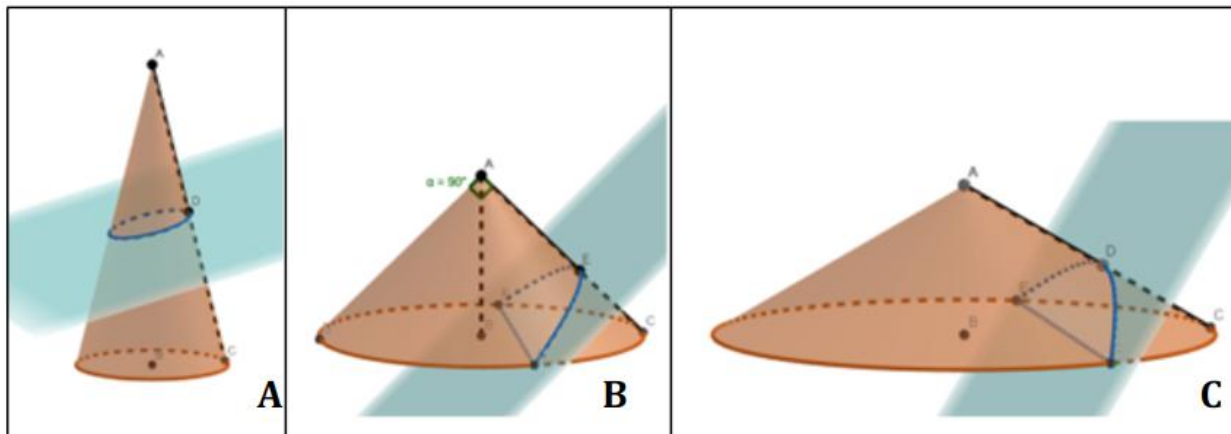
¹ Menecmo: (Proconeso, c. 375 - c. 325 a.J.C.) Fue un matemático griego. Estudiando la duplicación del cubo, descubrió, al parecer, las secciones cónicas. Fue discípulo de Eudoxio y amigo de Platón. Las curvas de Menecmo se hicieron célebres en la antigüedad debido a su estudio teórico de las secciones cónicas. (Boyer, 1987)

² Apolonio de Perga: fue un matemático y astrónomo griego, conocido como "El Gran Geómetra". Su obra más famosa, "Las Cónicas", introdujo los términos elipse, parábola e hipérbola. Sus contribuciones fundamentales a la geometría influyeron en el desarrollo posterior de las matemáticas y la astronomía. (Boyer, 1987)

realizan a un cono agudo, un cono rectángulo y a un cono obtuso; lo que significa que el primer nombre utilizado para referirse a estas secciones tenía que ver exclusivamente con el resultado de la actividad de seccionar un cono (Boyer, 1987) ver Figura 2.

Figura 2

Secciones cónicas



Nota. Adaptada de "Historia de las matemáticas" por C. Boyer. 1987.

Durante aproximadamente un siglo y medio, estas curvas carecieron de un nombre específico. Desde la Teoría de la Objetivación, resulta interesante analizar cómo la actividad humana propició una actualización del saber matemático (S) en estrecha relación con la cultura y el pensamiento humano, dando lugar a las denominaciones que les atribuyó Apolonio: elipse, parábola e hipérbola, vigentes hasta la actualidad. Esta transformación representa la emergencia de un nuevo saber (S'). Un estudio documental en esta línea permitiría evidenciar cómo el paso del saber S al saber S' constituye un proceso histórico-cultural, ya que, de acuerdo con la TO, el saber es producto de la interacción social en un periodo de tiempo concreto. Posteriormente, este saber S' se proyecta hacia un saber S'' en una nueva fase de actualización gracias a las contribuciones de Pappus de Alejandría. En su obra, el Libro VII de la Colección, Pappus introduce avances sustanciales en el estudio de las secciones cónicas al

sistematizar las propiedades del foco y la directriz. Aunque se ha sugerido que Apolonio ya había explorado algunas propiedades focales en cónicas con centro, la distinción precisa entre el foco y la directriz de la parábola podría constituir un aporte novedoso de Pappus (Boyer, 1987).

Este progreso matemático se consolidó aún más con la llegada de la geometría analítica durante el Renacimiento y el movimiento de la Ilustración. René Descartes, con su método innovador de geometría analítica, fusionó la geometría y el álgebra de una manera revolucionaria. Al relacionar las curvas geométricas con ecuaciones algebraicas, introdujo un enfoque que permitió una comprensión más profunda y una resolución más eficiente de problemas matemáticos. En síntesis, el saber matemático en general, y el concepto de sección cónica en particular, es una actualización del conocimiento producida por una constante actividad humana a lo largo del tiempo. Su estudio continuo no solo enriquece nuestra comprensión de las matemáticas, sino que también nos muestra cómo el saber matemático se actualiza en interacción con otras disciplinas y contextos socioculturales. Las secciones cónicas son mucho más que simples formas geométricas; son testigos del poder transformador del conocimiento y la capacidad humana para dar forma al mundo que nos rodea a través del saber y la reflexión (Boyer, 1987).

Es así, como el contexto problemático, en el que se posiciona el presente trabajo, tiene que ver con el estudio y comprensión del o los procesos que un grupo de estudiantes llevan a cabo cuando se enfrentan a la elaboración de significados del concepto de elipse entendido como un lugar geométrico. La comprensión del cómo los estudiantes aprenden constituye, para el docente, un problema en sí mismo. En otras palabras, se plantea como problema de investigación la necesidad de comprender cómo emerge el conocimiento matemático en el aula cuando los estudiantes interactúan entre sí, con el docente y con los artefactos que tengan a su disposición. El interrogante responde a la necesidad que se tiene,

en la comunidad de educadores matemáticos, de ir más allá de la mera verificación del aprendizaje y, en cambio, profundizar en los procesos mediante los cuales los estudiantes se apropian de los objetos matemáticos. En resumen, en el ejercicio de investigación reportado en este trabajo, se problematiza el proceso de enseñanza-aprendizaje de un objeto matemático.

Desde la TO, como ya se ha mencionado, esta problemática se inscribe en una visión del aprendizaje como un fenómeno social, cultural e históricamente mediado, en el que el conocimiento no es transferido, sino objetivado colectivamente a través de la actividad humana. Así, el proceso de elaboración de significados del concepto de elipse definido como un lugar geométrico en el plano, se concibe como una práctica semiótica situada, en la que emergen diversos MSO, como el lenguaje, los gestos, las representaciones gráficas y las acciones con artefactos; que permiten a los estudiantes materializar su pensamiento y comunicar significados. Es en este sentido que el problema de investigación se concreta en indagar cómo la aplicación de una serie de tareas específicas, la actividad humana en el aula de clase y el uso de artefactos mediadores, como el doblado de papel, favorecen la emergencia de estos medios, y con ello, realizar un acercamiento a la explicación de procesos de objetivación del concepto de elipse.

1.2 Pregunta de investigación

Teniendo en cuenta lo desarrollado en el apartado anterior, se plantea la siguiente pregunta:

¿Cuáles son los Medios Semióticos de Objetivación que emergen, en tareas relacionadas con el significado de elipse visto como lugar geométrico, durante la interacción de un grupo de estudiantes de grado décimo de un colegio privado de la ciudad de Bogotá?

Para responder a la pregunta de investigación, se proponen los siguientes objetivos, los cuales orientan el desarrollo del presente trabajo. Se establece un objetivo general que define el propósito central de la investigación, a su vez, se establecen tres objetivos específicos que permitirán abordar de manera estructurada los distintos aspectos del estudio, contribuyendo al cumplimiento de dicho objetivo general.

1.3 Objetivos de la investigación

1.3.1 Objetivo general:

Describir los Medios Semióticos de Objetivación que emergen durante la elaboración de significados del concepto de elipse, visto como lugar geométrico, por un grupo de estudiantes de grado décimo en un colegio privado de Bogotá.

1.3.2 Objetivos específicos:

- Diseñar una secuencia de tareas relacionadas con la elipse, vista como lugar geométrico, bajo los principios de la Teoría de la Objetivación, utilizando el doblado de papel como artefacto mediador.
- Implementar la secuencia de tareas en un grupo de estudiantes de grado décimo, promoviendo interacciones que favorezcan la emergencia de los Medios Semióticos de Objetivación.
- Identificar los Medios Semióticos de Objetivación que emergen durante las interacciones y respuestas dadas por los estudiantes al momento de realizar cada una de las tareas.

1.4 Antecedentes

Para categorizar los trabajos que se consideran antecedentes a la presente propuesta, nos enfocamos en tres ámbitos específicos. El primero se enfoca en aquellos estudios desarrollados tomando la Teoría de la Objetivación como marco teórico para el análisis. El

segundo corresponde a los estudios que se centran en la comprensión de las secciones cónicas y por último los que abordan origami, doblado de papel, como herramienta para el aprendizaje de las matemáticas.

La TO tuvo su origen en la década de los noventa, según Radford (2014), el foco de atención se centraba en pensar e interpretar de manera diferente el aprendizaje de las matemáticas, actualmente la teoría ha evolucionado y nos ofrece una visión sociocultural del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, abordando aspectos históricos-culturales que influyen en la actividad matemática de los individuos. Es así como, en múltiples publicaciones, Luis Radford reporta una concepción sociocultural del aprendizaje de las matemáticas y desarrolla una teoría que estudia los aspectos semióticos culturales que median la actividad matemática. La TO hace parte del marco teórico de la presente propuesta y por esta razón los trabajos que se inscriben en dicha teoría son considerados antecedentes de la misma.

En el ámbito de la investigación, la TO ha sido ampliamente empleada como elaboración teórica para explicar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en diversos estudios. Un ejemplo es la tesis de maestría de Mojica (2014), en el que se examina cómo los estudiantes de sexto grado abordan problemas de multiplicación. Este análisis multimodal revela cómo los niños emplean diferentes medios para comprender y resolver estas tareas, evidenciando procesos de pensamiento multiplicativo. Se identifican medios semióticos de objetivación (MSO) y procesos de objetivación en el pensamiento multiplicativo, utilizando herramientas analíticas para explorar y extrapolar conceptos que surgen al identificar y estudiar los procesos de objetivación desarrollados por un grupo de estudiantes de grado sexto cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo. Las conclusiones se desarrollan partiendo de la identificación de medios semióticos, kinestésicos y lingüísticos en la resolución de problemas de multiplicación, evidenciando procesos de objetivación como la contracción semiótica e

iconicidad. Para finalizar, este trabajo de maestría recomienda una investigación más profunda para entender los diferentes niveles de generalidad factual, contextual y simbólica en el pensamiento multiplicativo.

En la tesis de maestría de Cadavid (2011) se expone cómo los artefactos usados en un proceso de objetivación de la parábola en estudiantes de grado once, son constituyentes en el proceso de cómo el sujeto piensa y conoce un objeto dependiendo de los significados culturales y sus propias interpretaciones. Se concluye que los estudiantes pudieron realizar el proceso de lo abstracto a lo concreto mediante las abstracciones y generalizaciones que los llevó a un proceso de objetivación del concepto de parábola.

Moreno y Vargas (2020) en su tesis de maestría abordan la estructura multiplicativa de los estudiantes de séptimo grado desde la TO, basado en un enfoque multimodal como proceso interpretativo de indagación, donde se examina y conduce el estudio de una situación natural, con el objetivo de realizar una caracterización de los procesos de objetivación que desarrollan los estudiantes al resolver tareas asociadas a la estructura multiplicativa. Se concluyó que tuvieron una evolución significativa al momento de comunicar sus dudas, aciertos y razonamientos a través de los medios semióticos de objetivación en el ámbito de la multiplicación.

Con relación a la enseñanza de las secciones cónicas se encontraron varios trabajos asociados; para efectos del presente trabajo, se reportan los que se consideran más relevantes en el sentido metodológico y/o de análisis del proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto matemático sección cónica.

Vargas (2021) en su tesis de maestría aborda la Geometría del espacio en el aprendizaje de los estudiantes, evidencia que la enseñanza de las cónicas se ve limitada principalmente en los enfoques algebraicos, donde centra su investigación en un enfoque Histórico-epistemológico en el estudio de textos originales relacionados con la construcción

geométrica de las cónicas especialmente en la génesis sólida, combinando la teoría de la Socioepistemológica y una visión del razonamiento espacial, el objetivo principal fue documentar las prácticas que acompañan la construcción de la cónica sólida derivada del corte de un cono y su transformación en una figura plana, según se detalla en el texto "Las Cónicas" de Apolonio de Perga. Se concluye que las secciones cónicas en la geometría del espacio se enmarcan por procesos históricos y epistemológicos donde se evidencia la evolución del pensamiento matemático, resaltando que el estudio de las cónicas no solo tiene un valor matemático, sino también pedagógico, que permite comprender la naturaleza social del conocimiento.

Aragón y Quintero (2017) en su tesis de maestría, proponen enseñar Secciones Cónicas a estudiantes de noveno grado utilizando diferentes metodologías de geometría dinámica, buscando un aprendizaje significativo a través de actividades tecnológicas que faciliten la comprensión de las secciones cónicas. Se plantea un problema guía que considera la gestión en el aula y la interacción con las herramientas. Para potenciar el proceso de enseñanza, se diseña una secuencia de actividades utilizando diversas tecnologías. Estas actividades mostraron diversas estrategias de los estudiantes y su interés en las nuevas herramientas, lo que facilitó la elaboración del conocimiento. Las tecnologías ayudaron a los estudiantes a comprender las secciones cónicas mediante interacción y experimentación. Aunque surgieron algunos problemas de tiempo y materiales, la propuesta fue exitosa en general, destacando la importancia de la interacción con las tecnologías para entender conceptos matemáticos.

En el contexto del aprendizaje de las matemáticas mediante el uso del origami, se han seleccionado tres investigaciones enfocadas para esta área en particular. Se considera que estas investigaciones son las más cercanas al aprendizaje de las secciones cónicas empleando

el origami, doblado de papel, y donde se analiza el proceso de enseñanza-aprendizaje de este concepto matemático.

Santa y Jaramillo (2010), en su artículo de investigación abordaron principalmente el estudio de las secciones cónicas mediante el uso de la geometría del origami. El objetivo es formalizar ciertos conceptos primitivos necesarios para las construcciones geométricas a través del doblado de papel y, además, desarrollar una propuesta alternativa para la construcción y deducción de conceptos relacionados con las secciones cónicas, como la circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola.

Alvarado y Molina (2018) en su artículo de investigación exploran nuevas metodologías didácticas para la enseñanza de secciones cónicas, proponiendo el uso de manualidades que permiten a los estudiantes interactuar con materiales para desarrollar conceptos matemáticos desde lo más sencillo hasta lo más complejo. Los autores sugieren la implementación del origami en trabajos colaborativos con pequeños grupos de estudiantes. Se comprobó que el trabajo en equipo, la manipulación de materiales concretos, como el doblado de papel, y la toma de medidas en las figuras, facilitan la generación de conceptos bien fundamentados en los estudiantes.

Alperin (2016) en su artículo de investigación aborda el uso de los axiomas de Huzita-Justin en origami aplicados a un problema de geometría, específicamente el Problema de Alhazan³. Este método clásico se utiliza para la trisección de un ángulo. La construcción inicial del problema se realiza empleando el compás y regla, para posteriormente aplicar los axiomas del origami, los cuales desempeñan un papel fundamental en la solución de este problema geométrico.

³ Encontrar el punto en el espejo donde debe reflejarse un rayo de luz que sale de un punto A para llegar a otro punto B, cumpliendo con la ley de la reflexión (ángulo de incidencia = ángulo de reflexión).

1.5 Justificación

Desde una perspectiva tradicional, la enseñanza de las secciones cónicas y en particular de la elipse, comúnmente ha estado centrada en una transmisión unidireccional del conocimiento (profesor a estudiante), donde se enfoca la memorización, repetición y aplicación de fórmulas algebraicas. Esta forma de proceder conduce una mecanización del proceso de enseñanza-aprendizaje, en la que la participación del estudiante se ve reducida al desarrollo de una serie de procedimientos que, en la mayoría de los casos, hace que la elaboración de significados del objeto matemático se vea limitada por la representación algebraica del mismo, esto es, la representación simbólica invisibiliza la construcción histórica y cultural del concepto matemático. Con base en los principios de la TO, se propone una práctica pedagógica donde la elipse no se presenta como un objeto matemático ya acabado, sino como un contenido que emerge en la actividad conjunta, mediante procesos semióticos, gestuales y discursivos. A través de la elaboración conjunta, donde los estudiantes participan en la elaboración del significado de la elipse, reconociendo su estructura, propiedades y aplicaciones en contextos diversos, tanto en el aula como en la vida cotidiana.

De este modo se presentan herramientas concretas que sirven para reconfigurar el aula como un espacio de producción colectiva de conocimiento, al integrar elementos del entorno inmediato del estudiante y al reconocer los múltiples modos de representación gestuales, visuales, verbales, simbólicos, etc., propios en el proceso de aprendizaje. En este sentido, la TO permite a los docentes observar y analizar el aprendizaje considerando los gestos, las interacciones y las formas de expresión, en otras palabras, al extender la mirada a representaciones distintas a las simbólicas, se materializa el pensamiento de los estudiantes permitiéndole al docente identificar aspectos relevantes para modificar y/o actualizar su práctica en pro de una labor conjunta que favorezca el aprendizaje.

Teniendo en cuenta lo anterior, la relevancia de este trabajo aporta tanto en lo teórico como en lo práctico. En el plano teórico, se explora un marco que en los últimos años viene tomando relevancia para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, ampliando las posibilidades de análisis de los procesos que ocurren en el aula. En el plano práctico, se presenta un ejemplo concreto que muestra un diseño, desde un enfoque sociocultural, de una secuencia didáctica que posibilita la comprensión de cómo el conocimiento matemático, en particular el de la elipse, se elabora colectivamente en condiciones históricamente situadas y mediadas culturalmente. En este sentido, más allá de una alternativa metodológica, se propone una perspectiva diferente del aula y de los actores que en ella participan, abriendo caminos para pensar el conocimiento matemático como una elaboración conjunta.

Finalmente, como futuros docentes de matemáticas, se nos invita a ir más allá de una enseñanza puramente teórica o procedimental, promoviendo en el estudiante una actitud investigativa, reflexiva y activa frente al conocimiento. Este enfoque, el sociocultural, no solo favorece una comprensión más profunda de cómo los conceptos matemáticos se han gestado a lo largo de la historia, sino que también visibiliza su utilidad y pertinencia en múltiples contextos, reforzando así su dimensión cultural y humana. Al concebir el aprendizaje como una dinámica social, el aula se transforma en un espacio donde el diálogo, la argumentación y la interacción enriquecen el pensamiento matemático, permitiendo que el estudiante se reconozca como participante activo de la construcción del saber, mientras que la propia formación docente se fortalece y se actualiza de manera continua.

CAPÍTULO II. Marco teórico

El arte de hacer las matemáticas consiste en la búsqueda de ese caso especial, que contiene todos los gérmenes de la generalidad

David Hilbert

Según Radford 2013, “la didáctica de las matemáticas emergió como resultado de las necesidades sociales y económicas que planteaba la modernización del mundo europeo a fines del siglo XIX” (p. 63). Pues sin los principios de la mecánica, la geometría analítica y el cálculo diferencial, no existiría lo que constituye la civilización moderna. La modernización, por tanto, impulsó el desarrollo de las teorías de la educación matemática, dado que la creciente demanda de diversas ramas de las matemáticas llevó a una expansión de las horas dedicadas a la asignatura en el currículo escolar, pasando de 4 a 18 horas (Aroca, 2019).

A principios del siglo XX, surgieron dos teorías influenciadas por las ideas de Piaget: la primera de ellas es el constructivismo, desarrollado en Estados Unidos, la cual sostiene que el conocimiento no es adquirido de manera pasiva, sino que se construye activamente por el sujeto a través de su interacción con el entorno. Esta teoría subraya el papel activo del estudiante en su propio aprendizaje, promoviendo una construcción dinámica del saber. La segunda es la Teoría de Situaciones Didácticas desarrollada en Francia, la cual plantea que el aprendizaje es el resultado de la resolución de problemas específicos dentro de situaciones didácticas diseñadas cuidadosamente por el docente, bajo esta teoría, la enseñanza requiere la selección intencional de situaciones que provoquen una adaptación intelectual en el estudiante, favoreciendo su desarrollo cognitivo a partir de situaciones concretas (Radford, 2023a).

Las dos teorías mencionadas han evolucionado y dado lugar a nuevas perspectivas, una de ellas es la Teoría de la Objetivación (TO) en la que, de manera general, se sostiene que “los procesos de enseñanza y aprendizaje no pueden comprenderse de manera aislada, sino en relación con las prácticas sociales y culturales en las que están inmersos los sujetos”

(Radford 2011, p73). La TO enfatiza que el conocimiento no es exclusivamente una construcción individual ni una respuesta a problemas específicos, sino un proceso mediado por el cuerpo, el lenguaje, los signos, los artefactos y la interacción sociocultural.

Radford se inspiró en una perspectiva materialista dialéctica para explicar cómo la Teoría de la Objetivación es influenciada por la teoría del constructivismo y la teoría de situaciones didácticas. Desde esta perspectiva, la construcción del marco teórico de la TO considera estas dos teorías estableciendo vínculos definidos entre la TO y el constructivismo, así como entre la TO y la teoría de situaciones didácticas. Es a través de esos vínculos que la TO entra en relación dialéctica con las dos teorías de referencia, permitiendo a la TO ver cómo se enmarca, teoriza y tematiza un determinado constructo teórico, como por ejemplo “conocimiento” y “sujeto”, en el constructivismo y en la teoría de situaciones. Si bien la TO no necesita construir estos conceptos como expansión o generalización de los correspondientes constructos que se encuentran en el constructivismo y en la teoría de situaciones, el vínculo dialéctico es tan profundo que le da forma y contenido a los dos conceptos de la TO que se ven profundamente afectados por los desarrollos de las otras dos teorías. En otras palabras, la TO ha sido configurada bajo la influencia de la teoría del constructivismo y la teoría de situaciones didácticas, su desarrollo teórico difícilmente habría sido posible sin una referencia constante y sistemática de los fundamentos conceptuales de las dos teorías mencionadas.

En particular, haciendo referencia a los conceptos de sujeto y conocimiento, y considerando que tanto el constructivismo como la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) se fundamentan en los principios epistemológicos de Piaget, es posible identificar algunas similitudes en la manera en que conciben al sujeto. En este sentido, según Radford, 2023a

El constructivismo y la TSD presentan algunas similitudes (por ejemplo, ambas teorías hacen hincapié en la importancia de la autonomía del estudiante frente al profesor). Sin

embargo, difieren en otros aspectos. Por ejemplo, no tienen la misma concepción del aprendizaje, en parte debido a las diferencias en sus conceptos de saber. (p. 17)

Según Radford 2023a, el sujeto se concibe como una entidad que, por medio de la actividad práctica se inscribe en un mundo social, en este proceso el sujeto no solo produce, sino que también coproduce continua y activamente dentro de las posibilidades de su cultura. Por otro lado, en lo que respecta al conocimiento es una forma cuyo origen se enmarca en un contexto histórico-cultural de hacer, pensar y reflexionar, puede definirse como la actualización del saber, entendido como una construcción de percibir, notar y/o sentir.

Con el objetivo de precisar lo expuesto en los párrafos anteriores, a continuación se desarrollarán con más detalle los referentes teóricos que sustentan el presente trabajo.

2.1 La Teoría de la Objetivación

La TO es un constructo teórico que se inscribe dentro de una perspectiva sociocultural y proporciona bases conceptuales fundamentales para el estudio del aprendizaje, así como para la comprensión del rol del docente y del estudiante en los procesos educativos. En este contexto, se destaca la importancia de los artefactos semióticos, como los signos, el lenguaje y la corporalidad, en la conceptualización del conocimiento, así como las nociones de saber, conocimiento, el proceso de ser y el proceso de llegar a ser.

La TO es parte del campo de las teorías socioculturales educativas contemporáneas, según Radford 2023a, surgen como alternativa a los enfoques individualistas del aprendizaje y la concepción de las matemáticas en la Europa central, buscando desarrollar concepciones del saber y el conocimiento desde una perspectiva orientada hacia lo social y lo histórico-cultural. Para profundizar en la importancia de los conceptos fundamentales de la TO, es crucial abordar los medios semióticos, los cuales, según Radford, son herramientas empleadas por los estudiantes en el aula para construir significados sobre el conocimiento. Los artefactos semióticos facilitan la generación de significados sociales y permiten la emergencia del

conocimiento a través de diversos elementos, como los movimientos corporales, el lenguaje producido por la actividad, la entonación con la que se expresa el sujeto y las señales que representan distintos conceptos según el contexto. Cada uno de estos componentes forma parte del lenguaje natural que surge en la interacción, y en conjunto, contribuyen a la elaboración de un significado general.

El conjunto de dichos artefactos semióticos permite la emergencia de lo que Radford llama nodos semióticos que es la manifestación simultánea de diferentes MSO, los cuales, representan momentos de acción en el aula donde se generan interacciones entre estudiantes y profesores. Estos nodos son puntos específicos en los que se intersecan múltiples significados, símbolos, signos y lenguaje corporal, con el propósito de generalizar la interpretación de ciertas nociones desarrolladas durante el proceso de objetivación, a su vez, estos momentos contribuyen a la elaboración de nuevos significados del saber.

La intersección entre diversos significados, símbolos y signos constituyen una manera de abordar una de las ideas centrales del materialismo dialéctico, la cual se configura a partir de relaciones dialécticas entre entidades de conocimiento con el propósito de realizar la actualización del saber. Estas relaciones se fundamentan en las acciones y conocimientos adquiridos durante los diferentes momentos de interacción en el aula. En este sentido, se establece una relación que permite fusionar dos cosas diferentes en un solo concepto, con el objetivo de entender el contexto que rodea al individuo de diferentes formas.

Los Medios Semióticos de Objetivación se entienden como el conjunto de artefactos, signos, herramientas y recursos lingüísticos que las personas emplean intencionalmente para hacer visibles sus ideas, expresar propósitos y llevar a cabo acciones en un contexto social evidencian que el saber no se manifiesta de manera inmediata ni accesible, ya que inicialmente se encuentra en un plano abstracto y debe transformarse en algo tangible, como sostiene Radford (2023a p. 123). En este proceso, es necesario potenciar ciertas formas de acción que

permitan la emergencia de nuevos saberes y, con ello, la actualización del conocimiento. Para que este mecanismo funcione, dichas potencialidades deben mantenerse en constante movimiento y volverse inteligibles para la consciencia y el pensamiento. Según Radford, la consciencia no puede aprender estas potencialidades de manera directa y concreta, sino que lo hace a través del pensamiento. Es precisamente mediante este proceso de transformación que el saber se materializa y se hace accesible a través de lo sensible y lo tangible, permitiendo así la emergencia del conocimiento.

2.2 Saber y conocimiento

Desde la TO se pueden destacar dos conceptos claves que son el saber y el conocimiento, aunque inicialmente se podrían pensar cómo lo mismo, tienen diferencias importantes que ayudan a comprender mejor las formas de aprender y la interacción con el mundo.

Por un lado, el saber es definido por Radford como una capacidad generativa que ayuda a resolver problemas y determina la forma de pensar y actuar, no está presente en una sola persona, es un sistema de formas de pensar que ha sido construido histórica y culturalmente. Tal como señala Radford (2013) “el saber es una entidad general, un sistema de formas o arquetipos de pensamiento, acción y reflexión histórica y culturalmente constituidos a partir de la labor colectiva, material, corporal y sensible” (p. 73). Dicho de otro modo, el saber es la potencialidad que tiene una cultura, este puede ser usado o actualizado mediante la actividad humana, no permanece estático, constantemente va cambiando y se va adaptando a los diferentes contextos.

Por otro lado, el conocimiento es esa actualización o materialización del saber en algo concreto, esto sucede cuando la actividad humana pone en práctica el saber. El conocimiento no es solo la repetición del saber, sino la manifestación de ciertas situaciones en las que se produce, “el conocimiento es la actualización o materialización del saber. Es algo que podemos

percibir, notar, sentir: algo que puede ser captado por la consciencia humana” (Radford, 2013, p. 15). En este sentido, la actividad humana, cuando transforma el saber en algo perceptible y tangible, da como resultado del conocimiento. Por ejemplo, cuando el estudiante está resolviendo un problema matemático, está transformando el saber en una forma específica haciendo uso del lenguaje, herramientas y acciones concretas.

La relación entre estos elementos es dialéctica, es decir, una relación que está en constante cambio se transforma mutuamente, como lo hace el conocimiento, que no solo refleja el saber, sino que también lo transforma y lo enriquece. Esto ayuda a entender que el aprendizaje no es solo la transmisión de información, sino un proceso dinámico en el que los individuos interactúan con el conocimiento y lo transforman a través de la actividad práctica, de este modo abre posibilidades de pensamiento y acción, dando como resultado la actualización del saber en otro contexto o situación que va a generar nuevo conocimiento.

2.3 Aprendizaje

El enfoque sociocultural del aprendizaje se fundamenta en la idea que los individuos adquieren conocimientos culturales a través de la participación en prácticas sociales. Esta perspectiva, tal como señala Rogoff citado en Radford (2023a), enfatiza el papel crucial del mantenimiento de los roles individuales dentro de su entorno social. Es decir, cómo un individuo llega a comprender y participar en las actividades inherentes a su cultura. En el caso del conocimiento matemático, la forma de conceptualizar este proceso es entender las matemáticas como una entidad general o un conocimiento abstracto que se concreta a través de la interacción humana. Este conocimiento, en su estado general, carece de forma definida, para darle forma, es necesario materializar dicho saber en algo tangible y sensorial, de manera que pueda explicarse de la misma forma que se describe un fenómeno físico. En el ámbito del conocimiento matemático, se extrae una porción de esta generalidad y se le da forma mediante la interacción humana, permitiendo que se vuelva algo comprensible y tangible. Este proceso

transforma una potencialidad abstracta en una realidad comprensible en diversos términos, ya sean innatos o adquiridos.

Desde esta mirada, el proceso de aprendizaje se concibe como una interacción dinámica entre el individuo y su entorno cultural. Durante este proceso, el sujeto va adquiriendo gradualmente conocimientos históricos y sociales mediante su participación activa en diversos contextos, tanto educativos como sociales. La adquisición de conocimiento se ve enriquecida mediante procesos de objetivación, donde el individuo internaliza y reconstruye significados a partir de la práctica cultural disponible, consolidando así su comprensión y apropiación de este (Radford, 2023a). Es esencial comprender que el aprendizaje no ocurre en un vacío, sino que está intrínsecamente ligado a la cultura y al entorno social del individuo. Las interacciones cotidianas, las prácticas sociales y las experiencias compartidas son los vehículos a través de los cuales se construye el conocimiento. En este sentido, el proceso de enseñanza-aprendizaje debe diseñarse considerando la diversidad cultural y promoviendo la participación activa de los estudiantes en su propio proceso de elaboración de conocimiento.

Es importante destacar que el aprendizaje no se limita a la adquisición de información, sino que implica la comprensión profunda y la internalización de los conceptos. La internalización va más allá de la mera repetición de información; implica una reelaboración activa y significativa de los conocimientos, permitiendo al individuo incorporarlos a su estructura cognitiva de manera personal y contextualizada.

2.4 Procesos de objetivación

Los procesos de objetivación han sido abordados desde diversas formas de pensamiento a lo largo de la historia y en distintas culturas, con el propósito de comprender cómo se han adquirido los conocimientos en diversos contextos culturales. En este sentido, Radford propuso un sistema de constructos teóricos relacionados con estos procesos, los cuales incluyen los medios semióticos, los nodos y la contracción semiótica.

Es fundamental comprender que los procesos de objetivación no son simplemente constructos teóricos aplicados de manera aislada, sino que requieren una investigación previa en el aula para analizar su funcionamiento. Por ello, Radford introduce el concepto de *labor conjunta*, que se refiere al trabajo colaborativo entre el profesor y el estudiante. En este proceso, se hace evidente la presencia de la cultura material, enriquecida con la inteligencia histórica, así como la interacción con símbolos, signos semióticos y artefactos.

Además, esta labor conjunta está mediada por una actividad de enseñanza-aprendizaje en la que participan activamente tanto el docente como el estudiante. Dicha tarea debe incluir elementos concretos que faciliten la emergencia del conocimiento, ya sea a través de la discusión generada en el desarrollo de las tareas o mediante la aparición de medios semióticos. Según la TO, este tipo de tareas surgen de la interacción entre personas y artefactos, los cuales están cargados de significados sensibles, cognitivos, éticos y emocionales.

En la planificación de una actividad de enseñanza-aprendizaje, es fundamental considerar su estructura, la cual debe contar con un objetivo claro desde el inicio, identificado por el docente. Para que la actividad conduzca a una conclusión significativa, su desarrollo debe estar orientado hacia dicho objetivo, evidenciando una o varias metas alcanzables a lo largo del proceso. En este sentido, la ejecución adecuada de la actividad requiere la definición de tareas específicas, las cuales deben estar conformadas por una serie de acciones organizadas en función de una complejidad conceptual creciente. Además, en la TO, cada actividad incorpora un análisis epistemológico del contenido, lo que permite una interiorización más profunda y efectiva del conocimiento generado.

Es importante recordar que la labor conjunta se configura como un fenómeno espaciotemporal cuya potencialización depende de la participación activa de estudiantes y docentes. Estas potencialidades emergen a través de diversos campos, tales como la sensibilidad, la

materialidad, el discurso y la gestualidad. En este contexto, el conocimiento surge como el resultado de esta labor conjunta, manifestándose a través del pensamiento y la consciencia como una entidad inteligible. Asimismo, se observa un proceso cultural del saber que se transforma desde su dimensión interna hacia una expresión externa. Esta transformación permite el desarrollo de nuevas formas de percepción, discusión y apropiación de conceptos, enriqueciendo así la elaboración de conocimiento.

2.5 Procesos de subjetivación

En la TO, el proceso de enseñanza-aprendizaje se estructura en torno a dos dimensiones fundamentales: por un lado, el saber y el conocimiento, el cual se investiga a través de los procesos de objetivación y por otro lado el ser y el devenir que se aborda mediante la subjetivación. Ambos procesos están estrechamente relacionados, ya que la subjetivación actúa como un complemento de la objetivación, contribuyendo así al desarrollo del proceso de la enseñanza-aprendizaje del sujeto.

La subjetivación es un proceso estrechamente ligado al sujeto, ya que este es sensible, cultural y concreto. La subjetividad está en constante transformación a través del Ser y sus manifestaciones, en un proceso que ocurre de manera simultánea y entrelazada. La objetivación se refiere a la forma en que las ideas, conocimientos y saberes se estructuran y presentan dentro de un contexto social, mientras que la subjetivación se enfoca en cómo los individuos se posicionan y construyen su identidad a partir de su relación con esos saberes.

Según Radford, el sujeto es una entidad preexistente que posee un saber propio, para desarrollar este conocimiento requiere un entorno sociocultural estimulante, en el cual pueda subjetivar la construcción de su identidad. Este proceso de subjetivación no es meramente interno e individual, sino que emerge a través de la interacción con otros y con el mundo que lo rodea. Dicha interacción se lleva a cabo mediante signos, herramientas y prácticas sociales.

Así, el aprendizaje no se limita a la adquisición de conocimiento, sino que también implica su actualización y transformación a través de la participación en dichas prácticas.

De este modo, es posible hablar del “ser” y del “llegar a ser”. El “ser” es una entidad en constante cambio que, a través de las prácticas sociales, se actualiza mediante las acciones y actividades del sujeto. Por otro lado, el “llegar a ser” representa la materialización del ser, un proceso que puede entenderse como devenir, el cual nunca está completamente concluido.

2.6 Enseñanza-aprendizaje

Comprender el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, ha sido un tema de interés constante en la comunidad de educadores matemáticos, lo que ha llevado a investigaciones exhaustivas sobre las metodologías empleadas por los docentes en el aula. Sin embargo, a pesar de los avances en la educación, estos procesos han permanecido relativamente con las mismas metodologías, lo que sugiere la necesidad de explorar nuevas aproximaciones que permitan mejorar y explicar este proceso. Dado que dicho proceso requiere innovación, se reconoce la necesidad de explorar nuevas metodologías que faciliten la comprensión y elaboración de significados matemáticos por parte de los estudiantes. Esto implica fortalecer y enriquecer las prácticas pedagógicas, las cuales están en constante transformación debido a múltiples factores. La TO ofrece constructos teóricos que permiten analizar estas dinámicas desde una perspectiva histórico-cultural.

La TO indaga que el proceso por el cual los sujetos adquieren conocimientos es a través de la elaboración de significados de los objetos socioculturales que los rodean, mediando entre el saber, el conocimiento y la actividad. Esta perspectiva teórica permite analizar y explicar las formas en que se adquieren los conocimientos matemáticos, lo que podría resultar fundamental para mejorar la práctica educativa y por ende entender la manera en la que los estudiantes aprenden.

Por tal motivo, el o los procesos de objetivación permiten visualizar y examinar el comportamiento que los estudiantes exhiben al resolver tareas matemáticas. Esto se logra identificando gestos o movimientos corporales que permiten analizar su forma de pensar y cómo están comprendiendo los conceptos matemáticos. Además, la elaboración de significados propios por parte de los estudiantes es otra forma de identificación, esta se manifiesta cuando comparten su comprensión y conocimiento en su grupo.

Por su parte, la TO, destaca la naturaleza abstracta del saber, el cual se caracteriza por su capacidad de actualización a través de la labor que media. Según Radford (2013), el saber es una posibilidad pura que no puede ser percibida en su totalidad, por lo que no puede ser equiparada con ninguna de sus instancias o actualizaciones concretas. El conocimiento implica la comprensión del significado del saber en un sentido general, es decir, como una entidad abstracta que trasciende sus manifestaciones particulares.

Para comprender lo anteriormente dicho, es necesario explicitar el principio de la dimensión educativa, según Luis Radford, esta menciona que la enseñanza-aprendizaje es un proceso de objetivación, el cual se basa en la visualización y elaboración de significados, es decir, todo lo que rodea al sujeto ha adquirido diferentes significados y esto se debe a las transformaciones histórico-culturales que se manifiestan en su entorno, de manera que, "La objetivación es el proceso social, corpóreo y simbólicamente mediado de toma de consciencia y discernimiento crítico de formas de expresión, acción y reflexión constituidas históricamente y culturalmente" (Radford, 2014, p. 141). En esta dimensión, el aprendizaje no está relacionado con construir o deconstruir un conocimiento, es de dotar con significados a elementos u objetos conceptuales que rodean al alumno en su cultura (Radford, 2006 a, p.113). Por lo tanto, este proceso de adquisición de saberes hace parte de una elaboración activa de significados, en el que se encuentra el aprendizaje como el proceso del individuo que realiza por medio del esfuerzo que necesita para obtener el conocimiento, esto permite visualizar los procesos de

objetivación y sus respectivos derivados. A su vez, la consciencia surge mediante la actividad histórico-cultural humana que es donde se encuentra su razón de ser, es otras palabras, el aprendizaje y la consciencia son el resultado de la relación entre el individuo y el mundo que lo rodea.

Se debe tener en cuenta que la enseñanza es un proceso dinámico que implica poner en marcha y mantener actividades contextuales situadas en el espacio y el tiempo, las cuales están orientadas hacia un patrón de actividad fijo incrustado en la cultura (Radford, 2006a, p. 115). Esto significa que la enseñanza-aprendizaje se actualiza y se adapta a medida que se reflexiona en el proceso conjunto y colaborativo en el que el estudiante tiene un papel activo. Cuando se enfrenta a actividades desconocidas, el alumno utiliza artefactos para elaborar significados y reflexionar sobre la actualización del saber. A través de este proceso, internaliza el nuevo conocimiento y lo hace parte de su propia experiencia.

2.7 Acerca de la elipse

Tomando como referencia a Radford (2023a), los objetos matemáticos “son ideas construidas histórica y culturalmente. Más precisamente, los objetos matemáticos son trabajo cristalizado que las nuevas generaciones encontrarán e interpretan de nuevas maneras y se modifican o expanden a medida que, a su vez, llegan a reflejar y actuar en las sociedades y culturas siempre cambiantes de su tiempo” (p. 142). Se puede pensar acerca de la elipse como objeto cultural, que mediante el proceso de enseñanza-aprendizaje se ha actualizado a través de la historia a nuevos conocimientos.

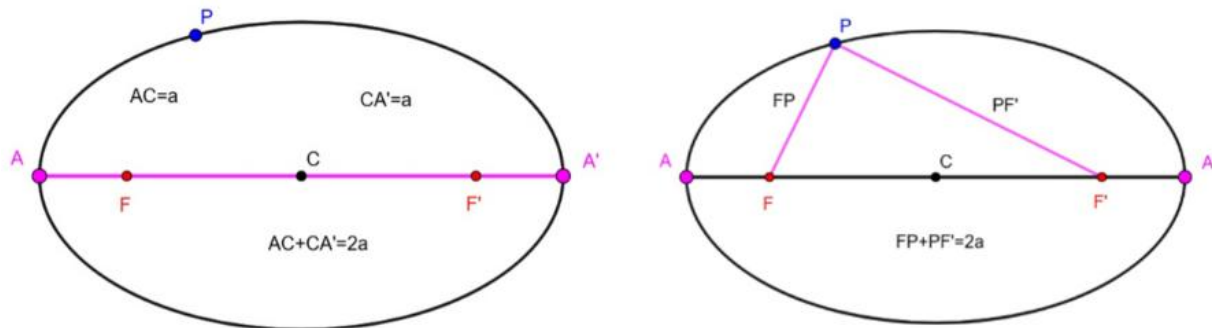
Desde la perspectiva de Radford, la elipse adquiriría su significado no solo en su forma matemática, sino en cómo se ha materializado y utilizado en diferentes contextos, como en la astronomía, la arquitectura, la ingeniería, entre otros. Estas aplicaciones muestran cómo el concepto de la elipse no es simplemente un objeto matemático aislado, sino una entidad cuya objetividad se construye a través de prácticas culturales y discursos específicos.

Desde una perspectiva socio-cultural, la producción y transformación del saber matemático de la elipse se concibe como un proceso cultural, donde el saber existe y se actualiza en un nuevo conocimiento dentro de un contexto cultural. Por lo tanto, el saber matemático de la elipse está implícitamente influenciado por la cultura que lo genera y se actualiza constantemente a medida que se crean nuevos significados.

Una definición formal de la elipse como lugar geométrico, según Aragón y Quintero (2017, p.15) “Se entiende como el lugar geométrico del conjunto de puntos $(x, y) = P$ tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos llamados foco (F) y (F') es $2a$ (es constante), por lo tanto, se debe cumplir que: $PF + PF' = 2a$ ” ver Figura 3.

Figura 3

Representación geométrica de la elipse



Nota. Adaptada de “Propuesta de enseñanza de las secciones cónicas usando diversas tecnologías para su desarrollo” por J. Aragón. & C. Quintero. 2017

Para representar algebraicamente dicho conjunto de puntos $P = (x, y)$ se establecen las coordenadas $(c, 0)$ y $(-c, 0)$ para los focos F y F' respectivamente, así:

$$\sqrt{(c - x)^2 + y^2} + \sqrt{(c + x)^2 + y^2} = 2a$$

Realizando una respectiva simplificación se llega a,

$$\begin{aligned}
 cx + a^2 &= a\sqrt{(c+x)^2 + y^2} \\
 \Rightarrow (cx + a^2)^2 &= \left(a\sqrt{(c+x)^2 + y^2}\right)^2 \\
 \Rightarrow c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 &= a^2c^2 + 2a^2cx + a^2x^2 + a^2y^2 \\
 \Rightarrow a^2(a^2 - c^2) &= (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2
 \end{aligned}$$

Ahora, como $a > c$ entonces $a^2 > c^2$ y $c^2 - a^2$ es un número positivo para este caso b^2

$$\begin{aligned}
 a^2b^2 &= b^2x^2 + a^2y^2 \\
 \Rightarrow 1 &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}
 \end{aligned}$$

Radford argumenta que la objetividad se alcanza a través de procesos mediadores donde el lenguaje, los símbolos y los artefactos juegan un rol central. En la enseñanza de la elipse, por ejemplo, se utilizan diagramas, ecuaciones y modelos visuales que actúan como mediadores entre el concepto abstracto y su comprensión por parte de los estudiantes. Desde esta perspectiva, la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ no es simplemente una expresión neutral, sino un signo que lleva consigo un conjunto de significados culturales y contextuales. Los estudiantes no solo aprenden a manipular esta ecuación; también aprenden a interpretar su relevancia y aplicabilidad dentro de un marco cultural específico, como el de la ciencia moderna. Como ya se ha mencionado, la TO de Radford enfatiza que el aprendizaje y la comprensión de conceptos matemáticos, como la elipse, son procesos dinámicos donde interactúan lo cognitivo y lo cultural. En este sentido, comprender la elipse no es solo un acto de conocimiento individual, sino un proceso en el cual se participa en una cultura matemática particular, donde se comparte un conjunto de prácticas, símbolos y discursos que hacen posible la objetivación del concepto.

2.8 Principios Geométricos y Algorítmicos en el Origami.

La papiroflexia (origami en japonés), es el arte de origen japonés de plegar papel para hacer figuras, sin utilizar tijeras o pegamento, tan solo el papel y las manos. El origami, como técnica de plegado de papel, ofrece una fuente de exploración matemática, estudiando diversos conceptos tales como: Transformaciones geométricas, propiedades de figuras geométricas, postulados y axiomas geométricos, etc. En Radford (2023a, p96) se señala la importancia sobre que “Los procesos de objetivación son aquellos actos de notar con sentido algo que se revela a nuestra consciencia por medio de nuestra actividad semiótica corpórea, sensorial y artefactual.” Para el caso del presente estudio, el plegado de papel visto desde la TO es un artefacto que posibilita la emergencia de los Medios Semióticos de Objetivación (MSO) durante el proceso de enseñanza-aprendizaje que tiene lugar cuando los estudiantes se enfrentan a tareas matemáticas relacionadas con el concepto de elipse.

En este contexto, teniendo en cuenta que los procesos de enseñanza-aprendizaje emergen por medio de expresiones corpóreas o diálogos los cuales surgen de las diferentes interacciones sociales y culturales, en la TO se propone un desarrollo teórico llamado contracción semiótica: “La contracción semiótica muestra, en efecto, cómo y en qué medida los estudiantes van tomando consciencia del contenido conceptual singular del saber materializado en conocimiento.” Radford (2023a, p130), en este sentido, se evidencia como el estudiante a través de la experiencia va adquiriendo un saber que se refina y se va transformando en un conocimiento estructurado y tangible, el cual será el nuevo conocimiento. Para el caso de este estudio, se parte de la premisa de que los estudiantes poseen ciertos conocimientos sobre algunos conceptos relacionados a la sección cónica elipse. Estos saberes, al ser movilizados y puestos en práctica durante el desarrollo de la secuencia de tareas diseñada, se consolidan y transforman en nuevos conocimientos, producto de la labor conjunta entre docentes y estudiantes.

Teniendo en cuenta lo expuesto en el párrafo anterior, es posible considerar al origami como una herramienta y/o un medio que posibilita que los MSO puedan surgir en el desarrollo de las diferentes tareas, las cuales fueron diseñadas partiendo de la propuesta de Aragón y Quintero (2017) quienes propusieron una secuencia de actividades utilizando plegado de papel, dichas actividades consistieron en la enseñanza de las secciones cónicas utilizando el origami como medio de construcción geométrica el cual permitiría facilitar su comprensión, tal como señalan sus autores:

Esta geometría nos permitirá caracterizar las secciones cónicas como lugares geométricos, dado que con esta se pueden establecer relaciones de las distancias de los puntos que las generan los lugares geométricos respecto a los focos, puesto que el doblado de papel se ha convertido en una alternativa para el razonamiento (p. 22).

Desde esta perspectiva, es posible inferir como se relaciona la elipse como lugar geométrico al momento realizar distintos tipos de dobleces sobre circunferencias de papel dadas, con el fin de que el estudiante pueda identificar y analizar que sucede en este proceso. Además, el papel se convierte en un artefacto que materializa el pensamiento de los estudiantes y permite observar la emergencia de las diferentes acciones que los estudiantes realizan en el proceso de elaboración de significados y por ende permite identificar los Medios Semióticos de Objetivación emergentes.

CAPÍTULO III. Metodología

Si la gente no cree que las matemáticas son simples, es solo porque no se dan cuenta de lo complicada que es la vida.

John Louis Von Neumann

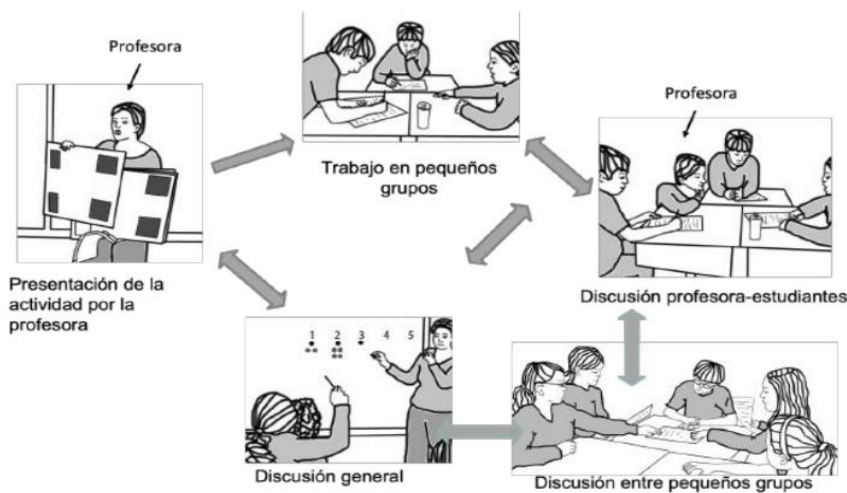
Como ya se ha mencionado, la presente propuesta se enmarca en un enfoque de tipo sociocultural, puesto que se busca interpretar los fenómenos que suceden durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, de la elipse vista como lugar geométrico, dado que se busca identificar los diferentes medios semióticos de objetivación que emergen cuando los estudiantes desarrollan una secuencia de tareas relacionadas con el concepto de elipse, de esta manera se pretende recolectar información que sirva para cumplir con los objetivos planteados. Para tal fin, se tomará como aproximación metodológica un enfoque de tipo cualitativo, la razón de esta elección se fundamenta en los postulados teóricos de la TO, en los que se da gran importancia al lenguaje corporal de los sujetos cuando se enfrentan a situaciones y/o actividades matemáticas en el aula de clases; en este contexto, una estrategia investigativa que se ajusta a los objetivos y referentes teóricos de este trabajo, es la estrategia denominada *observación clínica* que menciona:

La estrategia investigativa denominada observación clínica es una variante de la estrategia basada en tareas. Consiste en hacer una indagación sistemática sobre la actividad que llevan a cabo individuos o grupos de individuos, autónomamente, mientras resuelven una tarea preplaneada, según los objetivos de la investigación. Un investigador observador establece previamente qué quiere observar y en qué momentos de la situación, y se atiene a tal libreto procurando controlar la recolección de información sin intervenir (Romberg, 1992), citado en (Camargo, L. 2021)

Cabe destacar que este trabajo de investigación se encuentra alineado con los lineamientos de dicha estrategia, pues uno de los preceptos de la observación clínica es que el investigador no tiene interacción con los investigados (estudiantes o docentes) al momento de la implementación de las tareas, sin embargo en la presente investigación uno de los investigadores es el docente encargado de los estudiantes y en algunos momentos de la sesiones de tareas dicho investigador interactuó con el grupo de estudiantes, además, bajo los principios teóricos de la TO la participación del investigador durante la actividad matemática de los estudiantes es fundamental. Por tal motivo, se hizo una adaptación a la metodología de la Teoría de la Objetivación (Radford, 2023a) (ver figura 4) y al plan de ejecución de una observación clínica expuesta en (Camargo, 2021) (ver figura 5).

Figura 4

La actividad θ y alguno de sus “momentos”



Nota. Tomada de “La teoría de objetivación” por L. Radford. 2023a

Figura 5

Plan de ejecución de una observación clínica

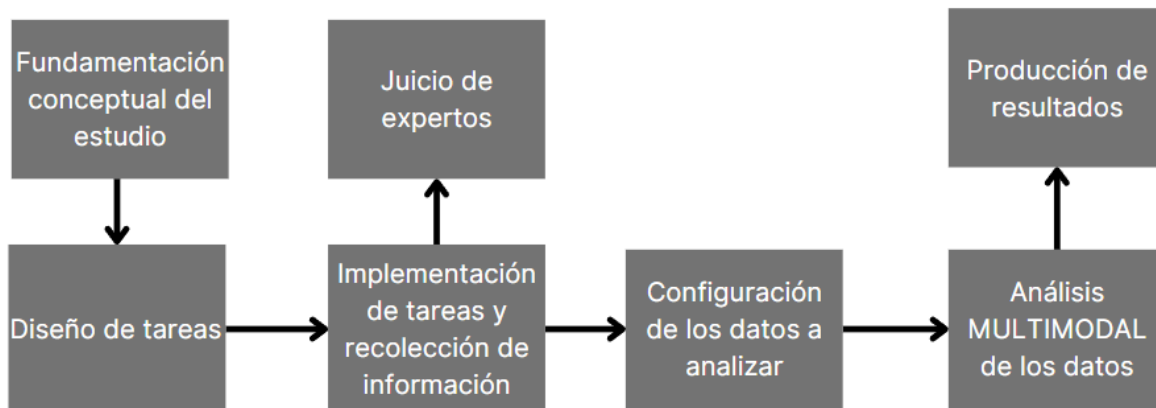


Nota. Tomada de “Estrategias de investigación cualitativa en educación matemática” por Camargo (2021).

Es así como, tomando algunos elementos de cada metodología, se construyó una propuesta metodológica que permite dar cumplimiento a los objetivos del estudio. (ver figura 6).

Figura 6

Esquema metodológico adaptado para el desarrollo del estudio



Nota. Elaboración propia

Ahora bien, como se ya se mencionó, uno de los investigadores participó en la secuencia de tareas desempeñando el rol de docente, esto podría sugerir que la metodología de investigación-acción sería la más efectiva para este estudio. No obstante, dicha metodología

se centra en resolver problemas específicos en diferentes prácticas y mejorarlos; en contraste, el estudio aquí reportado adopta una perspectiva diferente, pues su propósito no es intervenir ni transformar una práctica específica, sino identificar los MSO que emergen cuando los estudiantes se enfrentan a determinadas actividades o tareas. En otras palabras, el interés no radica en resolver un problema de enseñanza-aprendizaje, sino en comprender la forma en la que los estudiantes piensan y actúan al elaborar significados de un concepto matemático como lo es el de elipse.

Por otro lado, en el plan de ejecución de una observación clínica se contempla la aplicación de una prueba piloto, sin embargo, se suprime en esta adaptación ya que el docente-investigador conoce el proceso académico de los estudiantes. Además, se elimina la fase de la realización de la tarea por parte de los participantes de forma autónoma, ya que en dicha fase el investigador no debe interferir al momento de la implementación de la secuencia de tareas; no obstante, como se ha mencionado, uno de los investigadores es el docente de los estudiantes e interactúa constantemente con ellos, lo que implica que la realización de la tarea no es totalmente autónoma. Finalmente, se incorporó el análisis multimodal, recurso utilizado por Arzarello (2006), el cual permite observar cómo estos medios facilitan la materialización de los saberes matemáticos en diferentes contextos culturales y sociales, de esta manera los diferentes modos de representación y comunicación interactúan de manera integrada en el proceso de enseñanza-aprendizaje en educación matemática, favoreciendo la elaboración de significados.

De esta manera, las fases que se tuvieron en cuenta, de cada metodología, para la construcción de una propia son: fundamentación conceptual del estudio, diseño de tareas, implementación de tareas y recolección de información, juicio de expertos, configuración de los datos a analizar, análisis multimodal de los datos y por último la producción de resultados. A continuación, se realiza una descripción de cada una de estas fases.

3.1 Fundamentación conceptual del estudio

Para la fundamentación conceptual se realiza una revisión teórica orientada por los postulados de la TO, la cual proporciona el sustento epistemológico y metodológico del estudio, permitiendo así alinear el objetivo general de la investigación con el diseño metodológico construido. Para tal fin, se adopta un enfoque cualitativo coherente con el marco teórico, basado en la observación de la actividad matemática de los estudiantes para identificar MSO tales como los gestos, expresiones verbales, lenguaje escrito y simbólico, entre otros. En esta fase se definen los instrumentos de recolección de información como: material audiovisual, guías y entrevistas. El material audiovisual posibilita captar expresiones corporales y verbales significativas; las guías de trabajo facilitan el registro de producciones escritas y simbólicas; y finalmente, las entrevistas contribuyen a la triangulación de los datos, al corroborar la coherencia entre lo expresado verbalmente y lo consignado por escrito. Esta estrategia metodológica refuerza la validez del análisis, en tanto se ajusta a los principios de la TO al reconocer el carácter social, mediado y semiótico de los procesos de elaboración de significados, priorizando el estudio de las interacciones y de los recursos que permiten potencializar el conocimiento matemático.

3.2 Diseño de tareas

Para el diseño de tareas se consideraron la duración de cada sesión y la cantidad de estas. Se diseñó una secuencia de seis (6) tareas que fueron implementadas en seis (6) sesiones, una tarea por sesión, cada una de 80 minutos de duración.

La primera tarea se diseña pensando en identificar los saberes previos de los estudiantes sobre el concepto de circunferencia. Se propuso la construcción de una circunferencia utilizando semillas de frijol, con el fin de propiciar la emergencia de MSO que

dieran cuenta del significado que los estudiantes poseían de las propiedades de la circunferencia vista como un lugar geométrico en el plano.

Para el diseño de la segunda tarea se consideraron los conocimientos previos de los estudiantes sobre rectas paralelas y perpendiculares. Por tal motivo se realiza una actividad basada en la realización de dobleces en una hoja pergamino, con el objetivo de que los estudiantes se familiarizaran con este tipo de construcciones y se propiciara la emergencia de los MSO relacionados con los conceptos. Para tal fin, se dio prioridad al uso de los axiomas 1 y 2 definidos por Hatori (2003) y Huzita (1989):

- Axioma 1: Dados dos puntos distintos, $P1$ y $P2$, hay un pliegue único que pasa a través de ambos.
- Axioma 2: Dados dos puntos distintos $P1$ y $P2$, hay un pliegue único que lleva a $P1$ sobre $P2$.

Por medio de la aplicación de estos axiomas, los estudiantes realizaron la construcción de rectas paralelas y perpendiculares. Cabe señalar que, aunque existen un total de siete (7) axiomas, en este estudio se emplearon exclusivamente los dos primeros, ya que estos axiomas se relacionan con la construcción de rectas a partir de dos puntos y esto contribuye a la realización de las demás tareas.

La tercera tarea se diseña, considerando lo trabajado en las sesiones anteriores. Esta consistió en la construcción de una circunferencia mediante la técnica del doblado de papel, apoyándose en los conocimientos adquiridos durante el desarrollo de las tareas 1 y 2. El objetivo de esta tarea fue evidenciar como los estudiantes establecían relaciones entre el concepto de circunferencia y los axiomas 1 y 2; en otras palabras, construir la circunferencia por medio de dobleces a partir de dos puntos, con el axioma 1 se hace un doblez y se define el radio y con el axioma 2 se generan más dobleces con la misma distancia del radio permitiendo trasladar los puntos de la circunferencia por medio de dobleces sucesivos.

La cuarta tarea consistió en generar una serie de dobleces sobre una circunferencia dada, con el objetivo observar la aparición de recursos semióticos durante el proceso. Se buscó evidenciar, la emergencia de algunos gestos, expresiones verbales o corporales, así, como el uso del lenguaje escrito o simbólico. Para lograr dicho objetivo se realizó una construcción parcial de la elipse, siguiendo la propuesta de Santa y Jaramillo (2010).

La quinta tarea se diseña con el propósito de generar un espacio que permita a los estudiantes acercarse de manera intuitiva y manipulativa al concepto de elipse. Se realiza la construcción siguiendo la propuesta completa de Santa y Jaramillo (2010), utilizando el doblado de papel como recurso didáctico y artefacto mediador que facilite la visualización de distancias que se mantienen constantes en cada uno de los plegados, propiedad que es fundamental para la definición de elipse como lugar geométrico.

Finalmente, la sexta tarea se diseña como continuación de la quinta, dado que los estudiantes no habían tomado consciencia de que la suma de las distancias desde cualquier punto de la elipse a dos puntos fijos, denominados focos, es constante. Por tal razón se propone una tarea centrada en la construcción de la elipse, haciendo énfasis en el doblado del radio de la circunferencia como recurso para explorar y representar dicha propiedad de constancia en las distancias.

3.3 Implementación de tareas y recolección de información

La implementación se llevó a cabo en el aula de clase, desarrollando una tarea por sesión. Cada nueva tarea fue diseñada a partir de los resultados obtenidos de la sesión anterior, con el fin de construir una progresión lógica y coherente durante todo el proceso. En coherencia con la concepción de que el conocimiento matemático es una construcción social, las actividades se realizaron en grupos de tres o cuatro estudiantes. Esta dinámica grupal permitió fomentar el intercambio de ideas y asegurar que todos los participantes compartieran

un lenguaje común, favoreciendo así la labor conjunta como condición fundamental para la objetivación del conocimiento.

Al inicio de cada sesión, se entregó una guía que desarrollaron durante aproximadamente una hora. En este tiempo, el docente acompañaba el proceso con preguntas orientadoras que posibilitaran la emergencia de los MSO, y en algunas de las sesiones el docente-investigador finalizaba con una retroalimentación con el propósito de aclarar y/o fortalecer la comprensión de los estudiantes. La recolección de información se realizó de forma sistemática y multimodal, a través de registros audiovisuales, entrevistas semiestructuradas breves al final de cada sesión y las producciones consignadas en las guías de trabajo. Esta estrategia permitió identificar, a lo largo del proceso enseñanza-aprendizaje, las formas de proceder utilizadas por los estudiantes y los significados elaborados colectivamente en torno a los conceptos trabajados.

3.4 Juicio de expertos

Con el propósito de garantizar la rigurosidad metodológica de este estudio, se conformó un comité de expertos en educación matemática con experiencia en la TO, integrado por: el director del trabajo de grado, docentes de la Licenciatura en Matemáticas y el propio autor de la teoría Luis Radford, si bien no emitió juicios, a través de sus producciones académicas, es considerado como uno de los integrantes de dicho comité. La participación de estos expertos permitió aportar una mirada crítica, reflexiva y fundamentada durante la implementación de las tareas. De este modo, después de cada sesión, se reunían docentes y autores para discutir los resultados obtenidos, reflexionar sobre las interacciones observadas y tomar decisiones orientadas al diseño de la siguiente tarea.

3.5 Configuración de los datos a analizar.

Con el propósito de identificar los MSO que emergieron durante la labor desarrollada por los estudiantes, se configuraron y/o seleccionaron los datos a analizar. Se contemplaron tres etapas fundamentales: Organización, reducción y depuración.

En primer lugar, se llevó a cabo la organización sistemática de la información recolectada. Esta etapa incluyó las transcripciones completas y detalladas de los diálogos sostenidos por los estudiantes y el docente-investigador durante las sesiones, así como las entrevistas realizadas. Dichas transcripciones fueron complementadas con material fotográfico y audiovisual, elaborado con rigurosidad metodológica de acuerdo con los principios teóricos de la TO.

En la fase de reducción de información, se identificaron y seleccionaron los datos más significativos y pertinentes para el estudio. Estos datos correspondieron a momentos relacionados con la interacción social donde se evidenciaron expresiones corporales, verbales, gestuales, así como el uso de lenguaje escrito y simbólico. Dichas expresiones fueron consideradas relevantes en la medida que constituyen MSO esenciales para el análisis.

La etapa final consistió en la depuración de los datos. A partir de las interacciones del docente-investigador y los estudiantes, se identificaron aquellas respuestas en las que emergieron MSO con mayor claridad. Para ello se realizó una revisión minuciosa del material escrito y audiovisual, seleccionando únicamente los momentos relevantes para el cumplimiento de los objetivos de esta investigación. Como parte de este proceso de depuración se seleccionó a uno de los grupos participantes como grupo focal, cuyas intervenciones, tanto por su riqueza semiótica como por su continuidad en las distintas sesiones, resultaron especialmente valiosas para el análisis.

3.6 Análisis Multimodal de los datos

En este estudio, se utilizó el análisis multimodal que es una herramienta que permite analizar diversos recursos, tales como videos, imágenes, oralidad, gestos y sonidos, con el propósito de facilitar la transmisión de ideas y la elaboración de significados (Dias & Radford, 2023). Este enfoque posibilitó la utilización de la información obtenida y depurada para analizar su relación con la elaboración de significados matemáticos.

Moretti y Radford (2023) evidencian que el aprendizaje no constituye un proceso individual, sino, más bien un fenómeno colectivo que se sustenta en la interacción social y la elaboración de significados a través de gestos y lenguaje. En este sentido, los autores enfatizan en la relevancia de emplear herramientas como los videos, los cuales facilitan la observación del proceso de enseñanza-aprendizaje y permiten analizar cómo emerge el conocimiento matemático en las interacciones entre docentes y estudiantes. Un enfoque multimodal, posibilita capturar los procesos de aprendizaje, donde se destaca que cada gesto, palabra e incluso el silencio contribuyen de manera significativa a la construcción del conocimiento.

En este sentido, este enfoque desarrollado por Arzarello (2006), permite comprender como distintos modos de representación y comunicación interactúan de manera conjunta en el proceso de enseñanza-aprendizaje de conceptos matemáticos. El material audiovisual en el aula permitió examinar los momentos claves donde los estudiantes enfrentaron dificultades y así mismo, mediante su labor conjunta superan dichos obstáculos, resaltando la importancia de la interacción social en el aprendizaje.

3.7 Producción de resultados

Finalmente, se llevó a cabo la fase de producción de resultados, en la cual se analizaron los MSO que emergieron en las interacciones realizadas por los estudiantes durante

los procesos de elaboración de significados entorno a los diferentes conceptos matemáticos abordados. Este análisis, fundamentado en los datos recolectados y depurados, facilitó identificar hallazgos relevantes y formular conclusiones que permitieron generar reflexiones significativas sobre la efectividad del enfoque multimodal adoptado para el análisis de la actividad matemática propia de un aula de clase. Para garantizar la validez del análisis, se realizó un proceso de triangulación de los datos que consistió en contrastar las expresiones verbales, gestuales, escritas y simbólicas, integrando varias fuentes de evidencia (material audiovisual, producciones escritas y entrevistas). De esta manera no solo se aseguró una interpretación más robusta, sino que también mantuvo coherencia con los principios teóricos de la TO, la cual concibe el conocimiento matemático como una construcción social mediada por diversos sistemas semióticos que se manifiestan en contextos culturales específicos.

CAPÍTULO IV. Análisis de resultados

El presente estudio se desarrolló en el Colegio Bilingüe CEDAM, un colegio privado de la localidad Los Mártires, barrio Santa Isabel, Bogotá-Colombia. Participaron 18 estudiantes del curso 10A jornada única, la cual inicia a partir de las 7:00 am hasta 2:30 pm. Las edades de los estudiantes oscilan entre los 15 y 17 años, en su mayoría pertenecen al estrato socioeconómico tres (3) y viven en las zonas aledañas del colegio que se caracterizan por una composición demográfica en la que predominan los comerciantes.

Esta investigación se desarrolló en seis (6) sesiones, cada una con una duración aproximada de 80 minutos, coincidiendo con el horario regular de la clase de trigonometría. En total, se implementaron seis (6) tareas, una por sesión. Durante estas sesiones participaron tres (3) investigadores; como se ha señalado anteriormente, uno de ellos también es el docente titular de la asignatura, quien tuvo a su cargo la conducción de las actividades en el aula, mientras los otros dos investigadores se encargaron de la recolección sistemática de la información mediante grabaciones de audio y video. Dado que los participantes son menores de edad, se contó con la respectiva autorización de la rectora de la institución y los padres de familia, garantizando así el cumplimiento de las disposiciones legales vigentes en la legislación colombiana con respecto a las grabaciones con menores de edad.

4.1 Sesión 1

En la primera sesión se implementó una tarea orientada a la elaboración de significado entorno al concepto de circunferencia, entendido como lugar geométrico. La actividad consistió en una representación concreta de la circunferencia mediante la disposición de frijoles como puntos sobre el plano, con el fin de explorar los saberes previos de los estudiantes respecto a su definición geométrica, centrada en noción de distancia constante desde cualquier punto de la circunferencia a un punto fijo llamado centro.

Tabla 1

Guía 1: Desarrollo conceptual de la circunferencia.

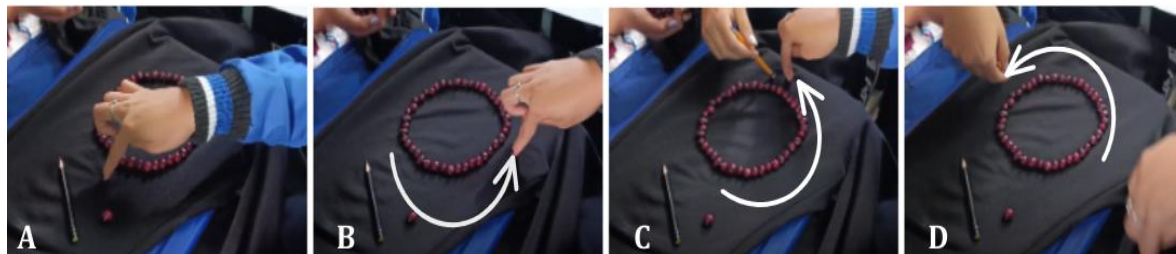
1. Construir una circunferencia con los frijoles. 2. Responde: <ul style="list-style-type: none"> - ¿Explique por qué lo que construyó es una circunferencia? - ¿Cómo garantiza que lo que se construyó es una circunferencia? - ¿Qué es un punto? - ¿Qué es una recta? - ¿Qué es una circunferencia? 3. ¿Logra identificar estos elementos en la construcción del primer punto? 4. Realice una representación de los siguientes elementos.		
Punto	Recta	Circunferencia

Nota. Elaboración propia.

Durante la actividad realizada por los estudiantes al desarrollar la tarea 1, emergieron diversas acciones significativas, como señalamientos y signos intencionales utilizados por los estudiantes para explicar su proceso; lo que sugieren la presencia de MSO en diferentes momentos de la sesión. En la secuencia de fotografías se registra el momento en el que uno de los estudiantes realiza señalamientos de manera circular sobre la construcción de la circunferencia como se observa en la sección A de la Figura 7. El movimiento circular inicia girando a la derecha del estudiante y termina donde comienza, este movimiento se repite tres veces (Ver Figura 7). La secuencia de movimientos es complementada por el Estudiante II del grupo, que también realiza señalamientos en torno a la construcción de la circunferencia, de manera similar al Estudiante I.

Figura 7

Estudiantes señalando la circunferencia.



Nota. Elaboración propia

Con el propósito de indagar cómo los estudiantes construían y representaban el concepto de circunferencia, el docente-investigador formuló una serie de preguntas orientadas a movilizar sus saberes y observar la argumentación dada por el grupo en relación con la construcción propuesta. A continuación, se presenta un fragmento de la transcripción que recoge la interacción entre el grupo de estudiantes y el docente-investigador:

Tabla 2

Conversación 1 docente-estudiantes sobre la tarea hecha en la sesión 1.

1	Docente:	¿Por qué es una circunferencia?
2	Estudiante I:	Porque tiene infinitos lados.
3	Docente:	Infinitos lados y ¿Cuáles son los lados?
4	Grupo de estudiantes:	Que solo tiene un lado (<i>con sus manos hacen movimientos circulares en contorno de la figura hecha con los frijoles</i>).
5	Estudiante II:	La figura tiene una misma distancia desde de aquí hasta acá, (<i>señalando con el dedo del Centro hasta el borde del círculo</i>).
6	Docente:	Y como sabemos que es la misma distancia, es decir, si tomo algo....
7	Estudiante II:	visualmente
8	Docente:	Visualmente, me dice que es una circunferencia.

- 9 Estudiante II: Si
- 10 Docente: Que tenga la misma distancia, ¿seguro? ¿Nada más?
- 11 Estudiante III: Si ve que tiene la misma distancia (*coloca un lápiz en el Centro, el cual queda dentro de la construcción y menciona*)
- 12 Docente: ¿Cómo sabemos que tienen la misma distancia?
- 13 Estudiante II: (*Gira el lápiz dentro de la circunferencia*)

Nota. Elaboración propia

En la línea 2 el Estudiante I argumenta que la figura construida es una circunferencia porque tiene infinitos lados, lo que permite evidenciar un saber previo que puede ser producto de su historial académico, que ha producido la elaboración de un significado de la circunferencia, en este caso, vista como un polígono de infinitos lados. Por otro lado, en la línea 4 el Grupo de estudiantes indican que solo tiene un lado, estos argumentos permiten apreciar que las respuestas entre el Estudiante I y el Grupo de estudiantes muestran dos consciencias sobre el significado del concepto de circunferencia. Por un lado, la definición de la circunferencia como un polígono de infinitos lados, y por el otro, la circunferencia vista como un polígono de un solo lado. Esto se materializa en los gestos realizados por el Estudiante I tal y como se observa en la Figura 7 sección A y B y por los movimientos del Estudiante II ver Figura 7 sección C y D que complementan de manera gestual la respuesta dada por el Grupo de estudiantes.

Posteriormente, en la línea 5 el Estudiante II busca describir el concepto de radio (ver Figura 8), para ello, señala con su dedo índice un punto en el interior de la circunferencia construida con los frijoles, hacia diversos puntos de su borde, argumentando que se trata de una circunferencia debido a que la distancia entre el *Centro* y cualquier punto del borde es constante. De tal manera que se pone en evidencia la toma de consciencia de la definición del concepto de circunferencia como lugar geométrico. Esta argumentación es soportada

mediante, lo que para Radford es un MSO, en este caso, el señalamiento al *Centro* y el movimiento del dedo índice para indicar el radio (ver Figura 8).

Figura 8

Estudiante señalando el centro de la circunferencia a un punto cualquiera (Radio)



Nota. Elaboración propia

La Estudiante III refuerza la idea del Estudiante II con respecto al radio e introduce un lápiz dentro de la construcción (ver Figura 9), siguiendo la conversación, en la línea 12, el docente le pregunta al grupo de estudiantes *¿Cómo sabemos que tienen la misma distancia?* En la línea 13, la Estudiante I refuerza lo que dice la Estudiante III, ya que gira hacia la derecha el lápiz en el interior de la construcción, justificando de esta manera la longitud constante del radio dentro de la circunferencia (ver Figura 9). Conforme a lo anterior, se observa que los estudiantes han manifestado su saber del concepto de radio y centro de la circunferencia, puesto que reiteran en señalar el centro y la distancia del radio sin la necesidad de utilizar un artefacto de medición.

Figura 9

Estudiante midiendo el diámetro de la circunferencia con un lápiz.



Nota. Elaboración propia

En el transcurso de la sesión, los estudiantes emplean diversos objetos con el propósito de lograr una mayor precisión en la medición del radio para justificar la constante de la distancia que hay del centro a un punto de la circunferencia. Uno de los objetos que usaron para determinar el radio fueron dos trozos de papel dispuestos en forma de diámetros (ver Figura 10). El punto de intersección de estos trozos de papel es señalado por el grupo de estudiantes como el centro de la circunferencia, el cual representaron concretamente con un frijol. Aquí se evidenció la emergencia del saber de los estudiantes con respecto a la intersección de dos diámetros, los cuales siempre se intersecan en el centro. Este proceso muestra el papel fundamental que desempeñaron los trozos de papel como artefactos mediadores en la construcción de la circunferencia, ya que permitieron verificar su trazado. Finalmente, para garantizar una medida más precisa de la distancia del radio, los estudiantes emplearon una regla para verificar por medio de la medida, que efectivamente la distancia del centro a cualquier punto de circunferencia es la misma.

En la línea 14 (ver tabla 3) el docente pregunta, *¿Quién me asegura que esos papelitos son iguales?*, en lo que la Estudiante III responde *Porque lo medimos con la regla*, el docente nuevamente, para profundizar más en el concepto de circunferencia pregunta a la Estudiante III *¿Si no tuviéramos una regla?* En respuesta, ella señaló que podría medirlo utilizando sus dedos y, para reforzar su explicación, empleó gestos con las manos para indicar la medida sobre la circunferencia. Junto con sus compañeros, confirmó la relación entre el centro y la circunferencia mediante diversos movimientos tal y como se ve en la Figura 9 sección A. En este punto es posible afirmar que el grupo de estudiantes han objetivado el concepto de circunferencia teniendo en cuenta la propiedad que cumple la distancia del centro a cualesquiera de los puntos, esto es, la equidistancia.

Asimismo, se evidencia cómo la Estudiante I gira los trozos de papel hacia su izquierda, lo que pone de manifiesto el uso de diversos recursos semióticos durante la exposición, estos recursos son los movimientos de las manos que acompañaron la argumentación del grupo de estudiantes, materializando en lo corpóreo el pensamiento y evidenciando el significado que poseen del concepto de circunferencia (ver Figura 10).

Tabla 3

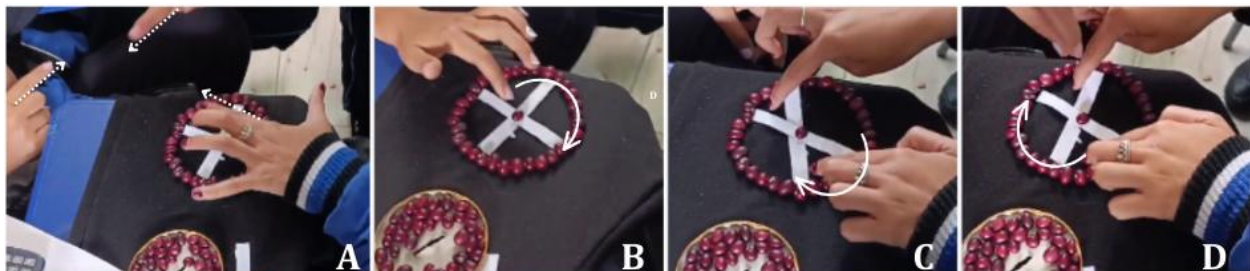
Conversación 2 docente-estudiantes sobre la tarea hecha en la sesión 1.

14	Docente:	¿Quién me asegura que esos papelitos son iguales? (diámetros de una circunferencia hecha por una estudiante)
15	Estudiante III:	Porque lo medimos con la regla (colocan el frijol que tenían en un supuesto centro, ahora donde se cruzan los papelitos.)
16	Docente:	¿Si no tuviéramos una regla?
17	Estudiante III:	También utilizamos nuestros dedos para que tuvieran una misma distancia (muestran como lo hicieron midiendo la construcción con su dedo índice) si movemos los papelitos de un lado a otro la distancia se sigue manteniendo (mueven los papelitos y dejan el frijol donde cruzan los papelitos) el frijol central muestra el centro y el pedazo de papelito que sale desde allí hasta el borde es el radio.

Nota. Elaboración propia

Figura 10

Uso de artefactos mediadores para medir el radio en la circunferencia.



Nota. Elaboración propia

4.2 Sesión 2

Para la implementación de la tarea de esta sesión, se consideró necesario un acercamiento al doblado de papel mediante la técnica del origami, con el propósito de familiarizar a los estudiantes con su manipulación. Este acercamiento permitió explorar nociones de paralelismo y perpendicularidad, ya que los dobleces manifiestan representaciones tangibles de rectas. Aunque dichas nociones no resultaron relevantes para las sesiones posteriores, sí permitieron generar una primera aproximación al doblado de papel. Para ello, se emplearon hojas de papel pergamino, ya que este tipo de material permite una visualización clara de lo que sucede en las dos caras del papel al momento de ser manipulado, es decir, al momento de realizar dobleces. Esta manipulación permite ver de manera directa las diferentes propiedades geométricas relacionadas con las rectas.

Tabla 4

Guía 2: se exploran los significados de rectas paralelas y perpendiculares.

1. Utiliza dobleces en una hoja de papel para representar las rectas paralelas y perpendiculares.	
2. Responde:	
- ¿Qué significa que dos rectas sean paralelas?	
- ¿Qué significa que dos rectas sean perpendiculares?	
- ¿Qué garantiza que los dobleces que ha realizado son rectas paralelas?	
¿Qué asegura que los dobleces que he realizado son rectas perpendiculares?	
3. ¿Qué elementos geométricos logra identificar en la construcción? _____	
4. Realice una representación de los siguientes elementos.	
Recta paralela	Recta perpendicular

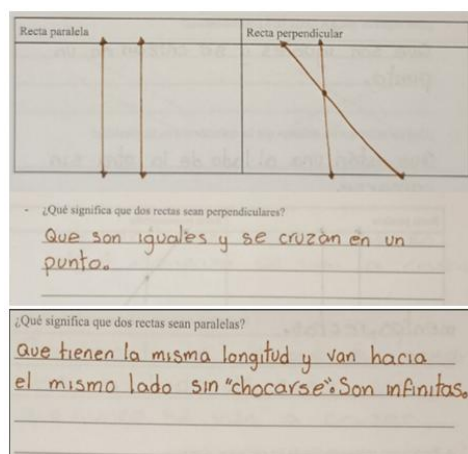
Nota. Elaboración propia

La tarea consistió en que cada estudiante debía realizar una construcción aplicando la técnica del origami, se proporcionó una guía con una serie de preguntas relacionadas con las rectas paralelas y perpendiculares (ver tabla 4), con el propósito de plasmar por escrito la toma

de consciencia sobre los conceptos trabajados. Durante la sesión, emergieron diversos recursos semióticos, entre ellos los movimientos de los dedos siguiendo la trayectoria de las rectas. Se evidenció que los estudiantes tenían una noción clara del concepto de rectas paralelas (ver figura 11) al señalar en su mayoría que, si dos rectas se prolongan indefinidamente, estas nunca se intersecan, sin embargo, surge la necesidad de explicar el concepto de perpendicularidad (ver figura 11) ya que, los estudiantes describían las rectas perpendiculares como dos rectas que se intersecan sin tener en cuenta que forman ángulos rectos.

Figura 11

Descripción de rectas paralelas y perpendiculares realizado por una estudiante.



Nota. Elaboración propia

4.3 Sesión 3

En esta sesión, la tarea consistió en lo siguiente:

Tabla 5

Guía 3: materialización del concepto de circunferencia a través de dobleces de papel.

1. Sobre la hoja dada con un lápiz, marque dos puntos.
2. Usando los dos puntos y realizando un dobléz a la vez, construya una circunferencia.

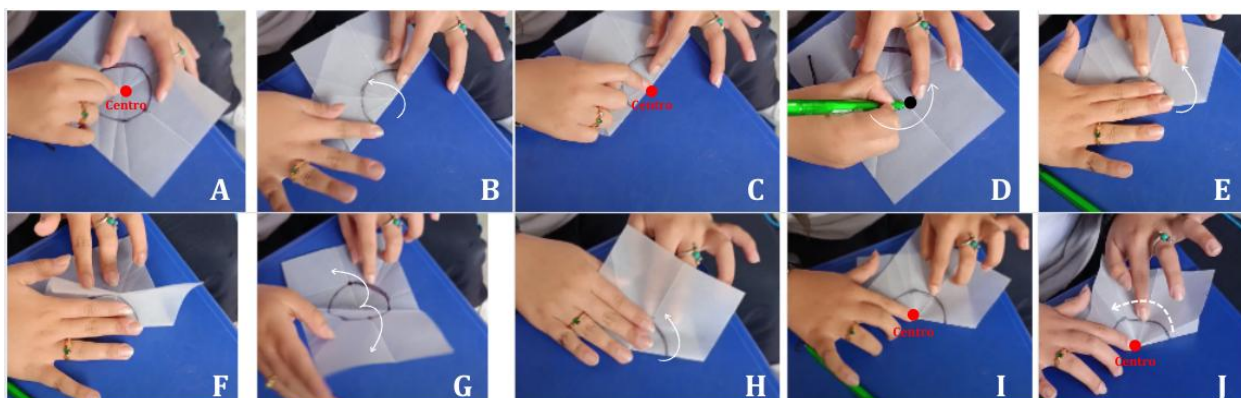
3. Describe el proceso que realizaste para la construcción y explique por qué lo que realizó es una circunferencia:

Nota. Elaboración propia

Esta tarea tuvo como objetivo que los estudiantes lograran materializar el concepto de circunferencia mediante la aplicación de los conocimientos adquiridos, utilizando los recursos como el doblado de papel, esto con el fin de favorecer la comprensión de los conceptos geométricos asociados a la circunferencia. Se les proporcionó una hoja pergamino, en la cual debían marcar dos puntos y realizar un primer doblez que pasara por uno de estos puntos, luego repetir el proceso una segunda vez, y a partir de estos, realizar una serie de dobleces que permitieran identificar el proceso de construcción de la circunferencia.

Figura 12

Estudiante realizando la construcción de la circunferencia por medio de dobleces



Nota. Elaboración propia

En la secuencia fotográfica (ver Figura 12), la estudiante construye una circunferencia por medio de dobleces, inicialmente, marca dos puntos arbitrarios en la hoja y realiza un doblez que pasa por los dos puntos, para hallar el centro, como se observa en la sección A de la Figura 12. Luego en las secciones B y C la estudiante señala el centro y argumenta que este se mantiene al realizar otros dobleces (ver Figura 12). Posteriormente, realiza un doblez cualquiera que pasa por el centro y uno de los puntos anteriores, dejando la marca de un punto con bolígrafo para calcarlo al doblar la hoja, tal como se ve en las secciones D, E, F y G. La

estudiante finalmente explica que al realizar repetidas veces este proceso usando el dobléz como compás se puede formar la circunferencia, como se observa en las secciones H, I y J. Con esta construcción logra materializar el concepto de circunferencia, analizando visualmente cada paso y apoyándose con el bolígrafo. Además, sus respuestas verbales junto con sus expresiones corporales, y señalamientos intencionados de sus manos, son una evidencia de la aparición de algunos MSO durante las argumentaciones dadas por la estudiante.

4.4 Sesión 4

En esta sesión, se proporcionó a cada estudiante una guía compuesta por seis preguntas, las cuales debían ser discutidas y posteriormente respondidas en el grupo de estudiantes.

Tabla 6

Guía 4: exploración de relaciones de distancia en la circunferencia mediante dobleces.

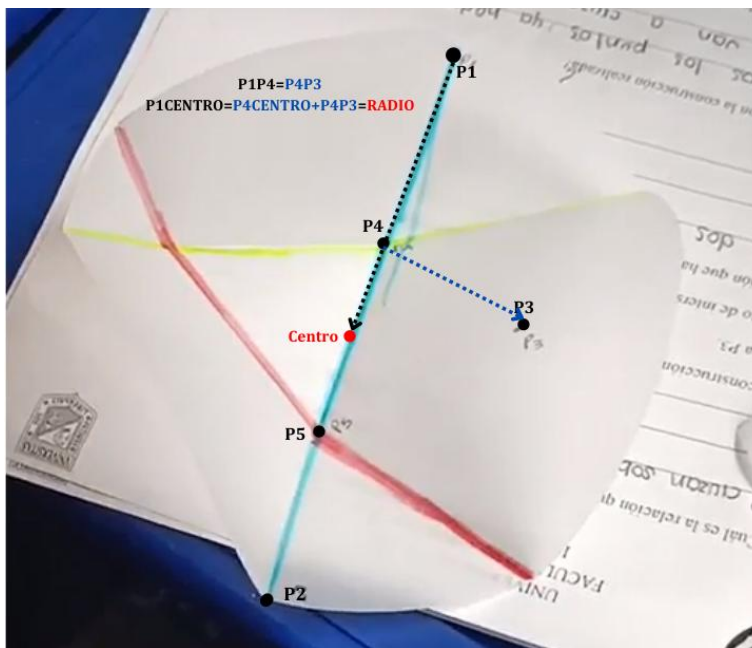
1. Sobre la hoja dada con un lápiz, marque dos puntos $P1$ y $P2$.
Realiza un pliegue que pase por $P1$ y $P2$
Describe el proceso de la construcción y lo que obtuviste.
 2. Sobre la hoja dada con un lápiz, marque dos puntos $P3$ y $P4$
Realiza un dobléz de tal manera que $P3$ sobreponga $P4$
Describe el proceso de la construcción y que obtuviste.
 3. Realiza la siguiente construcción:
 - Divida la circunferencia dada a la mitad y resalta con un color el dobléz que se generó.
 - Marque los extremos del dobléz como $P1$ y $P2$.
 - Dibuje un punto $P3$ diferente al *Centro* y que no esté al borde del círculo.
 - Lleva a $P1$ a $P3$.
 - Marca el punto de intersección entre este dobléz y el dobléz resaltado con color como $P4$.
 4. ¿Cuál es la relación que hay entre el segmento de $P1$ a $P4$ y el segmento de $P3$ a $P4$?
 5. Sigue la construcción:
 - Lleva a $P2$ a $P3$.
 - Marca el punto de intersección entre este dobléz y el dobléz resaltado con color como $P5$.
- ¿Cuál es la relación que hay entre el segmento de $P2$ a $P5$ y el segmento de $P3$ a $P5$?
6. ¿Qué puede concluir con la construcción realizada?

Nota. Elaboración propia

Se introducen notaciones matemáticas, como por ejemplo $P1$ y $P2$ para denotar puntos. Esto con el fin de realizar la construcción parcial de la elipse. A partir de una circunferencia con centro dado, los estudiantes debían hacer un doblado que pasara por el centro, es decir un diámetro, denotando sus extremos como $P1$ y $P2$. Después se trasladó $P1$ hasta un punto $P3$ distinto al centro, generando un doblado que interseca el diámetro en un punto $P4$; se repitió este proceso desde el punto $P2$ generando el punto $P5$ que también interseca el diámetro (Ver Figura 13). De este modo, fue posible identificar las relaciones de distancias que surgen a partir del uso del radio, el cual se mantiene constante. Este procedimiento, basado en la superposición de puntos, es fundamental para llevar a cabo la construcción de la elipse.

Figura 13

Relación del radio al trasladar un punto



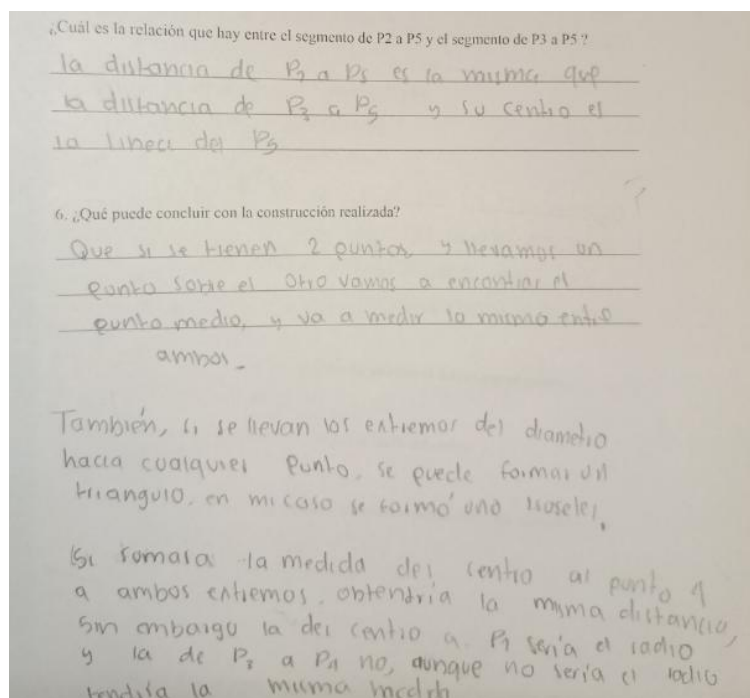
Nota. Elaboración propia

En la Figura 13, se observa cómo fue el desarrollo de la tarea correspondiente a esta sesión, donde el principal objetivo era encontrar las diferentes relaciones que surgen cuando se

superponen los puntos. Para ello, la estudiante utiliza distintos colores para resaltar los dobleces que emergen y encuentra la relación que hay cuando se lleva a $P1$ a $P3$, resaltando este doblez con color amarillo, esta corta al diámetro de la circunferencia en $P4$. Por lo tanto, la estudiante concluye que de $P4$ a $P3$ y de $P4$ a $P1$ hay la misma distancia. Este proceso se repite con $P2$; finalmente la estudiante concluye que la distancia de $P2$ a $P5$ es la misma distancia de $P3$ a $P5$. Lo cual permitió a la estudiante materializar la relación de distancias con respecto a $P3$ sobre la circunferencia dada (ver figura 14).

Figura 14

Descripción del radio al trasladar un punto, por una estudiante.



Nota. Elaboración propia

El propósito de los dobleces con respecto a $P3$, era que cada estudiante trasladara los extremos del diámetro sobre $P3$ y analizara la relación que emerge cuando se superponen $P1$ y $P3$, junto con las distancias que surgieron tras la realización de los dobleces y cómo

contribuyen a la construcción de la elipse al sumar estas distancias, lo que resultaría relevante para la siguiente sesión.

Cada una de las construcciones fue justificada y sustentada mediante recursos semióticos, tales como gestos faciales y expresiones verbales. Además, las respuestas escritas y las entrevistas reflejaron similitudes, ya que el trabajo colaborativo les permitió elaborar significados similares durante el desarrollo de la actividad.

4.5 Sesión 5

Para la quinta sesión, se proporcionó a los estudiantes una circunferencia de papel pergamino, junto con una guía que contiene una serie de instrucciones. El objetivo de la tarea es construir la elipse mediante dobleces realizados, la cual facilita la visualización de lo que se pretende realizar, donde los estudiantes deberán marcar puntos fijos P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 .

La tarea consiste en lo siguiente:

Tabla 7

Guía 5: Construcción de la elipse por dobleces.

1. Realiza la siguiente construcción:
 - Divida la circunferencia dada a la mitad y resalta con un color el doblez que se generó.
 - Marque los extremos del doblez como P_1 y P_2 .
 - Dibuje un punto P_3 diferente al *Centro* y que no esté al borde del círculo.
 - Lleva a P_1 a P_3 .
 - Marca el punto de intersección entre este doblez y el doblez resaltado con color como P_4 .
2. ¿Cuál es la relación que hay entre el doblez de P_1 a P_4 y el doblez de P_3 a P_4 ?
3. Sigue la construcción:
 - Lleva a P_2 a P_3 .
 - Marca el punto de intersección entre este doblez y el doblez resaltado con color como P_5 .
- ¿Cuál es la relación que hay entre el doblez de P_2 a P_5 y el doblez de P_3 a P_5 ?
4. Dibuja otros 3 puntos P_6 , P_7 y P_8 , y llévalos a P_3 .
- ¿Cuál es la relación que hay entre los dobleces generados?

Nota. Elaboración propia

La tarea está basada en el paso a paso de la construcción de Santa y Jaramillo (2010), acerca de las secciones cónicas, con la cual se pretende encontrar la relación que resulta cuando se superponen $P1$ y $P3$, dado que este doblez divide el radio que va desde el *Centro* hasta $P1$ en dos segmentos, el primer segmento inicia en el *Centro* de la circunferencia hasta $P4$ y el otro segmento que va desde $P4$ hasta $P1$. Además, este doblez también permite observar la igualdad entre los segmentos $\overline{P4P1}$ y $\overline{P4P3}$, por lo que del *Centro* a $P4$ y de $P4$ a $P3$ también equivalen al radio, así:

$$d(P4, P1) = d(P4, P3)$$

$$d(\text{Centro}, P1) = \text{radio}$$

$$d(\text{Centro}, P4) + d(P4, P1) = \text{radio}$$

$$d(\text{Centro}, P4) + d(P4, P3) = \text{radio}$$

Con esta tarea, se busca identificar los MSO cuando el estudiante se enfrenta a construcciones de carácter geométrico, mientras hace uso de los diferentes artefactos o herramientas. Durante esta sesión se logra evidenciar que, el grupo de estudiantes encuentran conceptos geométricos mientras manipulan el material tangible, que en esta ocasión es una circunferencia de papel. Mediante una serie de dobleces, se realiza la construcción de una elipse.

En esta sesión, surge la palabra óvalo⁴ por parte de los estudiantes asociándolo a la figura que obtuvieron a partir de los dobleces sugeridos tal como se evidencia en la línea 19, y como se ve en la Figura 15 sección C. En la línea 24 y 26 el docente aborda a la estudiante, con la intención de orientarla hacia un significado una idea de lo que es la elipse. En la línea 27

⁴ Óvalo: Curva cerrada, con la convexidad vuelta siempre a la parte de afuera, de forma parecida a la de la elipse, y simétrica respecto de uno o de dos ejes. (Real Academia Española, 2024). "Toda elipse es un óvalo, pero no todo óvalo es una elipse"

la Estudiante I toma consciencia del concepto de la suma de distancias, donde logra evidenciar la relación que hay entre las distancias que surgen de los diferentes dobleces en la construcción tal como se ve en la sección A de la Figura 15.

Figura 15

Estudiante señala las propiedades de la elipse con la construcción de origami.



Nota. Elaboración propia

Tabla 5

Conversación 1 docente y estudiantes sobre la tarea hecha en la sesión 5.

18	Docente:	¿Qué figura se formó?
19	Estudiante I:	Un óvalo.
20	Docente:	Cada uno de estos dobleces está tocando ese óvalo, ¿sí?
21	Estudiante I:	Si
22	Docente:	¿Si lo está tocando?
23	Estudiante I:	Sí.
24	Docente:	Qué hay de la distancia de la que toca el óvalo con respecto al punto $P3$ y el <i>Centro</i> . ¿Qué va a pasar?
25	Estudiante I:	Con respecto acá... (<i>señala con el lápiz el contorno de la elipse</i>).

- 26 Docente: Guiándote por las líneas de aquí (*señala los cortes con el diámetro*). ¿Qué puedes concluir con el punto $P3$ y el *Centro*?
- 27 Estudiante I: Que la medida de $P3$ a este (*señala punto de la elipse*) y de este al *Centro* es la misma (*señala con el lápiz como se muestra en la figura 15*).

Nota. Elaboración propia

Durante la construcción de la elipse, surge una interacción entre el docente y la Estudiante I sobre las distancias que emergen al realizar diferentes dobleces, la estudiante afirma que la construcción realizada es un óvalo, y sustenta su respuesta realizando una serie de gestos señalando el contorno de la elipse con su lápiz. Por tal motivo, como se observa en la línea 28, el docente guía a la estudiante con preguntas asociadas a la construcción para confirmar sus respuestas sobre la relación que hay entre los diferentes dobleces. La estudiante confirma su respuesta en la línea 29, indicando que hay una misma distancia sin importar el doblez. Para reforzar esta idea, el docente analiza la construcción realizada por la estudiante y pregunta *¿Qué va a pasar?*, la estudiante sostiene su respuesta: *que hay la misma distancia*. Lo anterior pone en evidencia como la estudiante toma consciencia sobre el radio de la circunferencia como una constante para la construcción de la elipse.

Tabla 6

Conversación 2 docente-estudiantes sobre la tarea hecha en la sesión 5.

- 28 Docente: ¿Es la misma? (*estudiante confirma al docente realizando un doblez*).
- 29 Estudiante I: Se supone que el punto medio no importa de qué parte este, la distancia de este (*señala $P4$*) a cualquier parte de la línea va a ser la misma (*señala $P3$ y diámetro de la circunferencia*).
- 30 Docente: Del $P1$ al $P3$ y del $P4$ (*se queda pensando...*) **como le explico esto**. (*se pregunta a sí mismo*). Del $P1$ a $P4$ y del $P3$ a $P4$ ¿Qué va a pasar?
- 31 Estudiante I: También hay la misma distancia.

32 Docente: De aquí a aquí y de aquí a aquí. (*Señala de P1 a P4 y de P3 a P4*) (Ver figura 16)

Nota. Elaboración propia

En la línea 30 el docente se queda pensando en qué preguntas hacerle a la estudiante para que esta pueda tener un acercamiento al concepto de elipse como lugar geométrico, teniendo en cuenta que la estudiante ya es consciente de una distancia constante, el radio, pero aún no ha sido evidente para ella la importancia del *centro* y el punto *P3* como los focos de la elipse, ni la relación entre estos y los puntos que conforman dicha curva, los cuales se generan mediante el doblado del radio. El docente se pregunta para sí mismo, *¿cómo le explico esto?*, lo que pone en evidencia la necesidad del docente de provocar la actualización del saber de la estudiante y su materialización, es decir, que lo manifestara de manera escrita o verbal, ya que la estudiante tiene el saber sobre las relaciones que surgen, pero no tiene el lenguaje adecuado para explicarlo de una manera concreta. Tal como lo indica Radford (2023a).

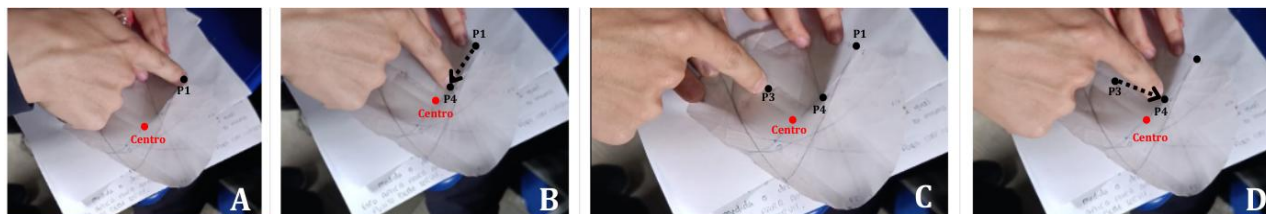
El saber existe en la cultura y surge y cambia continuamente por medio de la actividad humana. En efecto, mediante su actividad, los individuos activan el saber, lo ponen en movimiento, lo actualizan o lo materializan, con lo que hacen concretos ciertos tipos de acción y reflexión. (p. 51)

Esta tensión entre el saber y su formulación discursiva ilustra el papel del docente en mediar el paso del conocimiento a su objetivación a través de medios semióticos. En este momento de la sesión, se trasciende de una discusión sobre el óvalo a un formalismo, se comienza a interiorizar el concepto de equidistancia, ya que, se evidencia en la construcción la importancia de estos dobleces con sus respectivas distancias. El docente aborda a la estudiante, haciéndole notar la relación que hay entre las distancias de *P1 a P4* y de *P3 a P4* (ver Figura 16). La estudiante realiza la conexión de estos puntos con sus dedos y usando la separación entre ellos hace referencia a una distancia y concluye que estas distancias son

iguales (ver Figura 17). Esto permitió identificar un nodo semiótico, ya que el docente, al señalar los puntos y dobleces, hace posible que la estudiante perciba la equidistancia que hay entre los puntos señalados por el docente, tal como se evidencia en la línea 33. Para llegar a una definición formal de la elipse, el docente continúa con una serie de preguntas en pro de las relaciones entre los dobleces, tal como se ve en la línea 34. La Estudiante comienza a identificar que las distancias se pueden sumar, y específicamente las que el docente indica mantienen una misma distancia, tal como se evidencia en la línea 35 y se observa en la Figura 17. En las líneas siguientes, continua la emergencia de los MSO, tales como, los señalamientos, los gestos faciales y las expresiones verbales. Dichos MSO son una materialización del pensamiento de la Estudiante y permiten observar la forma en la que elabora significados relacionados con la elipse. Finalmente, en la línea 47 la estudiante concluye que las distancias culminan sobre el borde de la Figura obtenida.

Figura 16

Docente señala la construcción de la elipse a través de dobleces de origami.



Nota. Elaboración propia

Adicionalmente, el uso de la hoja de papel pergamino como artefacto mediador facilitó la visualización de las líneas sombreadas cuando se realizaba un doblez, permitiendo observar la deconstrucción del radio, dividiéndolo en dos partes, generando el punto P_4 donde se dobla el radio y que hace parte de la elipse ver en la Figura 17 sección D.

Tabla 7

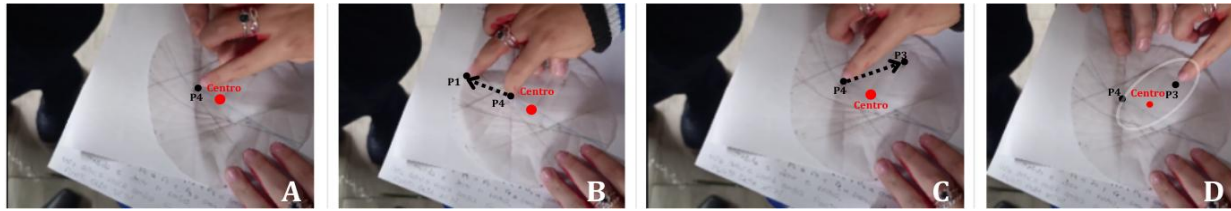
Conversación 3 docente-estudiantes sobre la tarea hecha en la sesión 5.

- 33 Estudiante I: Es la misma distancia.
- 34 Docente: Y si a ambos les añadimos el *Centro*, ¿Qué va a pasar? (ver Figura 16)
- 35 Estudiante I: Van a ser iguales, o sea, van a dar la misma medida, en este caso este sería el radio (*señala el radio de la circunferencia*), esto más esto sería lo mismo, aunque ambos dan lo mismo que el radio (*señala repetidamente el radio de la circunferencia y el dobléz que se genera cuando se dobla el radio*) ver Figura 16.
- 36 Docente: Ambos dan igual al radio (*Repíte para resaltar la idea*). Si seguimos tomando esa medida alrededor de la circunferencia y todos los puntos van hasta *P3* ¿Qué va a pasar?
- 37 Estudiante I: Que no van a tocar a *P3*.
- 38 Docente: Mira lo que pasa aquí (*realiza un dobléz*), que pasa con el radio, sale del *Centro* y llega ¿hasta Dónde?
- 39 Estudiante I: Diámetro (*refiriéndose al punto donde corta el diámetro*)
- 40 Docente: No de la circunferencia, sino de la figura que se está formando (*señala la elipse que se formó*).
- 41 Estudiante I: Hasta el borde (*refiriéndose a la figura*).
- 42 Docente: Y después hacia ¿dónde va?
- 43 Estudiante I: Va hasta *P3*.
- 44 Docente: Ahora y si tomamos otro dobléz (*realiza otro dobléz*) ¿Qué pasa con el radio? ¿hasta dónde va?
- 45 Estudiante I: Acá (*señala un punto*).
- 46 Docente: Y ese punto, ¿dónde está? (*desdobla la hoja y señala el contorno de la elipse*).
- 47 Estudiante I: Al borde de la figura. (*Tal como se ve en la figura 17*).

Nota. Elaboración propia

Figura 17

Estudiante señala los puntos de la elipse.



Nota. Elaboración propia

4.6 Sesión 6

En esta sesión, se partió de la construcción de la elipse realizada por los estudiantes en la sesión anterior. El objetivo de esta tarea fue guiar a los estudiantes a la definición formal de la elipse como lugar geométrico, usando los conceptos previamente elaborados a través del plegado de una hoja de papel circular. La tarea consistió en marcar un punto $P3$ en la hoja, distinto al *Centro* y a los bordes, después se seleccionan varios puntos sobre el borde de la hoja y cada uno de estos puntos se debía doblar hasta el punto $P3$, generando pliegues que permitieran visualizar las propiedades geométricas de la elipse. Con esta tarea, se buscó evidenciar que el punto $P3$ y el *Centro* de la circunferencia son dos puntos fijos, conectados por una distancia constante equivalente al radio de la circunferencia, que, al doblarla desde diferentes puntos del borde de la hoja, generan la elipse. Esta sesión concluye la secuencia de tareas propuestas, la cual permitió aproximarse al significado de elipse como lugar geométrico con el doblado de papel como artefacto mediador.

Tabla 8

Guía 6: Elaboración de significados de la elipse.

- | |
|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Ubique un punto $P1$ en el borde de la circunferencia <ul style="list-style-type: none"> - Realice un dobléz desde el <i>Centro</i> hasta $P1$. |
|--|

- Resalta con un color el doblado realizado desde el *Centro* a *P1*.
- 2. ¿Qué puede decir sobre el doblado resaltado?
 - Ubique un punto *P3* diferente al *Centro* y que no esté en el borde de la circunferencia.
 - Con un doblado lleva a *P1* sobre *P3*.
- 3. Manteniendo el último doblado, ¿Ahora qué puede decir sobre el doblado resaltado?
- 4. Ubique otro punto *P2* en el borde de la circunferencia y repita el procedimiento realizado anteriormente.
- 5. Manteniendo el último doblado, ¿Ahora qué puede decir sobre el doblado resaltado?
- 6. Ubique varios puntos al borde de la circunferencia y llévelos a *P3*.
- 7. ¿Qué construcción obtuviste a partir de los doblados?
- 8. ¿Cómo describirías la construcción realizada?
- 9. De todas las actividades ¿Podrías identificar qué es lo que se mantiene constante?

Nota. Elaboración propia

La sesión se centró en la recopilación exhaustiva de información relacionada con la elipse, abarcando tanto los fundamentos conceptuales como los diversos recursos semióticos emergentes, tales como gestos faciales, expresiones corporales y lenguaje verbal entre otros, que emergieron durante el desarrollo de la actividad por los estudiantes.

La discusión, entre docente y estudiante, comienza con la conclusión de la Estudiante I en la sesión anterior. Ella menciona una relación entre los doblados y el contorno de la elipse dentro de la circunferencia dada, que la estudiante llamó óvalo, y su relación con la función que cumple el radio como una distancia constante.

El docente les recuerda a los estudiantes los doblados de la tarea pasada, en la línea 48 hace la pregunta *al llevar el punto P1 hasta P3 ¿Qué pasa con ese radio?* en respuesta la Estudiante I menciona *se dobla*, haciendo referencia al radio y lo sustenta señalando el doblado con sus dedos; lo que constituye un recurso semiótico que refuerza la idea de que se trata del mismo radio, aun cuando este doblado. Para enfatizar esta respuesta, el docente repite el ejercicio con un punto distinto al anterior y, tras efectuar un nuevo doblado, plantea otra pregunta con el propósito de verificar si la estudiante ha comprendido plenamente el fenómeno que ocurre en esta serie de doblados, tal como se evidencia en las líneas 55 a 57. Con el propósito de que la Estudiante note que la constante se mantiene desde todos los puntos de la elipse, el

docente realiza un dobléz con un punto diferente (Ver Figura 18) y formula una pregunta orientadora en la línea 58, recibiendo como respuesta por parte de la Estudiante *Se dobla porque es el mismo radio.*

Tabla 9

Conversación 1 docente-estudiantes sobre la tarea hecha en la sesión 6.

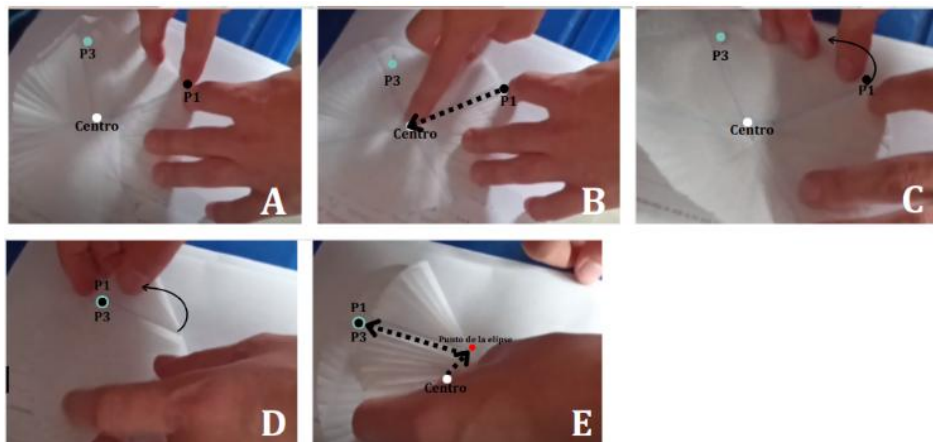
48	Docente:	Lo mismo que... tú tuviste la conclusión, la clase pasada. <i>(el docente le recuerda a la estudiante los dobleces de la actividad anterior)</i> . Cuando llevas a $P1$ hasta $P3$, ¿Qué pasa con ese radio?
49	Estudiante I:	Se dobla <i>(señala con sus dedos el nuevo dobléz)</i> .
50	Docente:	Se dobla, ¿cierto? ¿Y cambia?
51	Estudiante I:	No, es el mismo radio.
52	Docente:	Tú resaltaste aquí un puntico <i>(señala el nuevo punto generado por las intersecciones)</i> . La siguiente parte, un punto $P2$ y el <i>Centro</i> , tenías que hacer el dobléz, resaltarlo y describirlo, ¿Sigue siendo el mismo radio? <i>(el docente señala los dobleces de la construcción tal como se ve en la figura 16)</i> .
53	Estudiante I:	Si <i>(señala con sus dedos el dobléz que le realiza el docente)</i> .
54	Docente:	Al ser el mismo radio y llevarlo hasta el punto $P3$, ¿qué pasa con ese radio? <i>(Señala la construcción apuntando el radio de la circunferencia desde $P1$ a $P3$ tal como se ve en la figura 16)</i> .
55	Estudiante I:	Se dobla <i>(confirmando los señalamientos del docente)</i> .
56	Docente:	¿Y cambia?
57	Estudiante I:	No, desde el <i>Centro</i> a aquí y aquí es el mismo radio. <i>(señala del Centro a $P4$ y luego a $P1$)</i> .
58	Docente:	Es el mismo radio, ahora si hiciéramos lo mismo con cualquiera de los puntos al <i>Centro</i> y lo llevamos a $P3$ ¿Qué va a pasar con ese radio?

- 59 Estudiante I: Se dobla porque es el mismo radio. (*señala el nuevo dobléz que realiza el docente. Tal como se ve en la secuencia de la Figura 18*)

Nota. Elaboración propia

Figura 18

Estudiante I integra conocimientos geométricos sobre la circunferencia y la elipse.

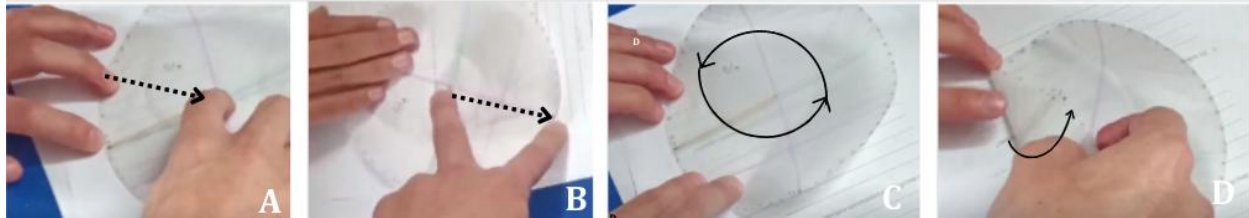


Nota. Elaboración propia

Los conceptos trabajados a lo largo de la secuencia de tareas tomaron forma en el pensamiento de los estudiantes. En particular, en la Estudiante I se ha evidenciado de manera secuencial como se ha logrado actualizar su saber, integrando de manera sólida ideas geométricas sobre la circunferencia y la elipse. Además, se puede percibir la materialización de su pensamiento, ya que no solo recuerda los conceptos, sino que los expresa con mayor seguridad, estableciendo relaciones entre rectas y distancias dentro de la elipse. Su forma de explicarse va más allá de las palabras; complementa sus respuestas con gestos, señalamientos y otros recursos semióticos, que surgen de manera natural a medida que va resolviendo sus dudas. Esto muestra que los conceptos trabajados han sido incorporados a su forma de razonar y comunicar ideas matemáticas, Ver Figura 19.

Figura 19

Estudiante explica la construcción usando gestos y expresiones verbales.

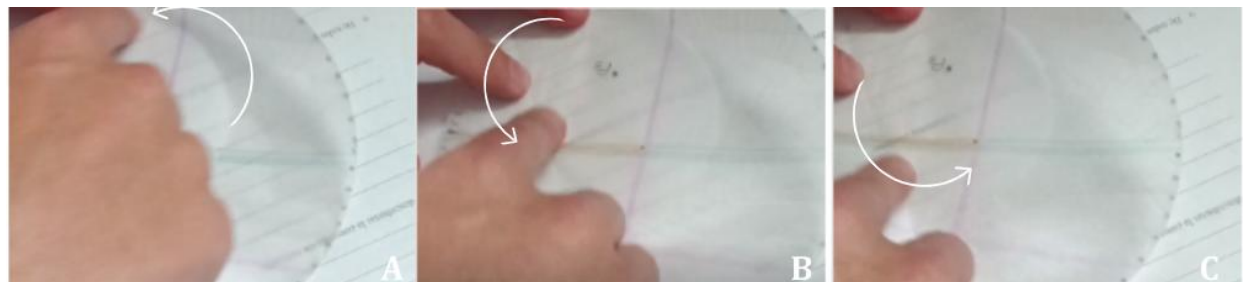


Nota. Elaboración propia

Por otro lado, durante el proceso de triangulación de datos se evidenció que varios estudiantes llegaron a conclusiones similares respecto a la distancia constante del radio en relación con la elipse. Uno de estos estudiantes sustenta sus respuestas por medio de MSO como el señalamiento de la elipse realizando movimientos circulares, gestos faciales y expresiones verbales, como se muestra en la Figura 20.

Figura 20

Estudiante comunica su comprensión de la elipse.



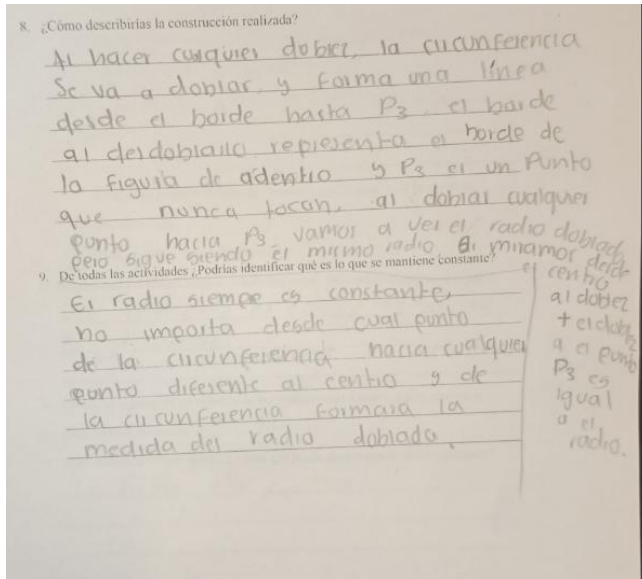
Nota. Elaboración propia

Finalmente, la Estudiante I logra dar una definición propia del concepto elipse como se evidencia en la Figura 21, indicando: *si miramos desde el centro al doblez, más el doblez al punto P3 es igual al radio*. Teniendo en cuenta que desde la sesión anterior había identificado el radio como constante en la construcción, logró asociar el *Centro* y *P3* como puntos fijos, es decir, los focos de la elipse, y establecer que la suma de distancia desde cualquier punto de la

curva a dichos focos permanece invariante. Esta comprensión sobre las distancias constantes constituye el fundamento de la definición de la elipse como lugar geométrico.

Figura 21

La estudiante expresa saberes adquiridos sobre la elipse.



Nota. Elaboración propia

CAPÍTULO V. Conclusiones

*La mente que se abre a una nueva idea
jamás volverá a su tamaño original*
Albert Einstein

Aún cuando en el apartado anterior se expusieron diversas conclusiones derivadas del análisis de los datos, en este capítulo se destacan aquellas que son más relevantes para los objetivos y la pregunta de investigación. En primer lugar, se examina el grado de logro de los objetivos específicos y la manera en cómo su consecución posibilitó alcanzar el objetivo general, respondiendo así la pregunta de investigación. Posteriormente, se presentan algunas reflexiones significativas, enmarcadas en la Teoría de Objetivación, sobre la implementación de tareas que fomentan el desarrollo del pensamiento espacial en torno a la elipse vista como lugar geométrico. Estas reflexiones, además de consolidar algunos hallazgos, abren posibles nuevas líneas de indagación y sugieren preguntas de investigación en este campo.

5.1 Acerca de los objetivos

Para el desarrollo de este trabajo de grado se definieron tres objetivos específicos, los cuales se abordarán a continuación.

1. *Diseñar una secuencia de tareas relacionadas con la elipse, vista como lugar geométrico, bajo los principios de la Teoría de la Objetivación, utilizando el doblado de papel como artefacto mediador.*

Las distintas tareas propuestas en esta investigación, concebidas desde una visión sociocultural, no fueron simples ejercicios, sino medios que permitieron tomar conciencia de la importancia de su diseño y de la forma en que fueron asumidas por los estudiantes. Estas actividades, mediadas y orientadas intencionalmente, propiciaron que los estudiantes elaboraran significados entorno a la elipse como lugar geométrico. En este sentido, proponer

únicamente actividades centradas en una forma prototípica del pensamiento espacial, como el trabajo aislado con definiciones de circunferencia, rectas, puntos, centros o segmentos, limitaría la posibilidad de materializar dicho pensamiento. Por el contrario, al diseñar actividades que integren diversas formas del pensamiento espacial, se favorece un acercamiento más amplio y significativo a las formas históricamente constituidas. Esto permite que la toma de conciencia sobre los objetos geométricos no se limite a una única perspectiva, sino que abarque múltiples formas de acción, reflexión y producción de significados. Así, el estudiante no solo toma conciencia de un saber geométrico, sino que también se posiciona activamente con ese saber dentro de su propio contexto cultural.

2. *Implementar la secuencia de tareas a un grupo de estudiantes de grado décimo, promoviendo interacciones que favorezcan la emergencia de los Medios Semióticos de Objetivación.*

En el Capítulo III apartado tres (3), se describe el proceso de implementación. A lo largo del proceso se observó a los estudiantes en interacción constante con sus pares, con el Docente-Investigador y con los materiales propuestos. Durante cada sesión, se acompañó el trabajo con preguntas orientadoras, realizadas intencionalmente abriendo espacio para que los estudiantes posibilitaran la materialización de su forma de pensar.

Estas intervenciones no buscaron confirmar respuestas correctas, sino generar condiciones que favorecieran la emergencia de MSO como gestos, señalamientos y manipulación de material tangible. El entorno colaborativo y el diseño progresivo de las tareas facilitaron la elaboración conjunta de significados en su entorno sociocultural y permitieron que los estudiantes hicieran visibles sus procesos de elaboración del conocimiento matemático. En este sentido, durante la implementación fue posible registrar diversos MSO que emergieron como parte del proceso de interacción en el aula.

3. *Identificar los Medios Semióticos de Objetivación que emergen durante las interacciones y respuestas dadas por los estudiantes al momento de realizar cada una de las tareas.*

En el capítulo IV, análisis y discusión de resultados, a partir del material audiovisual y las producciones escritas, producto de las interacciones sociales durante el desarrollo de las tareas, se identificaron momentos claves de la implementación a través de la labor conjunta que facilitaron la emergencia de algunos MSO tales como: señalamientos intencionados, representaciones gráficas y, expresiones verbales y escritas que favorecieron la elaboración de significados matemáticos. Estos MSO fueron registrados y analizados como manifestaciones concretas de posibles procesos de objetivación permitiendo comprender como los estudiantes exteriorizan, comparten y construyen colectivamente su comprensión de conceptos trabajados.

Ahora bien, como objetivo general se propuso:

Describir los Medios Semióticos de Objetivación que emergen durante la elaboración de significados del concepto de elipse, visto como lugar geométrico, por un grupo de estudiantes de grado décimo en un colegio privado de Bogotá.

Durante las sesiones se evidenció la emergencia de diversos medios semióticos de objetivación por parte de los estudiantes mientras desarrollaban actividades vinculadas al pensamiento espacial. Dichos medios se manifestaron a través de señalamientos intencionales, gestos faciales y lenguaje corporal, revelando que la elaboración de significados sobre la elipse no se limitó a lo verbal, sino que integró lo corpóreo, lo material y lo social, aspectos fundamentales de la TO.

Esta dinámica posiciona al concepto de elipse como objeto cultural, construido históricamente, cuya apropiación en el aula no se da de manera individual sino a través de la actividad conjunta mediada por signos, artefactos y el lenguaje en sus múltiples formas. Desde esta perspectiva, el pensamiento espacial en torno a la elipse se desarrolla como un proceso

dialógico, donde los estudiantes actualizan y refinan sus saberes previos al interactuar con tareas diseñadas bajo principios de la TO.

La información obtenida y analizada evidencia que los constructos teóricos de la TO también pueden manifestarse en el pensamiento espacial siempre y cuando se generen actividades intencionalmente estructuradas que favorezcan el proceso de enseñanza-aprendizaje; para el efecto de este estudio, la elipse como objeto matemático permitió evidenciar como los estudiantes potencializan sus conocimientos.

Mediante los MSO fue evidente que los estudiantes no solo replicaban definiciones, sino que construyeron significados compartidos entorno a las propiedades geométricas de la elipse. Al abordarse como objeto matemático manifestando múltiples medios semióticos, facilita la transición de percepciones informales hacia definiciones formalizadas, lo cual se inscribe en los procesos de objetivación que, de acuerdo con Radford (2023a) implican una transformación progresiva de las formas de conocer, mediadas por la interacción social, los signos y los instrumentos culturales.

5.2 Discusión sobre la pregunta de investigación

Al inicio de este trabajo de grado se planteó la siguiente pregunta: *¿Cuáles son los medios semióticos de objetivación que emergen en las tareas relacionadas con el concepto de elipse, visto como lugar geométrico, en un grupo de estudiantes de grado décimo de un colegio privado de la ciudad de Bogotá?* El análisis de los datos obtenidos a partir de las interacciones entre docente y estudiantes, así como de las representaciones gráficas y expresiones orales generadas durante la implementación de las tareas, permite afirmar que la elaboración de significado sobre la elipse se dio a través de diferentes recursos semióticos que emergieron debido a la labor conjunta provocados por el diseño de las tareas.

Docente y estudiantes recurrieron al uso de diversos artefactos como el papel pergamino, lápices y colores los cuales funcionaron como herramientas mediadoras

fundamentales para la producción de significados matemáticos. Estos artefactos no actuaron de forma aislada, sino en estrecha relación con gestos, señalamientos, trazos y lenguaje verbal, permitiendo la emergencia de MSO. Tales medios se manifestaron de forma espontánea por parte de los estudiantes, especialmente cuando necesitaban complementar o justificar sus respuestas.

A continuación, se enlistan los Medios Semióticos de Objetivación identificados:

Los desplazamientos de los dedos realizados por los estudiantes al simbolizar una circunferencia, elipse o recta funcionan como gestos corporales que permiten visibilizar y compartir significados sobre los objetos matemáticos. En la figura 7 se observa cómo un grupo de estudiantes genera un deslizamiento con los dedos siguiendo el contorno de una circunferencia, lo que refleja la necesidad de describir esta figura a través del movimiento. Este tipo de gesto no solo acompaña la acción, sino que contribuye activamente al desarrollo del pensamiento espacial.

Los señalamientos realizados por los estudiantes al indicar construcciones u objetos geométricos permiten destacar características específicas y facilitar la comprensión compartida. Esto se evidencia en la figura 8, donde una estudiante señala primero el centro de una circunferencia y luego un punto cualquiera sobre su borde, identificando así la propiedad del radio como distancia constante. Este tipo de gesto apoya la identificación de relaciones geométricas relevantes durante la actividad.

Las producciones escritas y gráficas elaboradas por los estudiantes cumplen un papel fundamental en la objetivación del conocimiento, al permitir la organización del pensamiento y la expresión de significados matemáticos. En la figura 11 se muestra cómo una estudiante quiso describir las propiedades de las rectas paralelas y perpendiculares, utilizando tanto una explicación escrita como una representación gráfica. Este tipo de registro funciona como signo cultural que media el proceso de elaboración conjunta del conocimiento en el aula.

Los gestos faciales fueron frecuentes durante la secuencia de actividades y reflejaron distintas disposiciones cognitivas y afectivas de los estudiantes. Por ejemplo, en algunos momentos se llevaban la mano al mentón al no comprender una idea, lo que expresaba duda o reflexión. Desde la TO, este tipo de manifestaciones corporales permite visibilizar el pensamiento en acción, evidenciando cómo el cuerpo también participa en la elaboración del conocimiento matemático.

Estos resultados muestran que el conocimiento matemático se construye socialmente a través de interacciones significativas, donde los MSO se constituyen como indicadores de los procesos mediante los cuales los estudiantes hacen consciente, visible y comunicable su pensamiento. Esto sugiere que en una práctica pedagógica centrada en la interacción y en la emergencia de distintos MSO posibilitaría la comprensión de conceptos matemáticos. Un ejemplo claro donde los estudiantes por medio de la labor conjunta y el doblado de papel como artefacto mediador lograron un acercamiento al concepto de elipse como lugar geométrico.

Finalmente, esta investigación permitió dar respuesta a la pregunta planteada; sin embargo, también dejó abiertas nuevas interrogantes que podrán abordarse en futuras investigaciones. Se reconoce la necesidad de contar con mayor evidencia empírica que permita seguir documentando y profundizando en los aspectos relacionados con los procesos de objetivación en torno a la elipse vista como lugar geométrico.

5.3 Recomendaciones

A partir de los resultados obtenidos, se proponen las siguientes recomendaciones:

- Ampliar el enfoque hacia las otras cónicas, como la hipérbola y la parábola, abordándolas desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación y utilizando el doblado de papel como herramienta mediadora en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

- Analizar las interacciones en el aula a través de observaciones sistemáticas y recursos audiovisuales, con el fin de obtener información que permita comprender cómo emergen y se construyen los significados matemáticos.
- Integrar tecnologías digitales, como GeoGebra, que permita a los estudiantes actualizar su saber matemático mediante el uso de estas herramientas como artefactos mediadores, analizando su impacto en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Referencias

- Alperin, R. (2016). Axioms for origami and compass construction. *Journal for Geometry and Graphics*, 20(1), 13–22. San Jose State University.
- Alvarado, A., & Molina, J. A. M. (2018). Experiencia de la incorporación del aprendizaje colaborativo, doblado de papel y TICs en la enseñanza de las secciones cónicas. *Revista de Ciencia y Tecnología*, 34(2), 1–13.
<https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cienciaytecnologia/article/view/36623>
- Aragón, J., & Quintero, C. (2017). *Propuesta de enseñanza de las secciones cónicas usando diversas tecnologías para su desarrollo* [Trabajo de grado, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. <https://hdl.handle.net/11349/7658>
- Aroca, A. (2019). *La enseñanza de la geometría analítica en la educación media*. Revista U.D.C.A Actualidad & Divulgación Científica, 22(1).
<https://doi.org/10.31910/rudca.v22.n1.2019.1222>
- Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, (Número especial: Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático), 267–300.
- Boyer, C. (1987). Renacimiento y ocaso de la matemática griega. En *Historia de las matemáticas* (pp. 189–210). Alianza Editorial.
- Cadavid, S. (2011). El proceso de objetivación del concepto de parábola desde el uso de artefactos. En G. García (Ed.), *Memorias del 12º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 779–787). Gaia.
- Calderón, W. (2013). *Propuesta metodológica para la enseñanza de las secciones cónicas en el grado décimo de la Institución Educativa Villas de San Ignacio de Bucaramanga* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Institucional Universidad Nacional de Colombia. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/11885>

- Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática: Recursos para la captura de información y el análisis* (1ª ed., pp. 57–135). Editorial Universidad de Antioquia; Universidad Pedagógica Nacional. (Colección Investigación/Educación).
- Hatori, K. (2003). *Origami construction*. <http://origami.ousaan.com/library/conste.html>
- Huzita, H. (1989). Axiomatic development of origami geometry. In *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology* (pp. 143–158).
- Mojica, A. (2014). *Medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de sexto grado de educación básica cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo* [Tesis de maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. Repositorio Institucional Universidad Distrital. <https://repository.udistrital.edu.co/items/24a05037-da66-4c81-93fd-b18d84ca77df>
- Moreno, A., & Vargas, H. (2020). *Procesos de objetivación en estudiantes de grado séptimo: una experiencia en torno a la actividad matemática asociada a la estructura multiplicativa* [Tesis de maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. Repositorio Institucional Universidad Distrital. <https://repository.udistrital.edu.co/items/f0a266af-fe2a-4105-b655-e00e2b6a783c>
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, (Número especial: Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático)*, 103–130.
- Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1). <https://doi.org/10.17583/redimat.2013.570>
- Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132–150.

Radford, L. (2023a). *La teoría de la objetivación*. Universidad de los Andes.

Radford, L. (2023b). Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento. *Educación Matemática*, 12(1), 51–69.

Radford, L. (2024). The dialectic between knowledge, knowing, and concept in the theory of objectification. *Education & Didactique*, 18(2), 147–159. <https://shs.cairn.info/journal-education-didactique-2024-2-page-147?lang=en>

Real Academia Española. (2024). Óvalo. En *Diccionario de la lengua española* (23.^a ed.). <https://dle.rae.es/óvalo>

Romberg, T. (1992). Perspectives on scholarship and research methods. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 49–64). Macmillan.

Santa Ramírez, Z. M., & Jaramillo López, C. M. (2010). Aplicaciones de la geometría del doblado de papel a las secciones cónicas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (31), 338–362. <https://hdl.handle.net/10495/30736>

Vargas, L. (2021). *Un estudio histórico-epistemológico sobre la construcción social de las secciones cónicas en geometría del espacio* [Tesis de maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional]. Repositorio Institucional CINVESTAV. <https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/3903>