

Diseño de un kit didáctico con enfoque histórico para la enseñanza del volumen del cilindro y el cono en grados octavo y noveno.

Aleyda Nataly David Barrera



UNIVERSIDAD
La Gran Colombia

Vigilada MINEDUCACIÓN

Licenciatura en Matemáticas, Facultad Ciencias de La Educación

Universidad La Gran Colombia

Bogotá, D.C.

2026

DISEÑO DE UN KIT DIDÁCTICO CON ENFOQUE HISTÓRICO PARA LA ENSEÑANZA DEL VOLUMEN DEL
CILINDRO Y EL CONO EN GRADOS OCTAVO Y NOVENO.

2

Aleyda Nataly David Barrera

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Licenciado en matemáticas

Director:

Juan Carlos Acevedo Giraldo



UNIVERSIDAD
La Gran Colombia

Vigilada MINEDUCACIÓN

Licenciatura en matemáticas, Facultad ciencias de la educación.

Universidad La Gran Colombia

Bogotá D.C.

2026

Dedicatoria.

Dedico este logro, en primer lugar, a Dios, por brindarme la fortaleza, la sabiduría y la perseverancia necesarias para culminar esta importante etapa de mi vida.

A mi madre, quien, aunque ya no se encuentra físicamente conmigo, sigue siendo mi guía y mi inspiración. Su amor y su recuerdo me han dado la fuerza para continuar adelante y superar cada obstáculo que se presentó en el camino. Este logro también es suyo.

A mi padre, por ser mi ejemplo de trabajo y dedicación, y por enseñarme el valor del esfuerzo. Gracias a sus conocimientos y enseñanzas en el mundo del diseño, pude convertir mis ideas en realidades y dar forma a cada uno de los prototipos desarrollados en este proyecto.

A mi esposo, por su amor, apoyo incondicional y acompañamiento constante. Sus conocimientos, paciencia y confianza en mí fueron fundamentales para hacer posible la construcción de cada una de las piezas que conforman este trabajo.

Y especialmente a mi hijo, el motor más grande de mi vida y la razón que me impulsa a ser mejor cada día. Su existencia me dio la fuerza necesaria para no rendirme y culminar esta etapa, recordando siempre que cada esfuerzo vale la pena cuando se realiza con amor y con el deseo de construir un mejor futuro. A ustedes, que han sido parte esencial de este camino, dedico con todo mi corazón este logro, fruto del esfuerzo, la perseverancia y el amor que me han acompañado en cada paso.

Agradecimientos.

A la Universidad La Gran Colombia y a la Facultad de Ciencias de la Educación, por ofrecer los espacios de aprendizaje, formación y crecimiento que hicieron posible el desarrollo de este trabajo investigativo.

A los docentes que acompañaron mi proceso académico a lo largo de la carrera, por compartir sus conocimientos, experiencias y orientaciones, contribuyendo significativamente a mi formación como futura licenciada en Matemáticas. Cada enseñanza recibida dejó una huella valiosa que fortaleció mis competencias profesionales y personales.

De manera especial, agradezco a los profesores que orientan y acompañan el desarrollo de esta investigación. Sus observaciones, recomendaciones, conocimientos y constante disposición fueron fundamentales para enriquecer este trabajo. Su compromiso y acompañamiento permitieron fortalecer cada etapa del proceso investigativo y consolidar los resultados alcanzados.

Asimismo, agradezco a las personas que hicieron parte de la validación y construcción de este recurso didáctico, aportando valiosas experiencias y perspectivas que enriquecieron la propuesta desarrollada.

Tabla de contenido

RESUMEN	9
ABSTRACT.....	11
CAPÍTULO I - INTRODUCCIÓN	13
1.3. Planteamiento del problema	15
1.3.1. Pregunta de investigación.....	18
1.4. Objetivos	19
1.4.1. Objetivo General	19
1.4.2. Objetivos Específicos.....	19
1.5. Justificación.....	19
1.6. Antecedentes	23
CAPÍTULO II – MARCO TEÓRICO	27
2.1 Definición de volumen	27
2.2 Definición de sólido.....	29
2.3. Historia del volumen del cilindro	¡Error! Marcador no definido.
2.3.1. Volumen y área desde el antiguo Egipto	¡Error! Marcador no definido.
2.3.2. Área de un círculo por el método de exhaución de Arquímedes	31
2.3.3. Aproximación por medio de polígonos inscritos	32
2.3.4. Volumen del cilindro con discos	36
2.4. Partes de un prisma y una pirámide.	37
2.5. Historia del volumen del cono y su relación con el cilindro	37
2.6. Diámetro	42
2.9. Material concreto	43
2.9.1 Definición	43

DISEÑO DE UN KIT DIDÁCTICO CON ENFOQUE HISTÓRICO PARA LA ENSEÑANZA DEL VOLUMEN DEL
CILINDRO Y EL CONO EN GRADOS OCTAVO Y NOVENO.

	6
2.9.2 Fundamentación teórica	44
2.10 Marco legislativo	45
2.10.1. Contenidos	46
Capítulo III . METODOLOGÍA	46
3.1. ¿Qué se va a hacer?	¡Error! Marcador no definido.
3.2 Objetivos del kit	47
3.5. Metodología.....	48
3.5.1 Enfoque, tipo y diseño de la investigación.....	¡Error! Marcador no definido.
3.5.2. Kit didáctico	49
3.5.3 Integración del enfoque histórico en la metodología.....	50
3.5.6. Diseño metodológico: fases de la Investigación Basada en Diseño (gráfica)	50
3.5.7. Inclusión – Atención a la diversidad	52
3.5.8. Temporización (cronograma de actividades).....	52
3.5. FASE 1: Identificación del problema	54
3.5.1 Revisión de antecedentes comerciales sobre la enseñanza del volumen con material manipulativo.	54
3.5.2 Identificación de dificultades en el aprendizaje del volumen.	54
3.5.3. Diagnóstico en estudiantes de grado noveno	56
3.5.4. Exploración de prácticas históricas (exhaución, disección, comparación).	59
3.6. FASE 2: Diseño y desarrollo.....	61
3.6.1. Diseño del kit didáctico manipulativo con base en prácticas de matemáticos clásicos.	61

DISEÑO DE UN KIT DIDÁCTICO CON ENFOQUE HISTÓRICO PARA LA ENSEÑANZA DEL VOLUMEN DEL CILINDRO Y EL CONO EN GRADOS OCTAVO Y NOVENO.

	7
3.6.2. Elaboración de prototipos (impresión 3D).....	67
3.6.3. Diseño de la cartilla didáctica	68
3.7. FASE 3: Implementación	70
3.7.1. Construcción de la rúbrica de evaluación.	70
3.7.2. Selección de expertos para la validación.	70
3.7.3. Recolección de observaciones y sugerencias de evaluadores.	71
3.7.4. Recolección de observaciones y sugerencias de evaluadores de la universidad	73
Nota. Elaboración propia 3.7.5. Organización de la información obtenida.....	74
3.8. FASE 4: Revisión y Proyecciones	75
3.8.1. Análisis de la retroalimentación recibida.....	75
3.8.2. Ajustes al Kit didáctico y la cartilla.....	77
3.8.3. Proyección de su uso en el aula.	79
3.8.4. Elaboración de conclusiones y recomendaciones.	80
CAPÍTULO IV - CONCLUSIONES	81
CAPÍTULO V - REFERENCIAS	83

Lista de Figuras

Figura 1. Polígono de cuatro lados inscrito en círculo.....	32
Figura 2. Bisección de P4	33
Figura 3. Polígonos de base par inscritos en el círculo	34
Figura 4. Triángulo isósceles en P8.....	34
Figura 5. Área del triángulo isósceles en P8	35
Figura 6. Separación de pirámides de prisma de base triangular	39

DISEÑO DE UN KIT DIDÁCTICO CON ENFOQUE HISTÓRICO PARA LA ENSEÑANZA DEL VOLUMEN DEL CILINDRO Y EL CONO EN GRADOS OCTAVO Y NOVENO.

8

Figura 7. Fases de la metodología BDL	51
Figura 8. Tipos de dificultades encontradas en diagnostico.....	57
Figura 9. Gráfica composición del error por figura.....	58
Figura 10. Portada cartillas del kit	69

Lista de tablas

Tabla 1. Contenidos por DBA y aprendizajes priorizados	46
Tabla 2. Objetivos del kit para estudiante y docente	47
Tabla 3. Cronograma de actividades	53
Tabla 4. Consenso de valoraciones.....	72
Tabla 5. Valoraciones por expertos del colegio CEDAM.....	72
Tabla 6. Acciones Correctivas Implementadas	73
Tabla 7. Resultados cualitativos por parte de los expertos de la universidad	73

RESUMEN

La presente investigación tuvo como propósito diseñar y validar, mediante juicio de expertos, un kit didáctico manipulativo con enfoque histórico para la enseñanza del volumen en sólidos, específicamente el cilindro y el cono, dirigido a estudiantes de noveno grado. La propuesta surge como respuesta a las dificultades que suelen presentar los estudiantes en la comprensión del concepto de volumen, entre ellas la confusión entre área y volumen, la aplicación mecánica de fórmulas y las limitaciones en la visualización espacial de los cuerpos geométricos.

El trabajo se fundamenta en la revisión de referentes conceptuales, didácticos e históricos relacionados con el volumen, retomando los aportes de matemáticos clásicos como Arquímedes, Euclides, Eudoxo y Demócrito. Teniendo en cuenta estos antecedentes se diseñó una propuesta que, con material concreto, actividades experimentales y la reconstrucción de prácticas históricas que permitieron el desarrollo de las fórmulas y relaciones de volumen conocidas en la actualidad.

La investigación se realizó bajo un enfoque cualitativo y con una metodología de diseño de Investigación Basada en Diseño (DBR), caracterizado por procesos iterativos de análisis, diseño, evaluación y mejora. El kit didáctico elaborado incluye modelos manipulativos, cartillas didácticas con narrativa histórica y actividades orientadas a promover la exploración, argumentación y la comprensión del concepto de volumen.

Como parte del proceso, se diseñó una rúbrica para evaluar la pertinencia didáctica, conceptual e histórica del recurso. Luego, el kit fue sometido a un juicio de expertos, cuyos aportes permitieron realizar ajustes relacionados con la organización de los contenidos, la presentación gráfica y la claridad de las actividades propuestas.

Finalmente, los resultados demuestran que el kit constituye una herramienta didáctica pertinente para apoyar la enseñanza del volumen, ya que articula la manipulación de materiales concretos con la contextualización de los conceptos matemáticos desde las prácticas de matemáticos clásicos. Además, se identificó que sus características visuales y manipulativas permiten su adaptación a otros contenidos geométricos y a diferentes niveles educativos, ampliando sus posibilidades de aplicación en el aula. Por ende, la propuesta aporta una alternativa innovadora para favorecer aprendizajes más significativos, activos y contextualizados en la enseñanza de la geometría tridimensional.

Palabras clave: cilindro, cono, diseño, enfoque histórico, expertos, kit manipulativo

ABSTRACT

The purpose of this research was to design and validate, through expert judgment, a manipulative didactic kit with a historical approach for teaching volume in solids, specifically the cylinder and the cone, aimed at ninth-grade students. The proposal emerged as a response to the difficulties students commonly face in understanding the concept of volume, including confusion between area and volume, the mechanical application of formulas, and limitations in the spatial visualization of geometric solids.

The study is grounded in a review of conceptual, didactic, and historical references related to volume, drawing on the contributions of classical mathematicians such as Archimedes, Euclid, Eudoxus, and Democritus. Based on these foundations, a proposal was developed that integrates concrete materials, experimental activities, and the reconstruction of historical practices that contributed to the development of the volume formulas and relationships known today.

The research was conducted under a qualitative approach and employed a Design-Based Research (DBR) methodology, characterized by iterative processes of analysis, design, evaluation, and improvement. The didactic kit includes manipulative models, instructional booklets with historical narratives, and activities designed to promote exploration, reasoning, and a deeper understanding of the concept of volume.

As part of the process, a rubric was designed to evaluate the didactic, conceptual, and historical relevance of the resource. Subsequently, the kit was subjected to expert judgment, whose feedback enabled adjustments related to content organization, graphic presentation, and the clarity of the proposed activities.

Finally, the results demonstrate that the kit constitutes a relevant didactic tool for supporting the teaching of volume, as it combines the manipulation of concrete materials with the contextualization of mathematical concepts through the practices of classical mathematicians. Furthermore, its visual and manipulative characteristics allow it to be adapted to other geometric topics and different educational levels, expanding its potential applications in the classroom. Therefore, the proposal offers an innovative alternative for fostering more meaningful, active, and contextualized learning in the teaching of three-dimensional geometry.

Keywords: cylinder, cone, design, historical approach, experts, manipulative kit.

CAPÍTULO I - INTRODUCCIÓN

Diferentes investigaciones han demostrado que la enseñanza de forma tradicional del volumen dificulta el desarrollo del pensamiento espacial y limita la comprensión del concepto de volumen (Meavilla & Oller, 2013; Ferrer, 2016). De esta manera, los estudiantes suelen mostrar dificultades para diferenciar volumen de otras magnitudes como el área, así como para relacionar los procedimientos algebraicos con su significado geométrico.

Ante esta situación, el uso de materiales manipulables y visuales se vuelve una herramienta muy útil para ayudar a entender mejor las formas tridimensionales. Además, dichos materiales fortalecen el interés de los estudiantes gracias a que se le da un significado, origen y desarrollo del conocimiento matemático, proporcionando un contexto que enriquece el proceso de aprendizaje

Este proyecto presenta la creación de un material didáctico práctico, un kit educativo con un enfoque histórico, que busca ayudar a enseñar el cálculo del volumen de cuerpos redondos, como el cilindro, el cono y la esfera, a estudiantes de noveno grado. La propuesta se basa en el estudio de Arquímedes, mediante la utilización de técnicas geométricas que precedían el cálculo del volumen usando diferentes métodos de división y comparación. Incorporar estos métodos en el entorno escolar ayuda a recuperar el origen histórico del concepto, de esta manera se fomenta en los estudiantes una comprensión más profunda, reflexiva y crítica.

Con esta investigación se proporcionará un material que no solo es didáctico, sino también innovador, que combina lo concreto, lo histórico, lo visual, lo conceptual, lo lúdico y lo magistral, permitiendo que el aprendizaje de las matemáticas sea significativo, contextualizado y transformador.

Además, esta investigación utiliza un enfoque cualitativo y se lleva a cabo con una metodología basada

DISEÑO DE UN KIT DIDÁCTICO CON ENFOQUE HISTÓRICO PARA LA ENSEÑANZA DEL VOLUMEN DEL CILINDRO Y EL CONO EN GRADOS OCTAVO Y NOVENO.

14

en diseño (Design-Based Research), con el objetivo de crear y validar un recurso didáctico manipulativo que tenga un enfoque histórico para enseñar el volumen en el cilindro y el cono.

1.3. Planteamiento del problema

Un estudio realizado por (Safitri et al., 2023) refiere que los errores cometidos por los estudiantes al resolver problemas sobre el área superficial y el volumen no son simples equivocaciones, sino que reflejan dificultades más profundas en el proceso de aprendizaje, que pueden clasificarse en tres categorías: ontológicas, epistemológicas y didácticas. Los obstáculos ontológicos surgen cuando los estudiantes no están cognitivamente preparados para comprender ciertos conceptos, ya sea por falta de conocimientos previos, dificultades técnicas o incluso desmotivación y bajo interés por el tema. Por ejemplo, algunos estudiantes no distinguen entre área y volumen, o interpretan mal algunos símbolos en las fórmulas. Los obstáculos epistemológicos aparecen porque los estudiantes han aprendido los conceptos en contextos limitados y no han sido instruidos para aplicarlos en diferentes situaciones; esto los lleva a usar fórmulas incorrectas o hacer suposiciones equivocadas. Por último, los obstáculos didácticos como estrategias o materiales inadecuados o la memorización de fórmulas son consecuencia de prácticas de enseñanza centradas en la reiteración y en la resolución mecánica de ejercicios, sin promover el razonamiento, la exploración ni la conexión entre ideas. Estos tres tipos de dificultades están interrelacionados y afectan directamente la habilidad de los estudiantes para representar matemáticamente un problema, ya sea de forma visual, simbólica o verbal. Por ello, los docentes podrían proponer experiencias de aprendizaje contextualizadas, participativas y variadas, que estimulen el pensamiento crítico y contribuyan al desarrollo de una comprensión significativa y versátil de las nociones matemáticas.

Estas dificultades no solo se relacionan con la mala interpretación de conceptos o desmotivación sino también con una comprensión deficiente del significado geométrico y de las magnitudes implicadas. Como señalan Meavilla y Oller (2013), es frecuente encontrar una escasa capacidad de visualización tridimensional, lo que limita el desarrollo del pensamiento espacial necesario para interpretar figuras en el espacio. A ello se suma una tendencia generalizada a utilizar fórmulas como si se tratara de procedimientos automáticos o “mágicos”, carentes de sentido geométrico y de justificación teórica. Así, los autores exponen que los estudiantes tienden a aplicar identidades algebraicas o expresiones simbólicas de manera puramente formal, sin reconocer que los símbolos representan entidades geométricas con significado, ni reflexionar críticamente sobre su origen, función o aplicabilidad. Adicionalmente, Ferrer (2016) enuncia la dificultad para diferenciar volumen con respecto a otras magnitudes como el área, y una tendencia a la simple memorización de fórmulas sin comprensión del significado geométrico. Así es como, especialmente en este pensamiento, el aprendizaje parece centrarse “en un estudio memorístico de áreas, volúmenes, definiciones geométricas, y en construcciones de tipo mecanicista y completamente descontextualizadas” (Abrate et al., 2006, p.1). Investigaciones han señalado que las dificultades en la enseñanza de la geometría responden a múltiples causas. Una de ellas es la persistencia de métodos tradicionales de enseñanza, centrados en el uso exclusivo del libro de texto, en el cual las figuras geométricas se presentan con escasos ejemplos, sin acompañamiento de estrategias visuales ni manipulativas que favorezcan una comprensión significativa (Berrantes y Zapata, 2008). A ello se suma la limitada incorporación de recursos didácticos que promuevan la participación del estudiante y el desarrollo de procesos de construcción conceptual.

Así, algunos docentes pueden encontrar dificultades para disponer de estrategias pedagógicas que favorezcan la superación de estas barreras. Como lo indican Pelcastre (2025), y Meavilla y Oller (2013), la enseñanza significativa de las matemáticas requiere una transformación del rol docente, donde se fomente la visualización, la manipulación concreta, la construcción de saberes a partir de la experiencia. En esta línea, resulta indispensable reconectar los contenidos geométricos con las bases del aprendizaje significativo, entendidas como un proceso activo de construcción del conocimiento donde los nuevos contenidos se relacionan de forma sustantiva y no arbitraria con los saberes previos del estudiante. Como plantea Rodríguez Palmero (2004), para que esta conexión sea posible, el contenido debe estar organizado de manera lógica y presentarse mediante experiencias que permitan al estudiante relacionar los nuevos conceptos con conocimientos previamente adquiridos. En el caso de la enseñanza de la geometría y el volumen, esto implica el uso de representaciones visuales, materiales manipulables y situaciones contextualizadas que favorezcan la comprensión de las formas tridimensionales. Además, el estudiante debe mostrar una actitud favorable hacia el aprendizaje comprensivo y disponer de materiales potencialmente significativos que faciliten el establecimiento de estas relaciones (Rodríguez Palmero, 2004).

Por otra parte, diversos autores han resaltado la importancia de recuperar el sentido histórico de las matemáticas para evitar que su enseñanza se perciba como una práctica descontextualizada (González, 2004), aportando a la consolidación del aprendizaje significativo. Por ejemplo, conocer cómo los antiguos egipcios empleaban la geometría para medir terrenos permite a los estudiantes comprenderla como un conocimiento construido para resolver necesidades concretas, y no solo como un conjunto de fórmulas y procedimientos. Aun así, se sigue evidenciando una débil articulación entre los contenidos escolares y su evolución histórica.

Por tanto, la incorporación de material concreto en la enseñanza del volumen puede articular **la experiencia, los conocimientos previos, la representación visual y la perspectiva histórica**, favoreciendo que el estudiante comprenda el significado de los procedimientos matemáticos y no se limite a la memorización de fórmulas.

Esta investigación hace uso de estos elementos para contribuir al desarrollo del concepto de volumen considerando las dificultades expuestas previamente.

Teniendo en cuenta lo anterior, se propone el diseño de un kit didáctico que incluye material manipulativo con el propósito de facilitar la comprensión del concepto de volumen en sólidos como el cilindro y el cono. Estos recursos permiten que los estudiantes interactúen de manera activa con los objetos, les ayuda crear una idea más clara y profunda sobre cómo se mide, representa y aplica el volumen en distintos cuerpos geométricos redondos. Además, este kit incorpora un enfoque histórico que aporta contexto y significado al aprendizaje. A través de referencias al desarrollo del concepto de volumen a lo largo del tiempo, estudiantes de grado noveno podrán comprender no sólo el "cómo", sino también el "por qué" y el "para qué" de estos conceptos. Esta integración entre lo manipulativo y lo histórico otorga al kit un valor educativo integral, ya que no solo fortalece las habilidades matemáticas, sino que también promueve la reflexión sobre la evolución del pensamiento científico y su aplicación en contextos reales.

Para ello, se plantea una investigación de enfoque cualitativo orientada al diseño y validación de un recurso didáctico que contribuya a mejorar la comprensión del volumen del cilindro y el cono.

1.3.1. Pregunta de investigación

¿Cómo pueden reinterpretarse ideas histórico-epistemológicas sobre el volumen del cono y del cilindro para diseñar y refinar una secuencia de actividades, mediada por materiales manipulables, que favorezca el aprendizaje sobre estos conceptos?

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo General

Diseñar y refinar un kit didáctico manipulativo que integre una serie de actividades basadas en ideas histórico-epistemológicas para la enseñanza del volumen del cilindro y el cono, dirigido a estudiantes de los grados octavo y noveno.

1.4.2. Objetivos Específicos

- Considerar los fundamentos conceptuales, didácticos e históricos relacionados con la enseñanza del volumen del cilindro y el cono, particularmente los aportes de matemáticos clásicos.
- Diseñar un kit didáctico manipulativo que integre material concreto y estrategias basadas en la reconstrucción histórica del concepto de volumen, orientado a estudiantes de noveno grado.
- Confeccionar una rúbrica de evaluación para la verificación de la pertinencia didáctica, conceptual e histórica del recurso didáctico.
- Evaluar la pertinencia del kit didáctico a través del juicio de expertos, considerando su calidad, aplicabilidad al igual que su potencial pedagógico en el aula con base en sus experiencias.

1.5. Justificación

Se recalca la importancia de que los docentes especialmente de matemáticas planteen nuevas estrategias para que el aprendizaje de la matemática sea involucren al estudiante en la exploración, manipulación y construcción de los conceptos, favoreciendo la relación entre los nuevos conocimientos

y sus saberes previos y, con ello, el aprendizaje significativo (Ausubel, 1976). El estudio realizado por Yoselin Pelcastre (2025) menciona que el proceso de enseñanza de las matemáticas representa un desafío constante para los docentes, quienes deben emplear estrategias didácticas innovadoras para fomentar un aprendizaje significativo en los estudiantes. En este sentido, la labor del docente no se limita a la transmisión de conocimientos, sino que implica la implementación de metodologías nuevas que promuevan la comprensión profunda y la aplicación práctica de los conceptos matemáticos en su contexto./*- Así, la aplicación de estrategias pedagógicas adecuadas puede contribuir al desarrollo de capacidades como el análisis, la síntesis y la resolución de problemas matemáticos, favoreciendo una comprensión más profunda de los conceptos y su aplicación en diferentes situaciones (Pelcastre, 2025).

Ahora bien, la enseñanza del volumen de los sólidos representa un reto significativo en el ámbito escolar para los docentes. Existen fenómenos como el estudiante que percibe las fórmulas sin un contexto claro, lo ven como un concepto puramente formal y sus resultados no se asocian con la realidad como educadores “queremos promover un aprendizaje significativo en nuestros alumnos, estos fenómenos deben ser subsanados. Para ello, podemos recurrir al uso de estrategias como la visualización y herramientas como el uso de materiales manipulativos” (Meavilla y Oller, 2013).

En los enfoques tradicionales de enseñanza de la geometría, donde comúnmente se acompaña con libros de texto, las imágenes adquieren un papel central en la instrucción. Sin embargo, estos textos suelen mostrar las figuras geométricas con un solo ejemplo o con muy pocos, lo que lleva al estudiante a formar esquemas mentales limitados o incompletos, especialmente con las figuras tridimensionales. En muchas ocasiones, no se toma en cuenta la simbología propia del lenguaje visual en las figuras geométricas, lo que lleva a que tanto docentes como estudiantes interpreten de manera diferente un mismo dibujo, especialmente cuando se trata de representaciones planas de cuerpos tridimensionales.

Por ejemplo, una misma imagen puede ser entendida como una pirámide cuadrada, una bipirámide o simplemente un cuadrado con sus diagonales. (Berrantes y Zapata,2008).

El uso de materiales en geometría no solo permite manipular objetos que de otro modo no serían más que ideas de existencia puramente platónica. También permite observar y comprender propiedades geométricas que, en ocasiones, son difíciles de intuir (Meavilla y Oller, 2013).

Además, cuando se trata de calcular el volumen de sólidos como el cilindro y el cono, los estudiantes suelen presentar dificultades para identificar sus propiedades. Una de las causas, es que las representaciones planas limitan la comprensión completa de sus características tridimensionales, dificultando así su visualización y análisis. (Advíncula et al., 2017)

En respuesta a estas dificultades, se propone el diseño de un kit didáctico para la enseñanza del volumen del cilindro y el cono con un enfoque histórico y manipulativo. Considerando el kit como un recurso didáctico, este se convierte en una herramienta esencial de apoyo para el docente dentro del proceso de enseñanza. Su función principal es facilitar la transmisión de información de forma atractiva, dinámica e innovadora, al mismo tiempo que favorece el desarrollo de habilidades, capacidades y destrezas en los estudiantes de todos los niveles educativos (Napa Vilela, 2023).

El kit didáctico propuesto se plantea como una herramienta útil para el aula, ya que puede ser implementado en diferentes contextos educativos y facilita la enseñanza de la geometría, de manera específica el estudio del cilindro y el cono. Su carácter manipulativo podría permitir que los estudiantes comprendan mejor el concepto de volumen, respondiendo a dificultades que comúnmente se presentan en este tema.

Además, este recurso tiene la posibilidad de ser compartido y adaptado por otros docentes o instituciones educativas, lo que amplía su alcance y utilidad. Sin embargo, su principal valor está en su

aporte pedagógico, ya que busca mejorar los procesos de enseñanza mediante una propuesta que integra el uso de materiales concretos y el enfoque histórico de las matemáticas.

Adicionalmente se propone dar a conocer su historia, como herramienta para el proceso de enseñanza en el aula. Para lograrlo, es necesario despertar la curiosidad del alumno y utilizar la historia como una herramienta didáctica efectiva, considerando que, en ocasiones, interpretan el conocimiento matemático como un elemento aislado. Es allí cuando el docente debería presentar la historia de las matemáticas y su evolución a lo largo del tiempo, permitiendo comprender el origen del conocimiento, que, a la vez, les permite sentirse identificados con los retos conceptuales que enfrentaron las generaciones pasadas (González, 2004).

El conocimiento de la historia de una disciplina, junto con su conexión directa con los contenidos que se enseñan, brinda tanto al docente como al estudiante la oportunidad de entender mejor la esencia de esos saberes, las razones de su existencia, y el contexto histórico y social en el que surgieron. Además, permite comprender el impacto que ese conocimiento tuvo en la vida de las personas de esa época. (Hernández y Ríos, 2004)

Así, el desarrollo histórico de estos sólidos puede inspirar a los estudiantes, presentando las matemáticas como una disciplina en evolución, a través del uso de un kit didáctico, que no solo evidencia el aspecto histórico, sino que también, ayuda a promover el pensamiento crítico y la capacidad de resolver problemas de manera creativa y manipulativa en los estudiantes.

Desde el punto de vista metodológico, esta investigación se sustenta en el Investigación Basado en Diseño (McKenney y Reeves, 2012), la cual permite la creación y validación de recursos didácticos a través de procesos iterativos de diseño, evaluación y mejora. En este sentido, el presente estudio no busca medir el aprendizaje en estudiantes, sino validar la pertinencia didáctica del recurso mediante

juicio de expertos, una técnica comúnmente empleada para confirmar la calidad y relevancia de instrumentos educativos (Hernández Sampieri et al., 2021; Stufflebeam y Shinkfield, 2008).

La creación de este kit didáctico representa un aporte en tres niveles:

Didáctico: Ofrece una herramienta manipulativa que favorece la comprensión conceptual del volumen en geometría tridimensional, enfocándose en prácticas probadas en aula (GeoGebra, 2020).

Teórico: Integra la historia en la enseñanza de la geometría, enriqueciendo el aprendizaje al contextualizar conceptos desde Euclides hasta desarrollos más modernos (García y López, 2012; (Santana et al., 2025).

Práctico: Proporciona un recurso que se puede aplicar en contextos educativos reales, como la construcción de sólidos para calcular volúmenes, mejorando la enseñanza innovadora (Román Andújar, s.f.; Teachy, 2025).

De esta forma, la investigación contribuye al fortalecimiento de la enseñanza de la geometría espacial, promoviendo prácticas pedagógicas más significativas, contextualizadas e innovadoras (Smartick, 2025).

1.6. Antecedentes

Varias investigaciones han demostrado que la inclusión de la historia de las matemáticas puede contribuir al desarrollo de habilidades cognitivas y metacognitivas en los estudiantes. Hernández y Ríos (2004) destacan que, al enfrentarse a problemas históricos, los estudiantes adquieren una visión global de las matemáticas. Para estos autores, incluir elementos históricos no solo ayuda en la comprensión de los objetos matemáticos, sino que puede ser una herramienta de motivación hacia el aprendizaje, pues permite al estudiante reconocer el conocimiento matemático como producto de un proceso humano y cultural.

Desde esta perspectiva, Salinas (2010) expone una experiencia didáctica en la que se incorporaron elementos históricos, como la película *Ágora* y lecturas sobre Euclides, para enseñar geometría en el primer semestre de bachillerato. El objetivo del autor fue introducir a los estudiantes en el razonamiento deductivo y despertar su interés por las matemáticas al mostrar cómo surgieron los conceptos geométricos en su contexto histórico. A través de actividades basadas en los Elementos de Euclides, los estudiantes comprendieron mejor el método axiomático y valoraron la necesidad de definiciones, axiomas y demostraciones. Los resultados muestran que el uso de la historia promovió una actitud más positiva hacia la materia, permitió una comprensión más profunda del pensamiento lógico-deductivo y ayudó a los alumnos a reconocer que las matemáticas no son abstractas y ajenas, sino construcciones humanas con un trasfondo cultural y práctico. Estas experiencias evidencian el potencial educativo de la historia de las matemáticas y justifican su incorporación en propuestas didácticas innovadoras como la que se desarrolla en este proyecto.

En coherencia con lo anterior, en este proyecto se pretende usar el enfoque histórico como fundamento para el diseño de un kit didáctico manipulativo enfocado en el desarrollo de la noción de volumen del cilindro y el cono, articulando los aportes de matemáticos clásicos con estrategias didácticas actuales.

En este contexto, Henao (2020) presenta una investigación desarrollada en la Institución Educativa Viboral, ubicada en la zona rural del municipio de Aguadas, Caldas, cuyo propósito fue analizar el impacto del uso del software GeoGebra como herramienta mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los sólidos. Esta investigación se realizó con base en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau, la cual plantea que el conocimiento se construye a partir de situaciones problemáticas que generan una interacción significativa entre el estudiante, el saber y el docente. Para iniciar con esa investigación, el autor aplicó un diagnóstico o pretest para identificar los conocimientos

previos de los estudiantes sobre las propiedades, características y fórmulas de volumen del cilindro y el cono. Posteriormente, se diseñó e implementó una unidad didáctica basada en situaciones didácticas cuidadosamente estructuradas, en las que el uso de GeoGebra fue el eje central. A través del software, los estudiantes exploraron de manera visual e interactiva los cuerpos geométricos, identificando elementos como bases, alturas, ejes de rotación y relaciones espaciales, lo que permitió una comprensión más profunda y contextualizada del concepto de volumen.

Durante las sesiones de clase, los estudiantes resolvieron problemas, realizaron hipótesis, manipularon las figuras en el entorno digital y participaron activamente en discusiones grupales orientadas a la construcción de los conceptos. Al finalizar la intervención pedagógica, se aplicó un posttest que permitió evaluar el progreso académico de los estudiantes y evidenciar los aprendizajes alcanzados. Los resultados mostraron una mejora en el desempeño, tanto en la precisión de sus respuestas como en el lenguaje matemático utilizado para justificar sus procedimientos. Esto permitió evidenciar que los estudiantes comprendieron el concepto de volumen desde una comprensión estructural del espacio y de las magnitudes implicadas en el concepto. Además, se identificó que el uso del material didáctico en este caso GeoGebra favoreció el aprendizaje, ya que estimuló el pensamiento crítico, la autonomía, la motivación y el interés por las matemáticas. En conclusión, la investigación demostró que la incorporación de herramientas digitales, cuando se integran de manera planificada y coherente con una propuesta didáctica sólida, enriquece significativamente los procesos de enseñanza de la geometría espacial.

Otro trabajo similar fue el de Cruz (2025) el cual consistió en el diseño e implementación de una propuesta didáctica basada en la Ingeniería Didáctica y la metodología ELI (Enseñanza Libre de Improvisaciones) para mejorar el aprendizaje de los volúmenes de sólidos en estudiantes de bachillerato del Colegio Jarales. El proceso incluyó un diagnóstico inicial que reveló fuertes deficiencias en

visualización y aplicaciones de la integral, lo que llevó al desarrollo de talleres de regularización y el uso intensivo del software GeoGebra mediante una página web y actividades auténticas, como el cálculo del volumen de una zanahoria real. Las conclusiones demostraron la efectividad de la propuesta, ya que el promedio grupal aumentó de 7.5 a 8.4, ningún alumno reprobó la evaluación final y el 92% de los estudiantes manifestó haber mejorado significativamente su capacidad de visualización espacial.

Ahora bien, como antecedente igualmente relevante para este proyecto, es importante mencionar el trabajo de Báez y Rodríguez (2023), quienes desarrollaron y validaron el material didáctico BoxSet, una propuesta fundamentada en la Ingeniería Didáctica con el fin de fortalecer la enseñanza de la factorización a través del álgebra geométrica, empleando explícitamente la historia de las matemáticas como fundamento para la creación del material. Es decir, no se limitaron a agregar referencias históricas al contenido, sino que tomaron los procesos históricos de construcción del concepto, sus problemas originales, sus formas de representación y su evolución como base para diseñar el material. Por ende, la historia se convirtió en un recurso metodológico para estructurar la propuesta didáctica, y por ello este antecedente resulta especialmente relevante ya que evidencia que la historia no sólo contextualiza el saber matemático, sino que puede emplearse directamente como herramienta para diseñar propuestas pedagógicas que ayuden a una comprensión más profunda y significativa de los conceptos.

CAPÍTULO II – MARCO TEÓRICO

El presente marco teórico reúne los fundamentos que son base para el diseño y desarrollo del kit didáctico propuesto para la enseñanza del volumen en sólidos de revolución. Y para ello, se abordan referentes relacionados con la historia de las matemáticas, los conceptos geométricos y volumétricos involucrados y los fundamentos pedagógicos que orientan el aprendizaje mediante la manipulación y la exploración de objetos.

2.1 Definición de volumen

El volumen es un concepto matemático complejo que puede verse desde diversas perspectivas. En el marco del diseño de recursos didácticos para la enseñanza de sólidos como el cilindro y el cono, resulta especialmente relevante abordar el volumen desde dos significados fundamentales: como espacio ocupado y como suma de partes.

El primer enfoque es más intuitivo. El volumen se comprende como el espacio tridimensional que ocupa un cuerpo. Este significado tiene raíces empíricas y se relaciona con experiencias cotidianas, como llenar recipientes con agua, arena o cubos, comparar la capacidad de diferentes objetos o utilizar unidades cúbicas para medir.

Desde una perspectiva didáctica, este significado permite introducir el concepto de volumen de forma concreta y accesible, sobre todo en los primeros niveles educativos. Aquí, los objetos no se analizan por sus propiedades matemáticas, sino como conceptos físicos que ocupan un espacio observable y medible.

Según Pino-Fan et al. (2024), esta concepción fue históricamente fundamental en culturas antiguas como la egipcia y la babilónica, que desarrollaron métodos prácticos para calcular volúmenes con fines agrarios o arquitectónicos, mucho antes de la formalización matemática. (Pino-Fan et al., 2024)

En el aula, este primer enfoque favorece el uso de material manipulativo (como recipientes) para representar físicamente el volumen, permitiendo a los estudiantes construir una noción inicial y concreta del concepto.

El segundo enfoque (volumen como suma de partes) surge con el desarrollo del pensamiento matemático avanzado, particularmente en el periodo del Renacimiento, con la obra de Cavalieri y posteriormente con el cálculo infinitesimal. Aquí, el volumen se concibe como el resultado de sumar un número infinito de elementos muy pequeños (indivisibles o láminas), que, al integrarse, conforman el todo.

Por ejemplo, en el caso de un sólido, este puede ser pensado como una acumulación de capas con una mínima altura, cuya suma infinitesimal define el volumen total. Esta perspectiva está en la base del cálculo integral y permite una formulación precisa para determinar el volumen de cuerpos complejos, más allá de lo que se puede medir.

Este enfoque no es sólo formal, también tiene gran potencial didáctico, ya que permite visualizar la transición entre lo concreto y lo abstracto, mostrando cómo un objeto tridimensional puede ser descompuesto y reconstruido a partir de elementos simples. De este modo, se convierte en un puente entre la geometría y el análisis matemático.

Por ende, este significado articula la comprensión del volumen con la idea de capas, en la que cada parte (o corte transversal) aporta una contribución al total, y el todo se obtiene a través de una suma continua. (Caviedes et al., 2024).

Estos dos significados (el volumen como espacio ocupado y como suma de partes) no son contradictorios, sino complementarios. El primero proporciona un fundamento más intuitivo y concreto para el aprendizaje inicial, mientras que el segundo permite una profundización formal del concepto. En el diseño de un kit didáctico para la enseñanza del cilindro y el cono, resulta clave integrar ambos enfoques, propiciando actividades que inicien desde la manipulación concreta del espacio y progresen hacia representaciones gráficas y simbólicas de la suma de secciones.

2.2 Definición de sólido

Desde una perspectiva lingüística y normativa, el concepto de sólido está asociado a las propiedades espaciales tridimensionales de los cuerpos. Según la Real Academia Española (RAE), un sólido es definido como “cuerpo que tiene tres dimensiones: longitud, latitud y profundidad, y figura determinada” (RAE, 2024). Esta definición destaca la existencia de una forma bien definida y delimitada en el espacio, lo que permite distinguir a los sólidos de otras entidades geométricas planas.

2.3. Historia del volumen del cilindro

2.3.1. Volumen y área desde el antiguo Egipto

Los primeros indicios del uso del concepto de volumen pueden rastrearse en civilizaciones antiguas como la egipcia y la mesopotámica, donde su desarrollo estuvo ligado a necesidades prácticas. La construcción de obras, la administración de recursos y la medición de recipientes y terrenos exigían procedimientos para cuantificar capacidades y magnitudes espaciales, dando lugar a formas iniciales de razonamiento volumétrico. En este contexto, algunos pensadores en la antigüedad reflexionaron sobre el origen del conocimiento matemático.

Por ejemplo, Boyer (1986) recoge dos interpretaciones clásicas sobre el origen del conocimiento matemático en dichas culturas, representadas por Heródoto y Aristóteles. Por un lado, Heródoto atribuye el surgimiento de las matemáticas gracias a prácticas como la medición de tierras, la construcción y la organización administrativa. Por otro lado, Aristóteles sostiene que su desarrollo se asocia al ocio intelectual y a actividades de grupos con condiciones sociales privilegiadas, como las clases sacerdotales. Estas visiones no solo aportan un trasfondo histórico, sino que orientan la construcción teórica de esta investigación al mostrar que el concepto de volumen puede ser comprendido desde distintas prácticas históricas, aspecto central para el diseño del kit didáctico que busca articular historia, práctica y significación matemática (Boyer, 1986, p. 24).

Además, existen diversas evidencias históricas que apoyan la idea de que el desarrollo de las matemáticas estuvo estrechamente ligado a necesidades prácticas. Por ejemplo, en la civilización egipcia, existían problemas relacionados con la arquitectura, la construcción y la agrimensura impulsaron la creación de procedimientos matemáticos para medir áreas y volúmenes. Estos métodos quedaron registrados en documentos como el Rhind Mathematical Papyrus, donde se presentan estrategias para aproximar el área del círculo utilizando un valor de π cercano a 3,16, aunque también se reportan aproximaciones como 3 o 3,125 (Boyer, 1986, p. 40). Aun con su valor inexacto, esas aproximaciones evidencian la existencia de herramientas matemáticas funcionales para resolver problemas concretos de medición y cálculo en la época.

A partir de estas aproximaciones al área del círculo, se desarrollaron procedimientos prácticos para determinar el volumen de cuerpos con forma similar al cilindro. Generalmente el procedimiento consistía en multiplicar el área de la base por la altura del cuerpo, lo que demuestra una comprensión temprana de la relación entre los cortes o secciones transversales y la medida total del sólido. En este

sentido, aunque las estimaciones iniciales fueran métricamente imprecisas debido a los valores aproximados de π esto ayudó a comprender cómo se configuró la idea del volumen del cilindro.

Esta definición lingüística se corresponde con el enfoque geométrico clásico, en el que los sólidos se entienden como cuerpos que ocupan una porción finita del espacio, delimitada por superficies, y que pueden ser analizados en términos de su volumen, forma y estructura

2.3.2. Área de un círculo por el método de exhaustión de Arquímedes

Partiendo de que, desde los inicios de la historia de las matemáticas, el volumen de un cuerpo como el cilindro se ha relacionado con el cálculo del área de su base la cual corresponde a un círculo, es importante señalar que las primeras civilizaciones, como la egipcia y la babilónica, ya realizaban cálculos para determinar tanto el área del círculo como el volumen de cuerpos con forma similar al cilindro. Sin embargo, estas aproximaciones no eran completamente precisas, pues empleaban valores aproximados para π y procedimientos prácticos orientados principalmente a resolver problemas de medición en contextos como la construcción, la agrimensura y la administración de recursos. A pesar de estas imprecisiones, dichos cálculos evidencian que ya existía una comprensión inicial de la relación entre el área de la base circular y la altura para determinar volúmenes.

Dado que, desde etapas tempranas, el volumen de un cuerpo como el cilindro se vinculó al cálculo del área de su base circular, es importante examinar cómo se fue refinando la determinación del área del círculo. En este proceso, el trabajo de Arquímedes fue decisivo, al establecer una aproximación más rigurosa mediante el método de exhaustión. Si bien este método había sido propuesto previamente por Eudoxo, Arquímedes lo perfeccionó y lo empleó para obtener estimaciones más precisas del área del

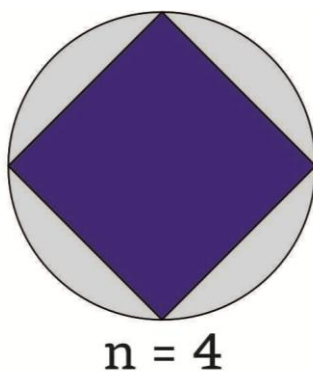
círculo, fortaleciendo así la comprensión matemática de magnitudes asociadas al volumen de cuerpos con base circular (Boyer, 1986, p. 128).

Ahora bien, para comprender cómo se llega a determinar el área del círculo mediante el método de exhaustión, es necesario considerar el uso de polígonos regulares inscritos en el círculo. Este procedimiento se fundamenta en la idea de aproximar la superficie del círculo mediante figuras conocidas, como los triángulos que conforman dichos polígonos. Dado que la fórmula del área del triángulo ya era conocida, esta descomposición permitió construir aproximaciones sucesivas cada vez más ajustadas al área del círculo, en un proceso que combina instrumentación geométrica, control del error y criterios de validación propios de la matemática griega.

2.3.3. Aproximación por medio de polígonos inscritos

Inscripción polígono inicial: Arquímedes comienza dibujando un polígono regular de n lados (P_n) dentro del círculo por ejemplo P_4 para $n = 4$

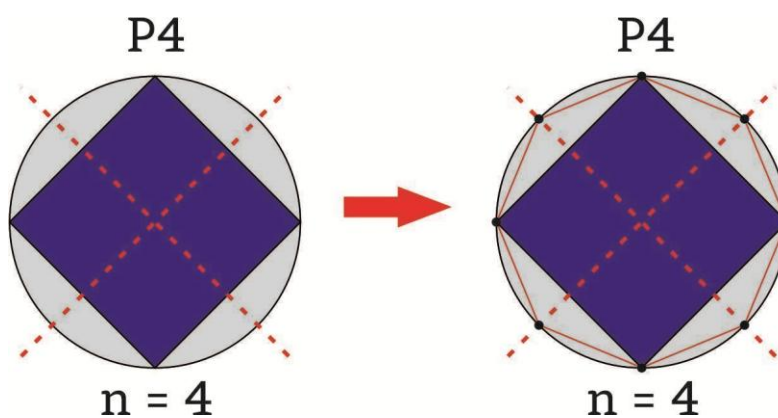
Figura 1. Polígono de cuatro lados inscrito en círculo



Nota. Elaboración propia

Aumento de lados: Partiendo de dicho polígono de $n = 4$, Arquímedes generó nuevas figuras mediante la duplicación sucesiva de sus lados dividiendo por la mitad (bisecando) los arcos de la circunferencia que quedaban por encima de los lados de P_4 y al unir estos nuevos puntos de bisección con los vértices del cuadrado, se obtiene una figura rectilínea inscrita P_8 de $n = 8$ (un octógono) Arquímedes realizó esta discusión muchas veces hasta llegar a un polígono de 96 lados (de 4 a 8, 16, y así hasta alcanzar un polígono de $n = 96$). (pedro carrión 2009 p.74)

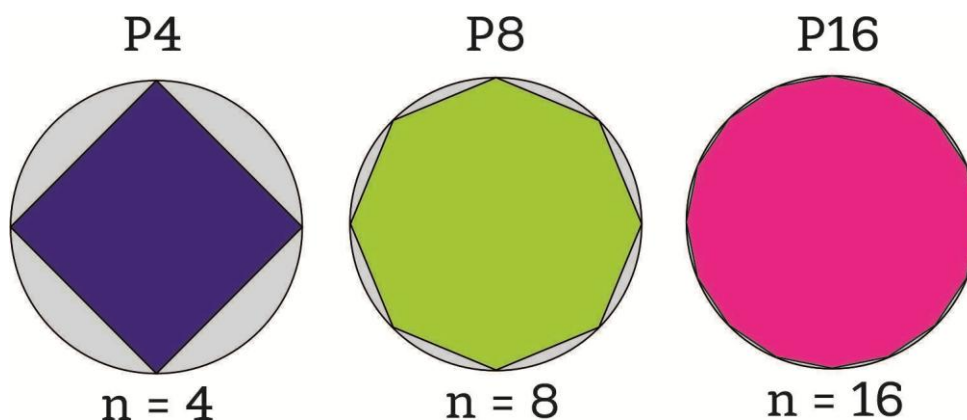
Figura 2. Bisección de P_4



Nota. Elaboración propia

Reducción del error: El área del polígono inscrito siempre es menor que la del círculo ($P_n < C$). Sin embargo, a medida que aumenta el número de lados, el espacio "vacío" o espacio de color gris de la figura 3 entre el polígono y la curva del círculo (llamado dn) se va reduciendo drásticamente.

Figura 3. Polígonos de base par inscritos en el círculo

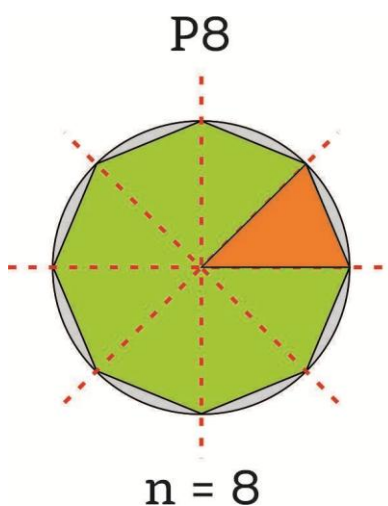


Nota. Elaboración propia

“Es conocido que el área de un polígono inscrito en un círculo es menor que el área del círculo.” (página 6 alicia tocino sanchez 2018)

Área del polígono inscrito: Basándonos en la división o bisección propuesta por Arquímedes, se observa que los polígonos regulares inscritos se componen de triángulos isósceles como lo podemos observar en la figura 4.

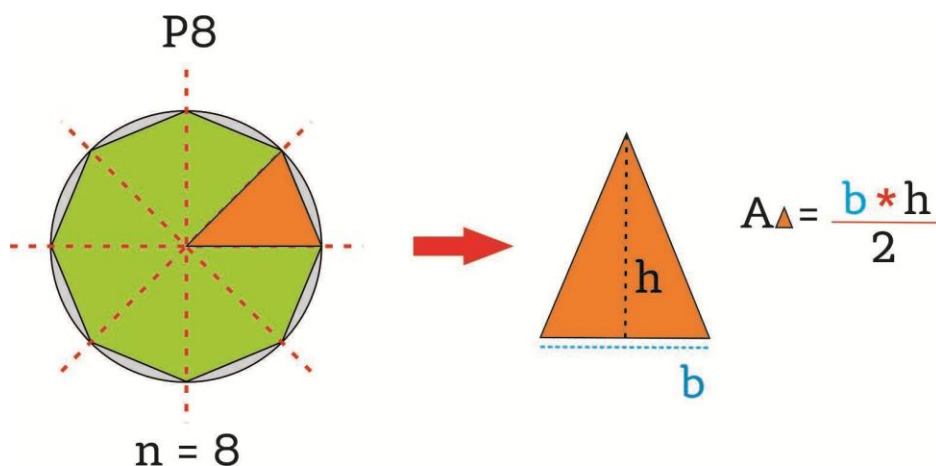
Figura 4. Triángulo isósceles en P8



Nota. Elaboración propia

Dado que el cálculo del área de un triángulo ($\text{Base} * \text{Altura} / 2$) era ya un conocimiento consolidado en su época, emplearemos este método para obtener el área total. Es decir, se calcula el área de un solo triángulo y se multiplica por el número total de lados (n) para así poder determinar con precisión el área de cualquier polígono, para este caso en P8 el octágono ($n = 8$) como se muestra en la figura 5.

Figura 5. Área del triángulo isósceles en P8



Nota. Elaboración propia

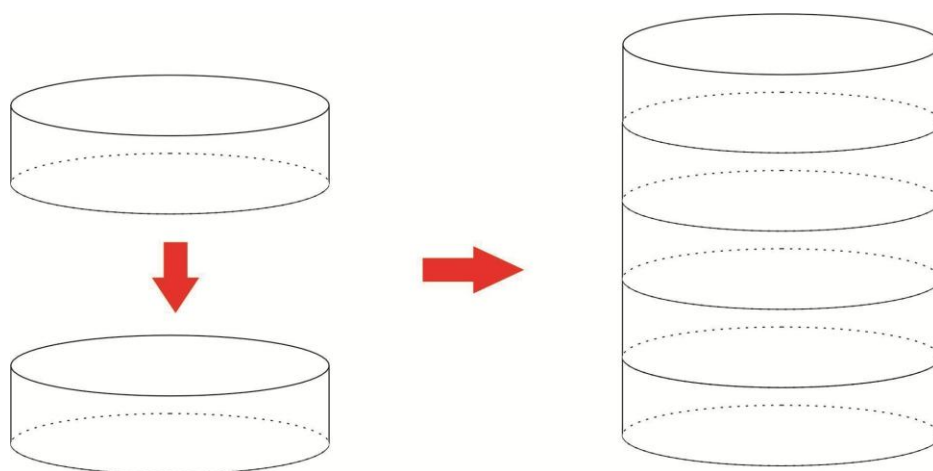
Definimos el área de uno de los triángulos isósceles que integran el octágono (P8) mediante la fórmula clásica: $\frac{b * h}{2}$. Para determinar el área total de P8, multiplicamos el área de dicho triángulo por el número de lados (n), obteniendo así la superficie completa del polígono regular.

Con fines demostrativos, este trabajo emplea polígonos de pocos lados para evidenciar el espacio 'vacío' entre la figura inscrita y la circunferencia. Siguiendo el método de Arquímedes, iniciaremos el proceso de división con un triángulo ($n = 3$) y, posteriormente, con un cuadrado ($n = 4$). La elaboración de este kit didáctico replica el procedimiento arquimediano variando el número de lados iniciales, lo que permite a los estudiantes contrastar las diferencias y comprender mejor la convergencia geométrica, como se ve en el [Anexo 1](#)

2.3.4. Volumen del cilindro con discos

Supongamos que se conoce el área de la base circular de un disco. Si se apilan varios discos iguales uno sobre otro, se obtiene un sólido que puede interpretarse como un cilindro. Para que esta interpretación sea consistente, cada disco debe pensarse con un mismo espesor. En ese caso, la altura del sólido se entiende como el resultado de multiplicar el número de discos apilados por el espesor de cada uno. Dado que cada disco representa una sección transversal con área constante, el volumen del cilindro puede aproximarse como la suma de los “pequeños volúmenes” aportados por cada disco. En términos geométricos, esto equivale a multiplicar el área de la base por la altura del sólido. Este razonamiento, además de ser intuitivo, permite introducir la idea de aproximación por secciones, que es precisamente la lógica que subyace a métodos como el de exhaustión.

Figura 6. Polígonos iniciales P_3 y P_4 inscritos en el círculo



Nota. Elaboración propia

2.4. Partes de un prisma y una pirámide.

Para abordar la historia del volumen del cono y su relación con el cilindro es esencial definir los elementos de los poliedros involucrados, ya que la relación de volumen depende estrictamente de la correspondencia entre sus partes. Como se ilustra en el [Anexo 2](#), un prisma se caracteriza por presentar un vértice, una cara lateral, una arista, una base y una altura.

De igual manera, es necesario definir los componentes de la pirámide, pues estos representan la base estructural sobre la cual se explica la relación luego. Ver [Anexo 2](#)

2.5. Historia del volumen del cono y su relación con el cilindro

El descubrimiento inicial de la relación entre el volumen del cono y el del cilindro se atribuye a Demócrito de Abdera, quien, según testimonios posteriores de Arquímedes, fue el primero en afirmar que el volumen de un cono es un tercio del volumen del cilindro que tiene su misma base y altura. No obstante, el propio Arquímedes señaló que Demócrito llegó a este resultado sin proporcionar una demostración rigurosa, basándose probablemente en una forma primitiva de atomismo geométrico o técnicas infinitesimales que consideraban al sólido como una suma de capas infinitamente delgadas (Boyer, 1986, p. 183).

Ahora bien, esta relación de volúmenes también se encuentra fundamentada en los postulados de Euclides, específicamente en el Libro XII de sus Elementos. En este libro se recopila y organiza el trabajo previo de Eudoxo de Cnido, quien fue el principal responsable de la demostración rigurosa de estas relaciones mediante el método de exhaución. Allí, la relación aparece inicialmente en el estudio de prismas y pirámides, particularmente en los sólidos de base triangular, donde se demuestra que un prisma triangular puede descomponerse en tres pirámides de igual volumen, lo que permite establecer

que la pirámide corresponde a un tercio del prisma con la misma base y altura. Posteriormente, este mismo razonamiento se extiende, mediante el método de exhaustión, a la comparación entre el cono y el cilindro, consolidando así la relación de un tercio como un resultado general dentro de la geometría de los sólidos, presentado por Euclides en una estructura lógica, rigurosa y sistemática. (Hernández Brito, 2020).

Teniendo en cuenta lo anterior, nos remitimos a la proposición 3.7, en la cual se presenta uno de los primeros resultados fundamentales: *todo prisma de base triangular puede dividirse en tres pirámides iguales entre sí, cada una con base triangular*. (Hernández Brito, 2020, p. 26).

A partir de esta proposición, se explicará detalladamente el proceso mediante el cual se realiza dicha división, así como la demostración que sustenta este resultado de manera intuitiva.

Contamos con un prisma de base triangular con un área de 11 unidades (ver prisma de base triangular en [Anexo 3](#))

Trazamos los segmentos AF, FC, y DC en nuestro prisma (ver prisma de base triangular con segmentos de corte el [Anexo 3](#))

Dibujamos la pirámide que tiene como base los puntos ABC y ápice F (ver primera pirámide en prisma de base triangular en [Anexo 3](#))

Dibujamos la pirámide que tiene como base los puntos CDF y ápice E (ver segunda y tercera pirámide de prisma de base triangular en [Anexo 3](#))

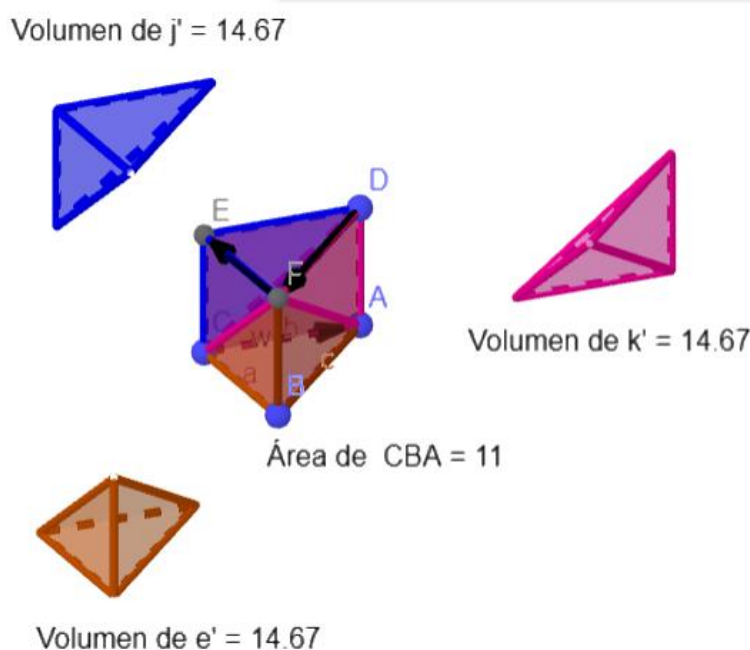
Dibujamos la última pirámide de base ADC con ápice F (ver segunda y tercera pirámide de prisma de base triangular en [Anexo 3](#))

Al separar cada una de las pirámides formadas, se obtienen tres pirámides de igual volumen. De este modo, se establece que la relación de volumen entre el prisma de base triangular y cada una de las

pirámides (también de base triangular) es de un tercio, ya que son necesarias tres pirámides para conformar completamente el prisma.

Así, se demuestra de manera intuitiva esta relación de volúmenes. En este caso, la construcción se realiza con GeoGebra y el volumen se verifica mediante la fórmula algebraica actual; no obstante, también es posible justificar la demostración a partir de la capacidad de cada una de las pirámides, de modo que la suma de sus volúmenes equivale al volumen del prisma.

Figura 6. Separación de pirámides de prisma de base triangular



Nota. Elaboración propia

A continuación, se presenta el enlace en GeoGebra para observar y detallar mejor la figura.

<https://www.geogebra.org/classic/wufrgcmr>

Ahora bien, para entender de forma más clara la relación entre el cono y el cilindro, Euclides, basándose en los planteamientos de Eudoxo de Cnido, establece en la Proposición 3.10 del Libro XII de los Elementos que "todo cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base y la misma altura."

Para justificar esta relación similar a la que existe entre un prisma y una pirámide se utiliza el método de agotamiento, que consiste en aproximar una figura curva mediante otras más simples.

En este caso, se inscriben dentro del cilindro prismas con base poligonal. Luego, se aumenta progresivamente el número de lados del polígono de la base, haciendo que el prisma se parezca cada vez más al cilindro. Así, la diferencia entre ambos volúmenes se va haciendo cada vez más pequeña.

Y si al aumentar el número de lados del prisma este se va aproximando cada vez más al cilindro, y además el prisma cumple la misma relación de volumen con la pirámide, entonces, al incrementar también progresivamente los lados de la base de la pirámide, esta se aproxima al cono.

De este modo, puede afirmarse que el cono y el cilindro conservan la misma proporcionalidad que existe entre la pirámide y el prisma; es decir, el cono resulta ser la tercera parte del cilindro cuando comparten la misma base y altura. (Hernández Brito, 2020, p. 29).

Para modelar esta demostración, además del prisma triangular, se realizará la partición en tres pirámides de un prisma de base cuadrada. De esta manera, siguiendo la idea de Eudoxo de Cnido, se aumenta el número de lados de la base del prisma y se reproduce la misma demostración, permitiendo una mejor aproximación y comprensión de la relación de volúmenes.

Tenemos un prisma de base cuadrada con un área en su base de 16 unidades (ver prisma de base cuadrada en [Anexo 4](#))

Dibujamos los segmentos FD, FA, FH, y FC (ver prisma de base cuadrada con segmentos de corte en [Anexo 4](#))

Dibujamos la pirámide que tiene como base los puntos ACHE y ápice F (ver Primera pirámide de prisma de base cuadrada en [Anexo 4](#))

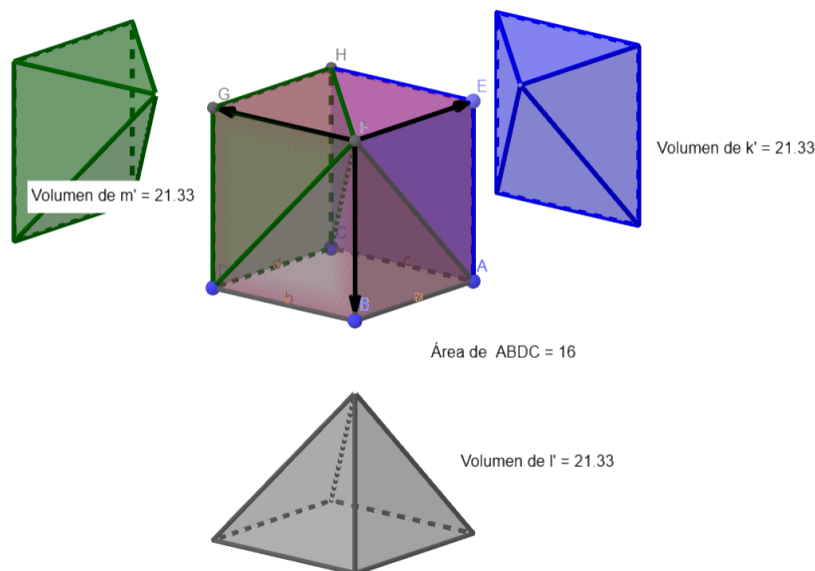
Dibujamos la pirámide que tiene como base los puntos DCAB y ápice F (ver Segunda y tercera pirámide de prisma de base cuadrada en [Anexo 4](#))

Dibujamos la pirámide que tiene como base los puntos HGDC y ápice F (ver Segunda y tercera pirámide de prisma de base cuadrada en [Anexo 4](#))

Al igual que en el ejemplo anterior con la pirámide de base triangular, en este prisma de base cuadrada, al realizar la partición se obtienen tres pirámides de igual volumen. De manera similar, el volumen se verificó mediante un cálculo algebraico con ayuda de la herramienta GeoGebra; sin embargo, esta relación también puede inferirse de forma intuitiva a partir del peso o la capacidad, sin necesidad de efectuar un cálculo formal.

Figura 21

Separación de pirámides de prisma de base cuadrada



Nota. Elaboración propia

A continuación, se presenta el enlace en GeoGebra para observar y detallar mejor la figura.

<https://www.geogebra.org/classic/cqnqndgg>

Para finalizar, la idea es construir prismas y pirámides equivalentes cuyos números de lados en la base vayan aumentando progresivamente, hasta aproximarse al cilindro y al cono. De este modo, se puede realizar la demostración a partir de la capacidad o el peso.

Este razonamiento debe cumplirse, ya que si la relación es válida para todo prisma y su pirámide correspondiente, y entendiendo que el cilindro puede interpretarse como un prisma con un número infinito de lados en la base, se concluye que dicha proporcionalidad también se mantiene para el cono y el cilindro.

2.6. Diámetro

De acuerdo con Larson y Hostetler (2010), el diámetro es el segmento de recta que une dos puntos de una circunferencia pasando por su centro. Esta medida corresponde a la longitud máxima que puede trazarse dentro de una circunferencia y equivale al doble del radio. Su expresión matemática es:

$$d = 2r$$

donde d representa el diámetro y el radio.

2.7. Perímetro

Según Baldor (2004), el perímetro o longitud de una circunferencia corresponde a la distancia total que rodea la figura circular. Esta magnitud puede calcularse mediante las expresiones:

$$P = 2\pi r$$

o de manera equivalente:

$$P = \pi d$$

donde P representa el perímetro, el radio, el diámetro y la constante matemática conocida como número pi.

2.8. Número pi (π)

Stewart (2018) define el número π como la razón constante entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Esta relación es la misma para todas las circunferencias, independientemente de su tamaño, y se expresa mediante la ecuación:

$$\pi = dP$$

El valor aproximado de esta constante es 3,1416; sin embargo, se trata de un número irracional, por lo que posee infinitas cifras decimales que no siguen un patrón periódico. Históricamente, Arquímedes realizó una de las primeras aproximaciones rigurosas de π mediante el uso de polígonos inscritos y circunscritos, aportando significativamente al desarrollo de la geometría.

2.9. Material concreto

2.9.1 Definición

El material concreto es cualquier objeto físico o herramienta tangible que los estudiantes pueden tocar, mover y manipular para facilitar su proceso de aprendizaje de una manera más dinámica y entretenida. Estos recursos, que pueden ser desde objetos sencillos del entorno hasta materiales diseñados específicamente por el docente según las necesidades de sus alumnos, sirven para estimular los sentidos y convertir ideas abstractas en experiencias reales que el niño puede explorar con sus propias manos. Al interactuar directamente con estos materiales, el alumno deja de ser un receptor pasivo y se convierte

en el protagonista de su educación, lo que le permite desarrollar su pensamiento lógico y descubrir por sí mismo soluciones a problemas que luego podrá aplicar en su vida diaria (Ruesta, et al., 2022).

2.9.2 Fundamentación teórica

La importancia del material concreto en la educación se fundamenta en diversas teorías del enfoque constructivista de autores como **Jean Piaget y Lev Vygotsky**, quienes destacan el papel activo del estudiante en la construcción del conocimiento a partir de su interacción con el entorno y con otros, las cuales sostienen que el estudiante debe ser el protagonista de su propio aprendizaje a través de la interacción con su entorno.

Jerome Bruner y la Metodología COPISI: Bruner es considerado uno de los principales impulsores del material concreto como base del aprendizaje por descubrimiento. Su teoría propone que el pensamiento evoluciona en tres niveles progresivos:

Representación activa: El aprendizaje mediante la acción directa con el material concreto

Representación icónica: El uso de dibujos o esquemas que representan lo manipulado

Representación simbólica: El uso de números y signos abstractos

Esta secuencia, conocida como COPISI (Concreto-Pictórico-Simbólico), asegura que el alumno construye el saber desde la experiencia física. (Ruesta, et al., 2022, p. 99).

Lev Vygotsky y la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP): Vygotsky destaca que el aprendizaje es un proceso social influenciado por el entorno y la interacción con otros. En este contexto, el material concreto es el medio que facilita la interacción entre pares y el docente (mediador), permitiendo que el estudiante relacione lo que ya sabe con los nuevos descubrimientos (Ruesta, et, 2022, p. 101).

David Ausubel y el Aprendizaje Significativo: Según Ausubel, para que el conocimiento no sea meramente memorístico o arbitrario, debe relacionarse con las estructuras cognitivas previas del

alumno. El material concreto sirve como un puente o apoyo pedagógico que dota de significado práctico y útil al nuevo saber, haciendo que el aprendizaje tenga sentido para la vida cotidiana del estudiante (Ruesta, et, 2022, p. 103).

2.10 Marco legislativo

El presente trabajo de grado se enmarca en los lineamientos establecidos por los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) de matemáticas en Colombia para grado noveno, particularmente en el DBA número 4, el cual plantea la necesidad de que los estudiantes identifiquen y utilicen relaciones entre el volumen y la capacidad de cuerpos redondos como el cilindro, el cono y la esfera, en contextos escolares y extraescolares. En coherencia con este referente, la propuesta del kit didáctico busca promover el desarrollo de habilidades como la estimación de capacidades, la construcción de cuerpos geométricos, la comparación de relaciones entre volumen y capacidad, y la comprensión de estos conceptos a partir de experiencias prácticas. Asimismo, se retoman situaciones problemáticas similares a las planteadas en el DBA, como la comparación de volúmenes entre diferentes sólidos, con el fin de que los estudiantes no solo apliquen procedimientos, sino que logren justificar, representar y explicar sus resultados. (Ministerio de Educación Nacional, 2016)

Adicionalmente, se anexa el DBA 4 de grado octavo enfocado en la descripción de atributos medibles de diferentes sólidos y explica relaciones entre ellos por medio del lenguaje algebraico, buscando la utilizar el lenguaje algebraico para representar el volumen de un prisma en función de sus aristas, realizando cada representación gráfica de su desarrollo en el plano, estima, calcula y compara volúmenes a partir de las relaciones entre las aristas de un prisma u otros sólidos, e interpretación de las expresiones algebraicas que representan el volumen y el área cuando sus dimensiones varían.

Y por último, el DBA 5 también del grado octavo enfatizando en utilizar y explicar diferentes estrategias para encontrar el volumen de objetos regulares e irregulares en la solución de problemas en las matemáticas y en otras ciencias.

2.10.1. Contenidos

Tabla 1.

Contenidos por DBA y aprendizajes priorizados

Objetivo DBA Grado Noveno 4: <i>“Identifica y utiliza relaciones entre el volumen y la capacidad de algunos cuerpos redondos (cilindro, cono y esfera) con referencia a las situaciones escolares y extraescolares.”</i>	
Objetivo DBA Grado Octavo 4: <i>“Describe atributos medibles de diferentes sólidos y explica relaciones entre ellos por medio del lenguaje algebraico”</i>	
Objetivo DBA Grado Octavo 5: <i>“Utiliza y explica diferentes estrategias para encontrar el volumen de objetos regulares e irregulares en la solución de problemas en las matemáticas y otras ciencias”</i>	
Componente: Espacial – Métrico	
Volumen	Relación experimental entre la capacidad de un objeto y su volumen físico. Justificación del uso de expresiones algebraicas y representaciones gráficas en contextos prácticos.
Área de un círculo	Justificación del uso de expresiones algebraicas y representaciones gráficas en contextos prácticos.
<i>Nota.</i> Elaboración propia adaptado de Derechos básicos de aprendizaje, DBA V2 MEN	

Capítulo III. METODOLOGÍA

La presente propuesta de trabajo de grado se orienta a la creación de un kit didáctico para la enseñanza del volumen en sólidos geométricos, específicamente el cilindro y el cono . Este kit estará diseñado a partir del uso de materiales concretos y manipulativos, con el propósito de que los estudiantes no solo observen, sino que construyan y experimentan directamente con los elementos que lo componen. Asimismo, la propuesta incorpora las prácticas de matemáticos antiguos, de modo que los estudiantes, a

través del armado y uso del kit, puedan recrear y resignificar estos procesos históricos, favoreciendo una comprensión más profunda de los conceptos.

3.1 Objetivos del kit

A fin de orientar el proceso de enseñanza sobre el volumen del cilindro, el cono y la esfera, la Tabla detalla los objetivos pedagógicos planteados a los cuales debe llegar la implementación del kit en el aula. En ella, se diferencian las metas de desempeño esperadas en el estudiante y las estrategias de gestión docente mediadas por el uso del kit didáctico.

Tabla 2.

Objetivos del kit para estudiante y docente

Objetivos para el estudiante	Objetivos para el docente
Reconocer las características y propiedades de los sólidos geométricos mediante la manipulación de materiales concretos.	Guiar el proceso de reconocimiento de las propiedades espaciales del cilindro y el cono mediante la manipulación directa del kit.
Construir modelos de cilindro, cono y esfera siguiendo las orientaciones de la cartilla instructiva del kit.	Orientar el uso de una cartilla instructiva que guíe la construcción y uso del kit didáctico.
Explorar el concepto de volumen mediante el llenado de sólidos con algún fluido para establecer relaciones de capacidad.	Orientar en la experimentación para ayudar a los estudiantes a relacionar volumen y capacidad mediante el uso de líquidos.
Interpretar el volumen a partir de procesos de disección de sólidos geométricos.	Explicar el proceso de disección de los sólidos y orientarlo para realizarse en los elementos del kit
Aproximarse al concepto de volumen y área mediante la recreación del método de exhaución.	Integrar el método de exhaución como estrategia didáctica para la construcción del concepto de volumen y orientarlo usando el kit.
Reconocer el origen histórico del concepto de volumen mediante la recreación de prácticas de matemáticos antiguos.	Dar a conocer la vida y obra de los matemáticos expuestos en el kit
Argumentar y justificar los resultados obtenidos en las actividades prácticas realizadas.	Evaluar la comprensión de los estudiantes a partir de sus explicaciones y resultados experimentales.
Aplicar el concepto de volumen en la resolución de situaciones problemáticas contextualizadas.	Orientar la aplicación del concepto de volumen en la resolución de situaciones problemáticas contextualizadas mediante el uso del kit didáctico, guiando a los estudiantes en la

interpretación de las actividades propuestas en la cartilla.

Nota. Elaboración propia

En conjunto, los objetivos planteados para los estudiantes evidencian que el kit didáctico está orientado a promover una comprensión integral y significativa del concepto de volumen en sólidos geométricos como el cilindro y el cono. A través de la manipulación de materiales, la experimentación, la reconstrucción de prácticas de matemáticos antiguos y el seguimiento de una cartilla instructiva, se busca que los estudiantes no solo adquieran conocimientos teóricos, sino que los construyan activamente, establezcan relaciones entre volumen y capacidad, y desarrollen habilidades de análisis, argumentación y resolución de problemas en contextos reales.

3.2. Enfoque, tipo y diseño de la investigación.

La presente investigación se desarrolla bajo un enfoque cualitativo, dado que se orienta a la comprensión, análisis y construcción de una propuesta didáctica que responde a una problemática educativa específica, relacionada con la enseñanza del volumen en sólidos (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018). Este enfoque permite abordar la problemática, considerando aspectos conceptuales, pedagógicos e históricos, sin centrarse en la medición de variables, sino en la interpretación y mejora de prácticas educativas (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018).

En cuanto al tipo de investigación, el estudio es de carácter descriptivo–propositivo. Es descriptivo, en la medida en que analiza las dificultades presentes en la enseñanza del volumen, así como las características de los enfoques didácticos utilizados en la escuela. Es propositivo, porque plantea el diseño de un recurso didáctico como alternativa para mejorar dichas prácticas, específicamente un kit manipulativo con enfoque histórico.

Ahora bien, el diseño metodológico para esta investigación se enmarca en la Investigación Basada en Diseño (IBD), la cual se caracteriza por la creación, análisis y mejora de intervenciones educativas en contextos reales o simulados, mediante ciclos iterativos de diseño, evaluación y refinamiento (Ann Brown, 1992; Allan Collins, 1992).

La elección de la IBD responde a la necesidad de abordar una problemática educativa desde una perspectiva que permita no solo comprenderla, sino también proponer soluciones concretas y fundamentadas.

A diferencia de otros enfoques experimentales o cuantitativos, la IBD se encamina a la producción de conocimiento útil para la práctica educativa, mediante el diseño y validación de intervenciones didácticas (Reeves, 2006). Es decir, que este enfoque reconoce que los problemas educativos son complejos y requieren procesos flexibles, creativos y reflexivos.

En la presente investigación, el interés no radica en medir el aprendizaje de los estudiantes, sino en diseñar y validar un recurso didáctico que favorezca la comprensión del volumen del cilindro y el cono. Por esta razón, la evaluación del recurso se realizará mediante juicio de expertos, siendo coherente con el enfoque.

Asimismo, la integración del enfoque histórico dentro del diseño responde a la necesidad de contextualizar el conocimiento matemático, reconociéndose como una construcción social y cultural (Ubiratan D'Ambrosio, 2001).

3.5.2. Kit didáctico

Propósito: Desarrollar y validar un kit didáctico manipulativo con enfoque histórico mediante un proceso sistemático de diseño, evaluación y refinamiento, enmarcado en la Investigación Basada en Diseño.

Etapas para el diseño y la validación del Kit:

- Analizar los fundamentos teóricos, didácticos e históricos del concepto de volumen.
- Establecer criterios de diseño para el desarrollo del recurso didáctico.
- Diseñar un kit manipulativo que integre el enfoque histórico en la enseñanza del volumen.
- Elaborar una cartilla didáctica con narrativa histórica.
- Diseñar una rúbrica para la validación del recurso.
- Evaluar el kit mediante juicio de expertos.
- Ajustar el recurso a partir de la retroalimentación obtenida.

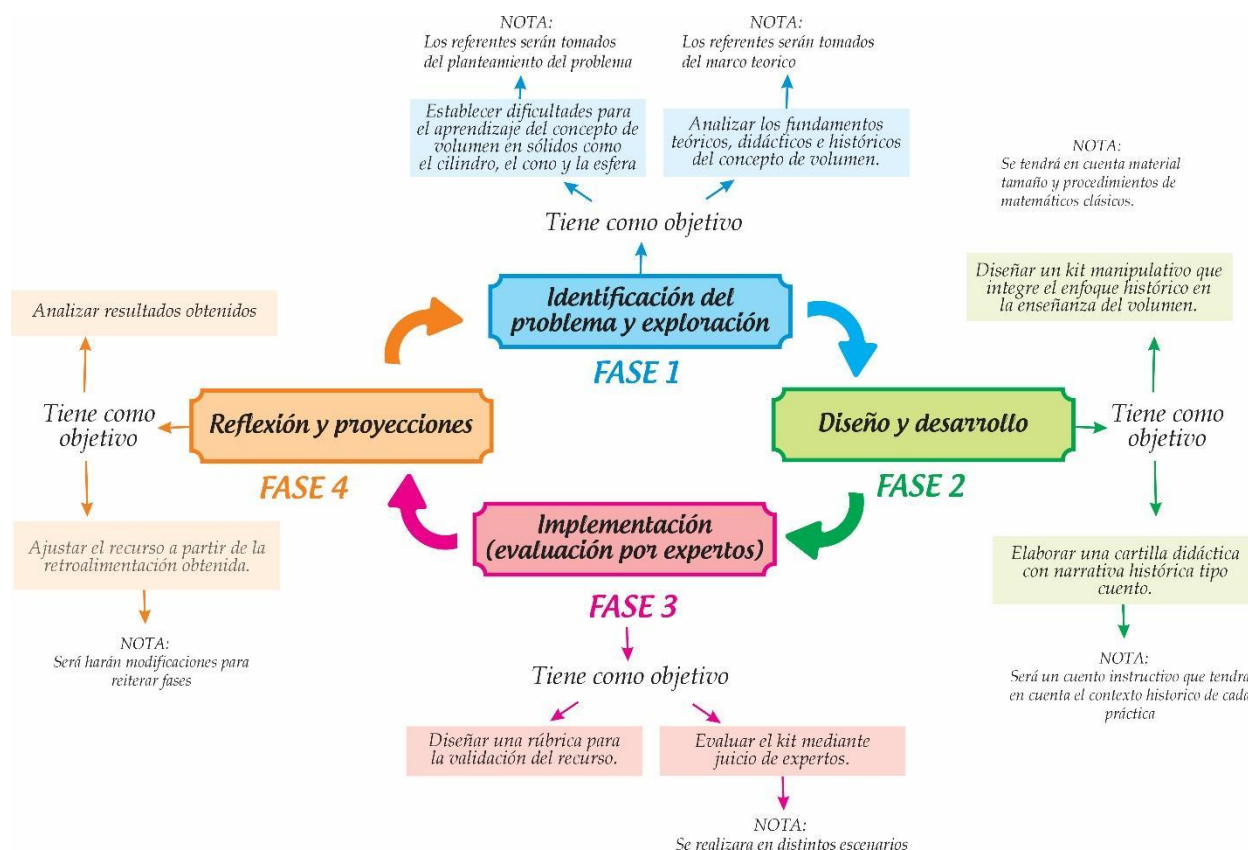
3.5.3 Integración del enfoque histórico en la metodología

Integrar un enfoque histórico dentro de la Investigación Basada en Diseño (IBD) en la creación del kit didáctico es importante porque la historia sirve como una guía para orientar tanto el diseño como la mejora de la enseñanza. Gracias a este enfoque, el kit no se limita a mostrar resultados finales o una serie de algoritmos, sino que permite recuperar cómo se construyeron originalmente los conceptos matemáticos, ayudando a que el estudiante entienda su sentido y no solo los memorice, además de ser un factor motivante en su aprendizaje (González, 2004)

3.5.6. Diseño metodológico: fases de la Investigación Basada en Diseño (gráfica)

Esta investigación adopta el Aprendizaje Basado en el Diseño (DBL) como marco metodológico, el cual integra principios de diseño y resolución de problemas a través de ciclos iterativos de creación y refinamiento. La metodología presentada en este trabajo se estructura en cuatro fases esenciales que son una modificación de las presentadas por (Mektrairat, W., Thaikam, W., 2026): identificación del problema y exploración, diseño y desarrollo, implementación y reflexión y proyecciones.

Figura 7. Fases de la metodología IBD



Nota. Elaboración propia adaptado de Mektrairat, W., & Thaikam, W., 2026

Ahora bien, es importante resaltar que la metodología de Investigación Basada en el Diseño (IBD) se caracteriza por ser iterativa y cíclica, ya que se sustenta en un proceso continuo de diseño, evaluación y mejora de soluciones pedagógicas. Este enfoque permite que las propuestas sean ajustadas progresivamente a partir de la reflexión y la retroalimentación obtenida durante su desarrollo. De esta manera, el carácter cíclico del IBL favorece un perfeccionamiento constante, orientado a reducir la distancia entre la planificación teórica y la práctica docente, garantizando así estrategias de enseñanza cada vez más pertinentes, precisas y acordes con el contexto educativo. (Mektrairat, W., & Thaikam, W., 2026)

3.5.7. Inclusión – Atención a la diversidad

El kit didáctico propuesto, al estar basado en materiales manipulativos y en la exploración directa de objetos tridimensionales, se convierte en una herramienta clave para favorecer la educación inclusiva. En particular, resulta oportuno para estudiantes con necesidades educativas diversas, como aquellos con dificultades cognitivas, ya que ofrece una vía alternativa de acceso al conocimiento mediante apoyos visuales y manipulativos que facilitan la comprensión de conceptos abstractos como el volumen en sólidos como el cilindro y el cono. El kit no solo puede mitigar barreras de aprendizaje, sino que también permite a los estudiantes expresar y construir ideas matemáticas a partir de la experiencia concreta.

La integración de elementos sensoriales y manipulativos capta la atención de los estudiantes, incrementa su motivación y transforma el proceso de aprendizaje en una experiencia más activa, dinámica y significativa, en la que el juego y la experimentación adquieren un papel fundamental. Por ende, el kit favorece un aprendizaje significativo permitiendo que los estudiantes establezcan relaciones directas entre la teoría matemática y su aplicación práctica, facilitando una mejor comprensión y apropiación de los conceptos para su uso en contextos reales.

La versatilidad del kit permite a los docentes adaptar su uso según las características, ritmos y estilos de aprendizaje de los estudiantes, respondiendo a la diversidad presente en el aula. Así que esto posibilita una enseñanza más flexible e individualizada, orientada a garantizar una experiencia educativa equitativa y accesible, en la que todos los estudiantes tengan la oportunidad de comprender y apropiarse del concepto de volumen desde sus propias capacidades y formas de aprender. (Sevil Vicente, E., 2025).

3.5.8. Temporización (cronograma de actividades).

A continuación, se presenta el cronograma de actividades para realización del presente trabajo:

Tabla 3.

Cronograma de actividades

FASE	ACTIVIDADES	TIEMPO
Identificación del problema y exploración	● Revisión de antecedentes sobre la enseñanza del volumen con material manipulativo. ● Identificación de dificultades en el aprendizaje del volumen. ● Exploración de prácticas históricas (exhaución, disección, comparación).	2 meses
Diseño y desarrollo	● Diseño del kit didáctico manipulativo. ● Recreación de prácticas de matemáticos clásicos en el diseño del kit ● Elaboración de prototipos (impresión 3D). ● Diseño de la cartilla didáctica tipo cuento.	3 meses
Implementación	● Construcción de la rúbrica de evaluación. ● Selección de expertos para la validación. ● Aplicación de la rúbrica al kit y la cartilla. ● Recolección de observaciones y sugerencias. ● Organización de la información obtenida.	1 mes
Revisión y proyecciones	● Análisis de la retroalimentación recibida. ● Ajustes al kit didáctico y la cartilla. ● Proyección de su uso en el aula. ● Elaboración de conclusiones y recomendaciones.	1 mes

Nota. Elaboración propia

3.5. FASE 1: Identificación del problema

3.5.1 Revisión de antecedentes comerciales sobre la enseñanza del volumen con material manipulativo.

En la revisión de recursos didácticos para la enseñanza del volumen se encontró que existen diversos materiales manipulativos diseñados para comprender las relaciones entre diferentes cuerpos geométricos. Entre ellos destacan los conjuntos de sólidos transparentes que pueden llenarse con agua, arena u otros materiales para comparar capacidades y volúmenes, así como algunos modelos que permiten comprobar experimentalmente que el volumen de un cono corresponde a la tercera parte del volumen de un cilindro con la misma base y altura. Ver ejemplo en [Anexo 5](#)

La mayoría de los materiales disponibles en el mercado se limitan a sólidos transparentes, recipientes para realizar mediciones y demostradores de relaciones de volumen. No se encontró evidencia de un kit didáctico que integre material manipulativo con una guía de aprendizaje estructurada, actividades de exploración y descubrimiento, y la reconstrucción de los métodos utilizados por matemáticos como Eudoxo o Arquímedes para llegar a estos resultados. Además, estos recursos no explican cómo se obtiene el área del círculo ni muestran la relación que existe entre esta y el cálculo del volumen del cilindro y del cono.

3.5.2 Dificultades sobre el aprendizaje del volumen: algunos resultados en la literatura y un diagnóstico aplicado

Safitri, et al., (2023) identifican obstáculos ontológicos, epistemológicos y didácticos que afectan el aprendizaje del volumen. Entre ellos se encuentran la confusión entre área y volumen, la dificultad para interpretar fórmulas y la aplicación mecánica de procedimientos sin comprender su significado.

Asimismo, diversos autores señalan una limitada capacidad de visualización tridimensional y de pensamiento espacial, lo que dificulta la comprensión de los cuerpos geométricos y de las magnitudes

involucradas en el cálculo del volumen (Meavilla y Oller, 2013). A esto se suma una enseñanza tradicional centrada en la memorización de fórmulas y la resolución repetitiva de ejercicios, lo que favorece aprendizajes descontextualizados y poco significativos (Ferrer, 2016, p. 84)

Adicionalmente, se evidencia una escasa utilización de recursos manipulativos y de estrategias que relacionen los conceptos geométricos con su desarrollo histórico, limitando la comprensión del origen de las fórmulas y la relación existente entre el área del círculo y el volumen de sólidos como el cilindro y el cono (Alemán, J. 2018,p.1) Estas dificultades justifican la necesidad de diseñar recursos didácticos que promuevan una comprensión más significativa del concepto de volumen.

Finalmente, para complementar los referentes teóricos relacionados con las dificultades en el aprendizaje del concepto de volumen, particularmente en sólidos como el cono y el cilindro, se realizó un diagnóstico con estudiantes de noveno grado de una institución educativa de carácter privada ubicada en Bogotá, D.C. Los resultados evidenciaron que gran parte de los estudiantes presenta dificultades para comprender y aplicar estos conceptos, confirmando las problemáticas señaladas en la literatura especializada. Esta situación resulta relevante si se considera que, de acuerdo con los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) establecidos por el Ministerio de Educación Nacional, los estudiantes de este nivel educativo trabajaron previamente competencias necesarias para comprender, interpretar y resolver situaciones relacionadas con el cálculo y la aplicación del volumen en cuerpos geométricos. Por tanto, los hallazgos del diagnóstico ponen de manifiesto la necesidad de fortalecer las estrategias de enseñanza empleadas para abordar estos contenidos.

3.5.3. Diagnóstico en estudiantes de grado noveno

El diagnóstico se llevó a cabo con estudiantes de un colegio. Como se evidencia (Ver [Anexo 6](#)), los estudiantes desarrollaron un taller en el que se les presentaban diferentes cuerpos geométricos junto con las fórmulas necesarias para calcular su volumen.

Cabe resaltar que estos estudiantes ya habían abordado previamente este tema mediante una metodología tradicional de enseñanza, en la cual los cuerpos geométricos eran presentados a través de imágenes contenidas en libros de texto o material impreso, se explicaba la fórmula correspondiente para hallar el volumen y posteriormente se resolvían diversos ejercicios aplicando dicho procedimiento.

Tema Evaluado: Área de la superficie y volumen del cilindro y el cono.

Los estudiantes demuestran una excelente disposición hacia el trabajo autónomo, el orden procedimental y el seguimiento de las estructuras algorítmicas básicas. Su organización espacial en el papel facilita el seguimiento de sus procesos cognitivos, por lo que demuestran un dominio operativo sobresaliente en la multiplicación manual de números decimales y enteros.

Sin embargo, se identifican barreras conceptuales en la interpretación de fórmulas geométricas, el uso de aproximaciones de constantes matemáticas (π) y la diferenciación de magnitudes lineales, superficiales y volumétricas.

Componentes y Hallazgos Específicos

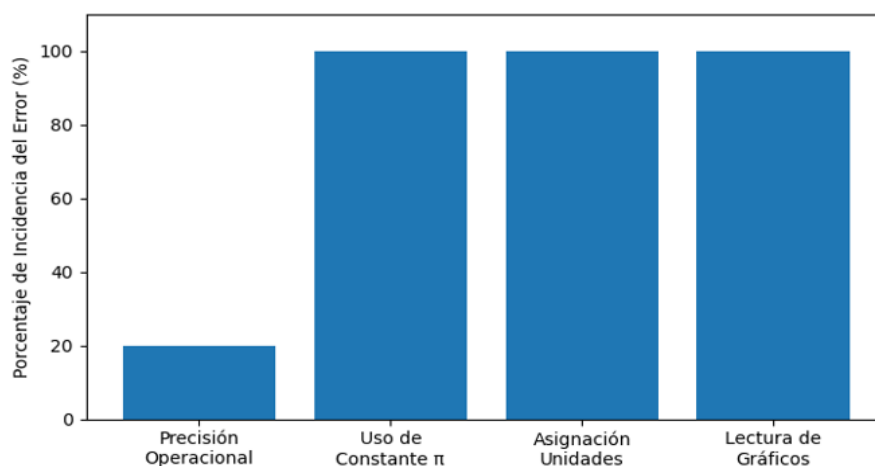
1. Componente Geométrico-Métrico (Comprensión Conceptual)

- **Aproximación de π :** Los estudiantes utilizan una aproximación errónea para la constante pi (π /aprox 3.1 en lugar de 3.14 o 3.1416). Esto altera todos los resultados numéricos finales.

Confusión entre Magnitudes y Unidades: Existe una desconexión en la asignación de unidades de medida: calcula áreas superficiales (magnitud bidimensional) y etiqueta los resultados en unidades cúbicas (cm^3) de manera regular (ej. en el cono y en el cilindro).

Figura 8.

Tipos de dificultades encontradas en diagnostico



Nota. Elaboración propia

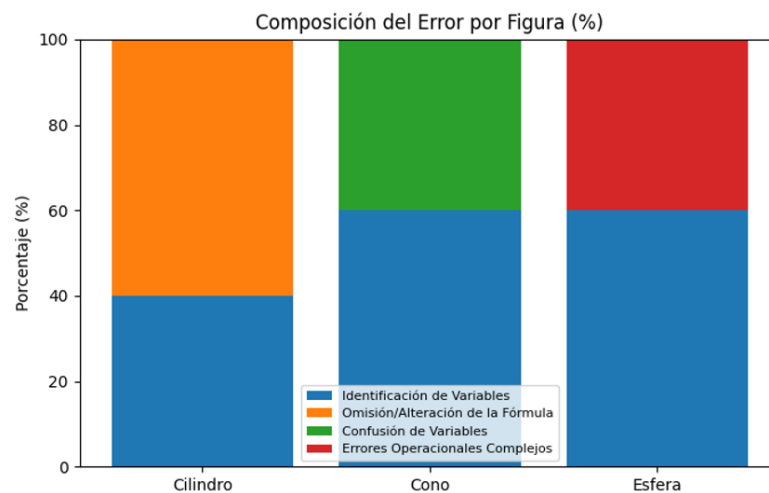
En el gráfico se puede evidenciar que la problemática detectada no es de carácter operativo, sino conceptual. La competencia de lo procedimental (Precisión Operacional) muestra un porcentaje de error mínimo del 20% en este caso, lo que demuestra que los estudiantes poseen en sus destrezas, herramientas mecánicas para multiplicar decimales y demás operaciones dentro de lo requerido. No obstante, el colapso del 100% de error en el Uso de Constante de (π), la asignación de unidades y la lectura de gráficos revela una desconexión semántica profunda. El error sistemático se produce al denominar y dar un significado físico y geométrico a los números, se confunden dimensiones espaciales (cm^2 por cm^3), se malinterpretan los componentes de la circunferencia (radio y diámetro) y se mecaniza incorrectamente el valor de π . Por tanto, desde esta primera parte, se denota que la acción

pedagógica debe migrar del entrenamiento algorítmico hacia el fortalecimiento del pensamiento métrico-espacial, desde la visualización.

Deficiencia en la Interpretación de Fórmulas:

- Cilindro:** Confunde la fórmula del área lateral con el área total, u omite los componentes de las bases. Además, plantea erróneamente la fórmula del área lateral como $\pi \times r \times h$ (omitiendo el factor multiplicativo 2, ya que la fórmula real es $2 \pi \times r \times h$).
- Cono:** En la fórmula del área curva ($\pi \times r \times l$), se observan algunas deficiencias en cuanto a reemplazar en el radio ($r = 12\text{cm}$) por la altura ($h = 16\text{cm}$) o viceversa en sus apuntes superiores, denotando confusión al identificar los elementos geométricos del cono (generatriz vs. altura).

Figura 9. Gráfica composición del error por figura



Nota. Elaboración propia

La evidencia estadística confirma que el error está en función del estímulo visual y analítico de cada sólido tridimensional. Mientras que en el Cilindro el obstáculo principal radica en la alteración estructural y omisión de componentes de la fórmula, en el Cono el error se desplaza hacia la confusión de variables (radio por altura). En consecuencia, se observa que la ineficacia de plantear secuencias didácticas genéricas. El diseño de esta investigación se enfoca en crear apoyos y recursos de aprendizaje que ayuden a los estudiantes a comprender las diferentes formas de representar figuras geométricas, teniendo en cuenta sus características visuales y espaciales. Por ende, esta es una de las principales razones para el desarrollo del kit didáctico.

Conclusiones

En la evaluación, los hallazgos demuestran cuantitativamente cómo un estudiante puede mostrar una caligrafía, orden y pulcritud procedimental impecables, proyectando un falso escenario de dominio (espejismo procedimental), mientras lleva un vacío estructural profundo respecto a qué está midiendo.

Aunque la prueba incluye imágenes del cilindro, el cono y la esfera para apoyar la comprensión, muchos estudiantes las observan únicamente como ilustraciones y no las utilizan para comprender los conceptos matemáticos. Esto muestra la necesidad de incorporar estrategias más dinámicas, como el uso de GeoGebra o materiales manipulables, que permitan a los estudiantes interactuar con las figuras y construir una comprensión más significativa de los conceptos geométricos.

3.5.4. Exploración de prácticas históricas (exhaución, disección, comparación).

Como parte de la fundamentación teórica de esta investigación, se realizó una exploración de algunas prácticas históricas empleadas por matemáticos de la antigüedad para la construcción y demostración de conceptos relacionados con el volumen del cilindro y el cono. Entre estas se destacan la exhaución, la

disección y la comparación, estrategias que permitieron establecer relaciones geométricas fundamentales mucho antes del desarrollo del cálculo moderno.

El método de exhaustión, atribuido principalmente a Eudoxo de Cnido y posteriormente perfeccionado por Arquímedes, consiste en aproximar figuras curvas mediante figuras poligonales cada vez más cercanas a la forma original, permitiendo establecer relaciones de área y volumen con un alto nivel de rigurosidad matemática (Hernández Brito, 2020). Este método es uno de los antecedentes más importantes para la comprensión de la relación entre el cono y el cilindro.

La disección se fundamenta en la división de un sólido en partes más simples para analizar sus propiedades y relaciones. En el marco teórico de esta investigación se retoma la proposición presentada en el Libro XII de los *Elementos* de Euclides, donde se demuestra que un prisma puede descomponerse en tres pirámides de igual volumen, estableciendo así que cada una corresponde a un tercio del prisma con la misma base y altura (Hernández Brito, 2020). Este razonamiento sirve como base para comprender posteriormente la relación existente entre el volumen del cono y el cilindro.

Asimismo, la comparación permite establecer equivalencias entre cuerpos geométricos a partir de la observación de sus capacidades y volúmenes. Esta práctica, usada por diversos matemáticos de la antigüedad, ayuda a entender intuitivamente las relaciones volumétricas mediante la experimentación y la contrastación de resultados, antes de llegar a una demostración formal (Boyer, 1986).

Estas prácticas históricas, descritas a profundidad en el marco teórico de esta investigación (Apartado 2.3 y 2.5), son incorporadas en el diseño del kit didáctico con el propósito de que los estudiantes puedan recrear y comprender la relación del concepto de volumen con prácticas que fueron utilizadas por matemáticos como Eudoxo, Euclides y Arquímedes para construir el concepto de volumen en el cilindro y cono. De esta manera, el kit integra la manipulación concreta con base en la reconstrucción histórica del conocimiento matemático, favoreciendo un aprendizaje más significativo y una comprensión más

profunda de las relaciones entre el área y el volumen en sólidos como el cilindro y el cono (González, 2004; Hernández Brito, 2020).

3.6. FASE 2: Diseño y desarrollo

3.6.1. Diseño del kit didáctico manipulativo con base en prácticas de matemáticas clásicos.

Teniendo en cuenta la exploración de las prácticas históricas de matemáticos clásicos y la información recopilada en el marco teórico, se diseñó del kit didáctico, el cual se estructuró en dos módulos.

3.6.1.1. Módulo 1: Del círculo al cilindro – Área y Volumen

El primer módulo está fundamentado en algunos de los principales aportes realizados por los matemáticos del Antiguo Egipto en relación con el estudio del área y el volumen y en los trabajos de Arquímedes con el estudio del área del círculo y volumen del cilindro. En este módulo se retoma la idea utilizada por los egipcios para comprender el volumen de cuerpos geométricos sencillos, quienes lo interpretaban como la acumulación de múltiples secciones o "rebanadas" de igual área dispuestas una sobre otra. A partir de este razonamiento, establecieron que el volumen de sólidos como prismas y cilindros podía obtenerse multiplicando el área de la base por la altura. El kit inicialmente muestra la idea con cuadrados apilados uno encima de otro formando así un prisma. Ver [Anexo 6](#) (Cuadrados apilados formando prisma) Estas ideas constituyen el punto de partida para que los estudiantes comprendan posteriormente cómo surgieron las relaciones de volumen en otros sólidos, como el cono y el cilindro, a través de los aportes y demostraciones desarrollados por Arquímedes quien aborda conceptos fundamentales como el área del círculo y el volumen del cilindro. La elección de estos temas responde a que, históricamente, la comprensión del volumen de otros sólidos redondos, como el cono y el cilindro, parten del conocimiento previo del área del círculo y del volumen del cilindro. Ahora bien, para la enseñanza del área del círculo se retoma el método de exhaustión

utilizado por Arquímedes, mediante el cual se aproxima el área de una figura curva a partir de polígonos inscritos con un número creciente de lados. Con este propósito, el kit incluye varios círculos que contienen polígonos inscritos de 3, 4, 6, 8 y 16 lados. A través de la manipulación de estos elementos, se busca que los estudiantes identifiquen que, a medida que aumenta el número de lados del polígono, este se aproxima cada vez más a la forma del círculo y así, los estudiantes pueden comprender de forma intuitiva cómo surgió la aproximación al área del círculo. Ver [Anexo 6](#) (Círculos con polígonos inscritos)

Ahora bien, una vez que los estudiantes comprenden cómo los polígonos inscritos permiten aproximarse al círculo, el siguiente paso es encontrar el área de esos polígonos. Para aproximarse al área del círculo, se debe conocer el área de los polígonos que se están utilizando para realizar dicha aproximación. Aquí, el kit aprovecha una característica de los polígonos regulares: todos pueden dividirse en un número finito de triángulos isósceles al unir el centro del polígono con cada uno de sus vértices. Por esta razón, los polígonos incluidos en los discos del kit ya cuentan con triángulos que los conforman, permitiendo que los estudiantes observen claramente esta relación.

Teniendo en cuenta que el cálculo del área del triángulo era un conocimiento conocido desde la época de Arquímedes y que además constituye un saber previo de los estudiantes, la actividad consiste en hallar primero el área de uno de los triángulos. Después, como todos los triángulos que forman el polígono son iguales, basta con multiplicar el área de uno de ellos por la cantidad total de triángulos para obtener el área completa del polígono. Ver [Anexo 6](#) (Triángulos isósceles en polígonos inscritos al círculo)

Para un tercer momento, la propuesta busca que los estudiantes comprendan cómo se obtiene la fórmula del área del círculo. Para seguir el razonamiento histórico de Arquímedes, implicaría continuar aumentando el número de lados de los polígonos inscritos hasta llegar a uno de 96 lados, ya que fue con este tipo de aproximación que logró obtener un valor muy cercano al área real del círculo. Sin embargo, diseñar y manipular un polígono con tal cantidad de lados resulta poco práctico dentro de una propuesta didáctica, además de convertirse en una actividad compleja y poco funcional para los estudiantes.

Por esta razón, el kit recurre a una estrategia más accesible que permite comprender experimentalmente los elementos que conforman la fórmula actual del área del círculo. Para ello, se trabaja inicialmente el concepto del número π (pi) mediante una actividad práctica con cuerdas. En esta experiencia, los estudiantes podrán comparar la longitud del diámetro con la longitud de la circunferencia, observando cuántas veces cabe el diámetro dentro del perímetro del círculo. A partir de esta exploración descubren que esta relación es aproximadamente constante y corresponde al número π . Ver [Anexo 6](#) (Diámetro y perímetro con cuerdas)

Luego, se aborda el concepto de radio. A través de los materiales del kit y de las explicaciones contenidas en la cartilla didáctica, los estudiantes podrán identificar que el radio corresponde a uno de los lados de los triángulos isósceles utilizados anteriormente para formar los polígonos inscritos.

Una vez que los estudiantes han comprendido los conceptos de radio y número π , el siguiente paso consiste en guiarlos hacia la construcción de la fórmula del área del círculo. Para ello, el kit propone una actividad manipulativa en la que los estudiantes vuelven a utilizar los triángulos isósceles que conforman los polígonos inscritos trabajados anteriormente. Allí reorganizan estos triángulos alternando sus orientaciones para formar un paralelogramo. Inicialmente, cuando el

polígono tiene pocos lados, la figura obtenida se asemeja a un romboide; sin embargo, a medida que aumenta el número de triángulos, la forma resultante se aproxima cada vez más a un rectángulo. Este proceso permite que los estudiantes observen cómo una figura curva, como el círculo, puede aproximarse con una figura cuya área es más sencilla de calcular. Ver [Anexo 7](#) (Reorganización de triángulos)

Al analizar el rectángulo formado, los estudiantes pueden apoyarse en un conocimiento que ya poseen: el cálculo del área de un rectángulo. Haciendo una comparativa guiada por la cartilla podrán identificar que su altura corresponde al radio del círculo, ya que uno de los lados de cada triángulo coincide con esta medida. Por otra parte, al observar la base de la figura formada, los estudiantes pueden medirla utilizando como referencia la longitud del radio. A través de esta comparación, podrán notar que dicha base equivale aproximadamente a π veces la medida del radio. Esto ocurre porque la base corresponde a la mitad de la circunferencia del círculo y, al relacionarla con el radio, se obtiene una longitud cercana a πr , y ya con estos datos podrán llegar al área del rectángulo, y por ende a una aproximación del área del círculo. Ver [Anexo 7](#) (Midiendo la base de los paralelogramos)

Finalmente, se retoma la idea inicial utilizada por los matemáticos griegos para comprender el volumen, basada en la acumulación de "rebanadas" o secciones de igual área colocadas una sobre otra. En otras palabras, cuando los estudiantes han construido la fórmula del área del círculo, están en capacidad de relacionar este conocimiento con la construcción del volumen del cilindro.

Para ello, el kit incluye una serie de discos circulares imantados que pueden apilarse verticalmente. Cada disco representa una sección circular del cilindro y, al colocarlos uno encima de otro, los estudiantes observan cómo se va formando progresivamente este sólido

geométrico. De esta manera, pueden visualizar que un cilindro no es más que la unión de múltiples discos iguales apilados a lo largo de una determinada altura.

A partir de esta experiencia manipulativa, los estudiantes pueden inferir que si cada una de estas "rebanadas" tiene el mismo valor de área y se repiten a lo largo de una altura determinada, entonces el volumen del cilindro puede obtenerse multiplicando el área de su base circular por la altura del sólido. Así, utilizando los discos del kit, los estudiantes tienen la posibilidad de construir cilindros de diferentes alturas, medir sus dimensiones y calcular su volumen aplicando la relación ($V = \text{Área del círculo} \times \text{altura}$). Ver [Anexo 7](#) (Midiendo la base de los paralelogramos)

3.6.1.2. Módulo 2: Del cilindro al cono – Su relación de volumen

El segundo módulo del kit está orientado a la comprensión de la relación existente entre el volumen del cilindro y el volumen del cono, relación que constituye la base para llegar a la fórmula utilizada actualmente para calcular el volumen de cualquier cono. Para ello, se retoman algunas de las prácticas históricas identificadas durante la investigación, especialmente los aportes de Eudoxo de Cnido, quien desarrolló demostraciones geométricas que permitieron establecer relaciones entre distintos sólidos.

Antes de abordar directamente el cono y el cilindro, Eudoxo partía del estudio de cuerpos más sencillos, como el prisma y la pirámide. Siguiendo esta idea, el kit propone inicialmente una actividad basada en la disección de prismas. Para ello, incluye un prisma de base triangular y un prisma de base cuadrada que pueden descomponerse en tres pirámides de igual volumen. Al manipular estas piezas, los estudiantes pueden observar que las tres pirámides reconstruyen completamente el prisma original, lo que les permite concluir que cada pirámide ocupa una tercera parte del volumen del prisma cuando comparten la misma base y altura. De esta

manera, se construye de forma concreta la relación de volumen 1:3 entre estos dos sólidos. Ver

[Anexo 8](#)

Una vez comprendida esta relación, se retoma el método de exhaustión utilizado por Eudoxo. Así como en el primer módulo se aproximó el círculo mediante polígonos de un número creciente de lados, en este caso se trabaja con prismas y pirámides cuyas bases tienen cada vez más lados. El kit incluye conjuntos de prismas y pirámides con bases de 3, 4, 6, 8 y 16 lados. Los modelos de 3 y 4 lados son los que permiten realizar la disección física en tres pirámides que corresponden a la imagen anterior, mientras que los demás ayudan a visualizar cómo, al aumentar el número de lados de la base, los prismas se asemejan cada vez más a un cilindro y las pirámides a un cono, y con el fin de conservar la relación de volumen entre los sólidos, los diseños se elaboraron teniendo en cuenta que los prismas y las pirámides compartieran la misma base y altura. Ver [Anexo 9](#).

A través de la observación y comparación de estos modelos, los estudiantes pueden inferir que, si la relación entre prisma y pirámide se mantiene constante mientras aumenta el número de lados, entonces dicha relación también debería cumplirse entre el cilindro y el cono. Para comprobar esta idea, el kit incorpora una demostración experimental por capacidad. Para ello, se dispone de un cilindro y un cono que tienen exactamente la misma base y la misma altura. Además, el cilindro está dividido visualmente en tres partes iguales.

La actividad consiste en llenar completamente el cono con arena y verter su contenido dentro del cilindro. Los estudiantes observan que el contenido del cono ocupa exactamente una de las tres partes en las que está dividido el cilindro. Al repetir el proceso tres veces, el cilindro se llena completamente, evidenciando de manera concreta que el volumen del cono corresponde a la

tercera parte del volumen del cilindro cuando ambos poseen la misma base y altura. Ver [Anexo 10](#)

Finalmente, después de todo este proceso de exploración, manipulación y razonamiento geométrico, los estudiantes ya cuentan con los conocimientos necesarios para deducir la fórmula del volumen del cono. Al haber comprendido previamente que el volumen de un cilindro se obtiene multiplicando el área de la base por la altura, y haber comprobado experimentalmente que el volumen del cono corresponde a la tercera parte del volumen de un cilindro con la misma base y altura, pueden establecer esta relación de manera natural.

3.6.2. Elaboración de prototipos (impresión 3D).

Para la elaboración de los prototipos se consideraron diversas alternativas. Inicialmente, se optó por el modelado manual utilizando porcelanacrón, un material moldeable de secado relativamente rápido. Sin embargo, esta opción presentó algunas dificultades, ya que las piezas no alcanzaban el nivel de precisión requerido y el proceso de modelado individual resultaba laborioso. Además, el tiempo necesario para la elaboración y secado de cada pieza hacía que el procedimiento fuera poco eficiente.

Por esta razón, se recurrió a una segunda alternativa: la impresión 3D. Aunque esta opción implica un mayor costo, ofrece acabados más precisos, uniformes y profesionales, además de reducir considerablemente el trabajo manual. Para la fabricación de las piezas mediante este método, fue necesario realizar previamente su modelado digital en un software de diseño tridimensional. En este caso, se utilizó el programa SolidWorks, en el cual se diseñaron todas las piezas del kit, incluyendo tanto las versiones iniciales como aquellas que fueron modificadas posteriormente a partir de las correcciones realizadas. Ver [Anexo 11](#)

Una vez finalizado el diseño de cada pieza, los archivos fueron exportados al software Bambu Studio, utilizado para la preparación de la impresión 3D. En este programa se llevaron a cabo los ajustes finales,

tales como la incorporación de soportes, el alisado de superficies y otras configuraciones necesarias para optimizar la calidad de impresión. Finalmente, las piezas fueron enviadas a la impresora 3D, seleccionando el filamento del color correspondiente para cada una de ellas, obteniendo así las piezas definitivas que conforman el kit didáctico. La creación de las piezas (funcionamiento de la impresora 3D) se puede evidenciar en el [Anexo 12](#)

3.6.3. Diseño de la cartilla didáctica

Para cada módulo se diseñó un conjunto de cartillas que actúan como complemento de las piezas manipulativas. Estas cartillas tienen la función de orientar al estudiante durante el desarrollo de las actividades, proporcionando instrucciones paso a paso sobre el uso de las piezas y planteando las situaciones, preguntas y ejercicios que deben resolverse a medida que se avanza en el proceso de aprendizaje.

Para el diseño de las cartillas se optó por desarrollar los contenidos mediante la estrategia de personificación didáctica, en la que los conceptos y personajes interactúan a través de diálogos se elige esta estrategia ya que se ha demostrado que el uso de diálogos donde se personifican personajes es una estrategia clave para abordar las dificultades de atención. Según Bedoya Cuellar, M. (2023)., la personificación permite que los niños se sumerjan en la narrativa, lo que desarrolla habilidades cognitivas al seguir tramas y reconocer personajes, fomentando así la atención sostenida y la capacidad de enfocarse en tareas específicas. Además, la concentración se activa más fácilmente cuando está ligada al interés y la motivación, elementos del juego de roles y la personificación didáctica. (Bedoya Cuellar, M., 2023).

En concordancia con el enfoque histórico adoptado para el recurso didáctico, los personajes principales del relato son los matemáticos de la antigüedad que contribuyeron al descubrimiento y demostración de las relaciones de volumen estudiadas, entre ellos Arquímedes y Eudoxo de Cnido. En el caso del

DISEÑO DE UN KIT DIDÁCTICO CON ENFOQUE HISTÓRICO PARA LA ENSEÑANZA DEL VOLUMEN DEL CILINDRO Y EL CONO EN GRADOS OCTAVO Y NOVENO.

69

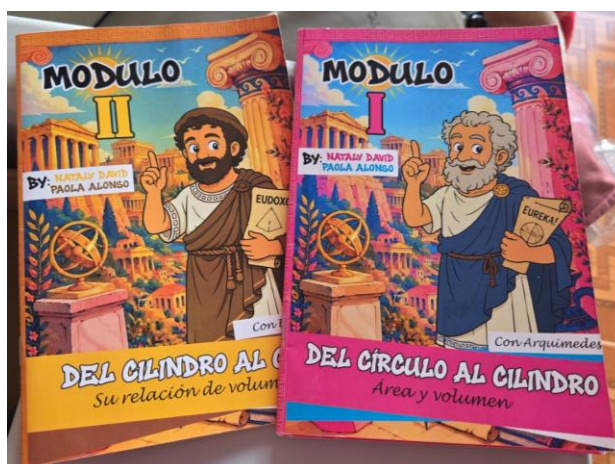
Módulo 1, el personaje central es Arquímedes, quien inicia el relato con una breve presentación de aspectos relevantes de su vida y de sus aportes a las matemáticas. A partir de esta introducción, se desarrolla de manera secuencial el proceso de demostración del área del círculo y del volumen del cilindro, siguiendo los momentos descritos en el apartado 3.6.1.

Una vez elaborado el texto bajo la modalidad de personificación didáctica, se procedió al diseño gráfico de la cartilla. Para ello, se tomaron como referencia elementos visuales característicos de la antigua Grecia, con el propósito de contextualizar al estudiante en la época en la que vivieron estos matemáticos. Asimismo, se incorporaron ilustraciones y representaciones gráficas que facilitan la comprensión de las actividades y orientan el uso adecuado de las piezas manipulativas.

El proceso de diagramación y diseño fue realizado mediante el software CorelDRAW, herramienta que permitió obtener una presentación visual de alta calidad y garantizar un acabado profesional en el producto final, correspondiente a las cartillas didácticas de cada módulo. Como se puede ver en

Finalmente se realiza la impresión de las cartillas en papel y cartulina propalcote para mayor durabilidad. **Para visualizar cartilla completa ver PDF adjunto.** A continuación, imagen de sus portadas:

Figura 10. Portada cartillas del kit



Nota. Elaboración propia

3.7. FASE 3: Implementación

3.7.1. Construcción de la rúbrica de evaluación.

Se realiza una rúbrica de evaluación teniendo en cuenta que el kit didáctico está compuesto por dos elementos principales: un kit de material manipulativo y una cartilla pedagógica se realiza , la rúbrica permitiendo evaluar de manera integral diferentes aspectos del kit, entre ellos la precisión de los contenidos matemáticos, la utilidad didáctica del kit, su adecuación al contexto escolar, el diseño y organización de los materiales, el desarrollo del razonamiento espacial, su aplicación en el aula y la calidad de la cartilla como guía de aprendizaje.

Además, la rúbrica cuenta también con una escala de valoración que transforma los puntajes obtenidos en categorías cualitativas que van desde "Deficiente" hasta "Excelente". Por último, incluye un espacio para que los evaluadores registren observaciones generales, destaquen fortalezas, identifiquen posibles dificultades y propongan sugerencias que contribuyan al mejoramiento del recurso didáctico para aplicar dichas correcciones iterativamente hasta obtener un modelo de kit de mejor calidad educativa y práctica. Ver rúbrica en [Anexo 14 Y 15](#).

3.7.2. Selección de expertos para la validación.

Aunque el kit didáctico no fue implementado directamente con estudiantes en esta investigación, se proyecta de manera general como una propuesta pertinente para estudiantes de grado noveno, dado que responde a los contenidos curriculares relacionados con el concepto de volumen del cilindro y el cono y a las características cognitivas propias de este nivel. En lugar de una aplicación en aula, se llevó a cabo un proceso de validación a cargo de un grupo de expertos de un colegio y una universidad, conformado por docentes de matemáticas y profesionales del área educativa, quienes evaluaron la pertinencia, claridad, funcionalidad y potencial didáctico del kit. A partir de sus apreciaciones, se

identificaron mejoras y ajustes, con el fin de fortalecer la propuesta y garantizar que el recurso sea adecuado, aplicable y efectivo en contextos reales de enseñanza.

3.7.2.1 Participantes del Proceso de Validación

Evaluadores primera fase - Colegio

- Laura Bejarano – Licenciada en Área de Ciencias
- Juan Pablo Hernández – Ingeniero en Área de Sistemas
- Suleidy Rodríguez – Licenciada en Área de Matemáticas
- Danilo – Licenciado en Área de Matemáticas

Evaluadores segunda fase - Universidad

- John Munar
- Yudi Andrea Ortiz
- Javier Mojica

3.7.3. Recolección de observaciones y sugerencias de evaluadores.

Ver observaciones presentadas por expertos del colegio CEDAM en [Anexo 16](#).

Ver observaciones presentadas por expertos de la universidad La Gran Colombia en [Anexo 17](#).

3.7.3.1 Resultados cuantitativos.

El kit didáctico alcanzó un puntaje entre 29 y 35 puntos en la rúbrica estandarizada de evaluación, ubicándose en la categoría de “Excelente”. Asimismo, se registró una aceptación alta y consistente en ambas fases de validación, tanto en la escolar como en la universitaria.

Tabla 4. *Consenso de valoraciones*

Categoría de Valoración	Nivel de Consenso
Excelente	85%
Bueno	70%

Nota. Elaboración propia

Los resultados obtenidos muestran una tendencia consistente hacia las categorías de “Bueno” y “Excelente” tanto en la evaluación escolar como en la universitaria. La evidencia recopilada indica que el recurso cumple con los criterios de calidad pedagógica, claridad conceptual, pertinencia curricular y aplicabilidad en contextos reales de enseñanza.

3.7.3.2 Resultados cualitativos.

Tabla 5. *Valoraciones por expertos del colegio CEDAM*

Aspecto	Hallazgos Principales
Material manipulativo	Facilita la visualización y comprensión progresiva de los sólidos
Atractivo visual	Diseño organizado, llamativo y motivador para los estudiantes.
Enfoque histórico	La inclusión de Arquímedes y Eudoxo fortalece la contextualización matemática.
Usabilidad	Los docentes destacaron la facilidad de manipulación y aplicación en el aula.

Nota. Elaboración propia

3.7.3.3 Dificultades Detectadas y Superadas

Tabla 6. Acciones Correctivas Implementadas

Dificultad Inicial	Acción Correctiva	Resultado
Inconsistencias en paginación	Reestructuración editorial	Mayor coherencia documental
Fórmulas con formatos diferentes	Estandarización matemática	Mayor claridad conceptual
Lenguaje poco inclusivo	Actualización narrativa	Mejor accesibilidad pedagógica
Aspectos físicos del material 3D	Ajustes de diseño y ensamblaje	Mayor funcionalidad y durabilidad

Nota. Elaboración propia

3.7.4. Recolección de observaciones y sugerencias de evaluadores de la universidad

3.7.4.2 Resultados cualitativos.

Tabla 7. Resultados cualitativos por parte de los expertos de la universidad

Aspecto	Hallazgos Principales
Material manipulativo	La estrategia propuesta facilita la visualización de los sólidos; sin embargo, se recomienda explorar una alternativa para la comprensión del área de sus bases sin recurrir al uso de discos. Debido a que estos continúan representando un sólido de poca altura, podrían generar dificultades en la interpretación de la figura bidimensional correspondiente. Por esta razón, sería más conveniente emplear una representación en 2D mediante otro recurso didáctico que permita evidenciar con mayor claridad la construcción y el análisis del área de las bases.

Atractivo visual	Diseño organizado, llamativo y motivador para los estudiantes. Sin embargo, se propone el uso de un recurso audiovisual en vez de la cartilla
Enfoque histórico	La inclusión de Arquímedes y Eudoxo fortalece la contextualización matemática.
Usabilidad	Los docentes destacaron la facilidad de manipulación y aplicación en el aula. Destacando su posible uso en otros niveles escolares

Nota. Elaboración propia

3.7.5. Organización de la información obtenida.

Durante la implementación de las cartillas y el kit, se realizan algunas observaciones y sugerencias de parte del colegio y de la universidad, las cuales son las siguientes:

La información recopilada mediante las rúbricas de evaluación aplicadas a los docentes expertos permitió identificar las principales fortalezas, dificultades y sugerencias relacionadas con el diseño del kit didáctico para la enseñanza del volumen. El análisis de las respuestas evidencia que los evaluadores coinciden en valorar positivamente el recurso, destacando principalmente su carácter manipulativo y su capacidad para facilitar la comprensión de conceptos asociados al área, el volumen y las dimensiones de los sólidos geométricos.

En cuanto a las dificultades observadas, la información recolectada muestra que los expertos identificaron aspectos relacionados con la presentación y los materiales del kit. Entre las observaciones más frecuentes se encuentran la necesidad de mejorar la calidad de algunos componentes, especialmente la cartilla de apoyo, así como mejorar la representación de dimensiones de algunos sólidos para favorecer una mayor claridad durante las actividades propuestas.

Respecto a las sugerencias de mejora, la información refleja una tendencia común hacia el fortalecimiento del diseño del kit. Los evaluadores recomendaron mejorar la calidad y resistencia de sus componentes e incorporar elementos visuales, como el uso de diferentes colores para distinguir las figuras bidimensionales de las tridimensionales, con el fin de facilitar su identificación y comprensión por parte de los estudiantes.

La recolección de la información permitió ver que las apreciaciones de los expertos convergen en reconocer la pertinencia del kit didáctico como recurso para la enseñanza del volumen, al tiempo que proporcionan recomendaciones orientadas a perfeccionar su diseño, funcionalidad y presentación. Estas observaciones constituyen un insumo importante para la implementación de ajustes que fortalezcan la calidad del material antes de su aplicación con los estudiantes.

3.8. FASE 4: Revisión y Proyecciones

3.8.1. Análisis de la retroalimentación recibida.

El proyecto del kit didáctico destaca con solidez en su dimensión táctil y el diseño de la experiencia de aprendizaje. Los evaluadores coinciden de forma unánime en que el material manipulativo tangible posee un impacto visual sumamente atractivo, caracterizado por una selección adecuada de figuras de colores y dimensiones físicas que no solo captaron la atención del estudiante, sino que facilitan la transición del pensamiento abstracto al concreto. Al permitir una interacción física directa con los sólidos, el kit llega a ser un puente cognitivo ideal para que los alumnos exploren dinámicamente conceptos complejos y tradicionalmente aburridos en la dimensional, como el área y el volumen, mejorando la retención y comprensión a largo plazo.

Desde la perspectiva del diseño curricular y el rigor formal, el proyecto demuestra una buena alineación con los requerimientos académicos establecidos (DBA y aprendizajes priorizados) para los grados octavo y noveno, aunque se aclaró que podría implementarse en grados inferiores teniendo también una buena efectividad. Se valoró positivamente que los contenidos matemáticos integrados son precisos, correctos y que la propuesta metodológica esté fundamentada en la deducción de fórmulas a través de la experimentación práctica y el empirismo guiado. Además, la inclusión de una contextualización histórica no se percibe como un añadido decorativo, sino como un elemento de alto valor cultural que enriquece la clase, dotando de sentido humano y evolución científica a los conceptos matemáticos, lo cual contribuye a alcanzar los logros esperados.

A pesar del éxito en el diseño de los componentes manipulativos, el proyecto enfrenta desafíos en su diseño, articulación editorial y la coherencia del contenido. El punto de mayor vulnerabilidad en la primera fase realizada en el colegio bilingüe CEDAM está en la estructura física y organizativa de las cartillas o guías didácticas. Los expertos señalan una notable falta de control editorial: los textos presentan problemas de redacción que afectan la claridad pedagógica, posteriormente con esas indicaciones dadas se modificó la parte instruccional de las cartillas del kit, de esta manera añadiendo índice y demás

Para robustecer la propuesta, las recomendaciones se dividen en mejoras de fondo y forma. En el aspecto de diseño y utilidad, se sugiere enfáticamente estandarizar las fórmulas matemáticas, añadir paginación y reubicar la ficha técnica e introducción a las primeras páginas. En el aspecto físico, es fundamental incluir los materiales faltantes (arena y prisma) para que el kit sea viable, y se propone añadir una diferenciación de color en una de las caras de los sólidos para clarificar las proyecciones

bidimensionales, así como anexar una cuerda con marcas o un medidor de radio para dar mayor precisión matemática a los ejercicios.

Ahora bien, en la implementación realizada en su segunda fase en la universidad en el ámbito metodológico y técnico, se detectaron inconsistencias que pueden generar confusión cognitiva en el aula. Se observa un conflicto de diseño conceptual cuando el material, siendo tridimensional por naturaleza, es utilizado en la práctica para representar o trabajar figuras puramente bidimensionales sin la debida aclaración. También, se sugirió considerar la creación de un recurso audiovisual como alternativa o complemento a la cartilla pedagógica. Esta propuesta se identifica como una oportunidad de mejora para futuras etapas del proyecto y podría desarrollarse en una segunda fase de la investigación, en el marco de una futura tesis de maestría, con el propósito de fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje mediante el uso de recursos digitales e interactivos.

3.8.2. Ajustes al Kit didáctico y la cartilla

Durante el proceso de desarrollo se realizaron diversos ajustes al kit didáctico. Estas modificaciones no solo involucraron las piezas manipulativas, sino también el contenido de las cartillas, las actividades propuestas y los aspectos relacionados con el diseño general del recurso. Tanto las piezas como las cartillas fueron revisadas y mejoradas con el propósito de garantizar su funcionalidad y practicidad, facilitar su uso por parte de los estudiantes, y favorecer una experiencia de aprendizaje más práctica, clara y accesible.

Las primeras modificaciones se realizaron a partir de la prueba y manipulación de los primeros prototipos. Durante este proceso se analizó si las piezas eran prácticas, funcionales y fáciles de usar y fabricar. Como resultado de esta revisión, se identificaron algunos aspectos por mejorar y se realizaron las siguientes correcciones:

Correcciones en los discos:

Ver [Anexo 18](#). Este cambio se realizó debido a que la rosca de los discos no funcionó adecuadamente después de la impresión 3D. Al enroscar y desenroscar las piezas de manera repetida, la rosca comenzaba a desgastarse volviéndose totalmente lisa y los discos no se unían correctamente. Por esta razón, se optó por rediseñar los discos incorporando imanes, lo que permitió que las piezas se mantuvieran unidas de forma segura facilitando su ensamblaje y manipulación.

Corrección en el prisma de base cuadrada:

Ver [Anexo 18](#). Al realizar el primer prototipo del prisma de base cuadrada diseccionado en pirámides de base cuadrada con el mismo volumen notamos que el prisma de base cuadrada era muy grande con respecto a los demás prismas y esto se dio ya que se le dieron las mismas medidas en base altura y ancho quedando un cubo perfecto pero la base cuadrada no quedo inscrito al círculo con el que se inició a diseñar el módulo sino circunscrito y por ende al comparar con los demás se veía muy desproporcional y grande entonces se decidió modificar su base cosa de que quedara inscrito en el círculo sin modificar su altura ya que todos los demás prismas tenían esa altura entonces nos quedó un prisma cuadrado alargado hacia arriba sin ser un cubo perfecto con esto habríamos solucionado el problema de proporcionalidad con respecto a los demás prismas sin embargo surgió otro inconveniente y es que al no ser un cubo con es decir un prisma cuadrado con todas las medidas iguales las pirámides que conforman el prisma no se ven iguales haciéndose menos evidente la relación que hay de que tres pirámides conforman un prisma y genero la duda si realmente estas pirámides tenían el mismo volumen pero luego de medir y hacer una relación algebraica pudimos deducir que efectivamente si aunque cambie su forma tienen el mismo volumen la demostración algebraica que se realizo fue la siguiente: |

Correcciones en la cartilla:

Teniendo en cuenta las recomendaciones obtenidas durante la primera evaluación por expertos, realizada con docentes de educación básica y media, se efectuaron las siguientes modificaciones en las cartillas didácticas:

- Se realizó el cambio del tipo de fuente para mejorar la legibilidad y se agregó marca de agua para darle identidad al material. Ver [Anexo 19](#) (cambio tipo de fuente)
- Se incorporó un índice con el fin de facilitar la organización y consulta de los contenidos. Ver [Anexo 19](#) (se incorpora índice).
- Se agregó la numeración de páginas para optimizar la navegación dentro de cada módulo. Ver [Anexo 20](#) (se incorpora numeración).
- Se añadió el nombre de la autora en la portada. Ver [Anexo 20](#) (se incorpora nombre de autora).
- Se reorganizó la información de la contraportada. Los DBA, objetivos, tipo de diálogo, autoras y demás datos descriptivos fueron trasladados a la primera página interna. En la contraportada se incluyó un breve resumen del contenido y propósito de cada módulo. Ver [Anexo 21](#)
- Se sustituyó la expresión “joven aprendiz o explorador” por “aprendiz matemático”, con el propósito de emplear un lenguaje más inclusivo para toda la población estudiantil. Ver [Anexo 22](#) (cambio por lenguaje más inclusivo).
- Se incorporaron imágenes más específicas y contextualizadas para la actividad de cuerdas, con el fin de favorecer la comprensión de las instrucciones y el desarrollo de la actividad. Ver [Anexo 22](#) (cambio en actividad de cuerdas).

3.8.3. Proyección de su uso en el aula.

Aunque el kit didáctico fue diseñado inicialmente para la enseñanza del volumen en el cilindro y el cono, abordando los DBA de grados octavo y noveno, durante su proceso de elaboración se evidenció que sus posibilidades de uso van más allá de este objetivo. Gracias a que está compuesto por materiales visuales

y manipulativos, puede adaptarse a diferentes grados escolares y utilizarse para abordar diversos conceptos geométricos de acuerdo con el nivel de los estudiantes.

El carácter concreto del material permite que los estudiantes comprendan conceptos matemáticos a través de la observación y la manipulación de los modelos, facilitando la construcción de conocimientos de una manera más significativa. Por esta razón, el kit no solo resulta útil para la enseñanza del volumen, sino también para el desarrollo de otros aprendizajes relacionados con la geometría. Por ejemplo, puede emplearse en grados inferiores para trabajar contenidos como el reconocimiento y clasificación de figuras y cuerpos geométricos, la identificación de sus características, la comparación de formas y tamaños, las nociones de capacidad y la orientación espacial, entre otros.

3.8.4. Elaboración de conclusiones y recomendaciones.

3.8.4.1. Conclusiones de la Fase de Implementación Escolar (Colegio)

La implementación del kit didáctico en el contexto escolar permitió evidenciar su valor como herramienta práctica para el aula. Los docentes evaluadores de las áreas de Ciencias, Sistemas y Matemáticas coincidieron en que el material manipulativo facilita la visualización progresiva del cilindro y el cono, favoreciendo así una comprensión más concreta de un concepto que suele resultar abstracto para los estudiantes. El diseño visual del kit fue valorado como organizado y motivador, lo cual incrementó el interés y la participación de los estudiantes durante las sesiones de clase.

Asimismo, esta fase permitió identificar oportunidades de mejora de carácter operativo y editorial, tales como inconsistencias en la paginación de las cartillas, variaciones en el formato de las fórmulas y aspectos de lenguaje inclusivo. Estas observaciones, surgidas directamente de la experiencia en el aula, fueron fundamentales para orientar la fase posterior de refinamiento. En términos generales,

la fase escolar concluye con una alta aceptación del recurso, centrada principalmente en su uso, su facilidad de manipulación y su capacidad para motivar el aprendizaje del estudiante en un contexto real de enseñanza.

3.8.4.2. Conclusiones de la Fase de Validación Universitaria

La validación realizada por los expertos universitarios John Munar, Yudi Andrea Ortiz, Javier Mojica, Álvaro Camargo y John Gómez Triana se orientó hacia el rigor académico y la fundamentación pedagógica del kit, más allá de su aplicabilidad inmediata en el aula. Este grupo evaluador confirmó la precisión matemática y conceptual del material, así como la coherencia de la propuesta con los objetivos de aprendizaje del volumen en el cilindro y cono.

De manera particular, los expertos destacaron la solidez de la estructura didáctica de las cartillas y su fundamentación teórica, incluyendo el valor agregado de la narrativa histórica asociada a Arquímedes y Eudoxo como estrategia de contextualización matemática. El resultado de esta fase fue una validación académica favorable, que respalda al kit no solo como un recurso funcional, sino como una propuesta pedagógicamente rigurosa y metodológicamente coherente.

CAPÍTULO IV - CONCLUSIONES

Se diseñó y validó un kit didáctico manipulativo con enfoque histórico para la enseñanza del volumen del cilindro y el cono. Además, durante su elaboración se identificó que este recurso podría adaptarse a otros temas de geometría y a diferentes niveles educativos, convirtiéndose en una herramienta didáctica versátil que puede enriquecer los procesos de enseñanza de las matemáticas.

1. Se diseñó un kit didáctico manipulativo para estudiantes de grado octavo y noveno de educación básica, que combina materiales concretos, actividades prácticas y elementos

históricos. Este recurso podría permitir que los estudiantes exploren, construyan y comprendan las relaciones de volumen entre el cilindro y el cono a través de la experimentación y la observación directa según evaluación por expertos.

2. La evaluación realizada por los expertos mostró que el kit es coherente con los objetivos propuestos y que posee un alto potencial para apoyar la enseñanza del volumen del cilindro y el cono. Además, destacaron que el uso de materiales manipulativos y actividades basadas en la historia de las matemáticas puede favorecer una mejor comprensión de los conceptos trabajados.
3. Las observaciones y recomendaciones realizadas por los expertos permitieron mejorar tanto el kit como las cartillas didácticas. Los ajustes realizados contribuyeron a fortalecer la organización de los contenidos, la claridad de las instrucciones y la presentación general del material, obteniendo una versión más completa y adecuada para su uso en el aula.
4. La revisión de los fundamentos conceptuales, didácticos e históricos permitió comprender mejor cómo se ha construido el concepto de volumen a lo largo de la historia y cómo podría enseñarse de una manera más significativa. Los aportes de matemáticos como Arquímedes, Euclides, Eudoxo y Demócrito sirvieron como base fundamental para el diseño de las actividades y materiales incluidos en el kit didáctico.
5. Los resultados obtenidos proporcionan una respuesta positiva a la pregunta de investigación y por expansión al problema que se planteó al inicio de este estudio.

La elaboración de este kit didáctico busca que los estudiantes tengan un aprendizaje más significativo, especialmente al trabajar conceptos como el volumen. Su principal diferencia frente a otros recursos es que permite que los estudiantes puedan manipular y observar directamente los

cuerpos geométricos, lo que probablemente podría facilitar la comprensión de conceptos que pueden resultar difíciles de imaginar.

Aunque existen herramientas digitales como GeoGebra, la cual permiten manipular las figuras, esta siguen siendo representaciones que se observan en una pantalla. En cambio, con el kit los estudiantes pueden interactuar físicamente con los objetos y reconocer de una manera más clara sus características tridimensionales.

Además, la cartilla que acompaña el kit no funciona únicamente como un instructivo. Los personajes y la historia que se presentan en ella buscan hacer las actividades más interesantes y darle un contexto al aprendizaje. Sin embargo, como una posible mejora, se podría transformar parte de la cartilla en un recurso audiovisual, como videos o animaciones, para hacerla más dinámica y llamativa para los estudiantes. De esta manera, se mantendría la información de la cartilla, pero se presentaría de una forma que pueda resultar más atractiva para ellos.

CAPÍTULO V - REFERENCIAS

- Meavilla Seguí, V., & Oller Marcén, A. M. (2013). Ejemplos de visualización y uso de materiales manipulativos en textos matemáticos antiguos. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 82, 89–100. <https://www.sinewton.org/numeros>
- Ferrer Puigdellívol, M. (2016). ¿Qué percepción tienen los estudiantes de la relación entre el área y el volumen de figuras geométricas? *Épsilon: Revista de Educación Matemática*, 33(2), 79–86.
- Safitri, G., Darhim, & Dasari, D. (2023). Student's obstacles in learning surface area and volume of a rectangular prism related to mathematical representation ability. *Al-Jabar: Jurnal*

Pendidikan Matematika, 14(1), 55–69. <https://ejournal.radenintan.ac.id/index.php/al-jabar/article/view/15371>

- Abrate, R. S., Delgado, G. I., & Pochulu, M. D. (s.f.). Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*. <https://rieoei.org>
- Barrantes López, M., & Zapata Esteves, M. A. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo Abierto, Revista de Educación*, 27(1), 55–71. <https://revista-campoabierto.unex.es/index.php/campoabierto/article/view/1985>
- Pelcastre-Benítez, Y., & Cáceres-Mesa, M. L. (2025). Las estrategias didácticas del docente y su relación con el aprendizaje significativo en Matemáticas. *Revista UGC*, 3(1), 156–165.
- Rodríguez Palmero, M. L. (2004). La teoría del aprendizaje significativo. En A. J. Cañas, J. D. Novak & F. M. González (Eds.), *Concept maps: Theory, methodology, technology. Proceedings of the First International Conference on Concept Mapping*. Universidad Pública de Navarra.
- González Urbaneja, P. M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *SUMA*, (45), 17–28.
- Ausubel, D. P. (1976). Psicología educativa: Un punto de vista cognoscitivo. *Trillas*.
- Napa Vilela, Z.-A. (2023). Los recursos didácticos como apoyo en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes. *MQRInvestigar*, 7(3), 4078–4105. <https://doi.org/10.56048/MQR20225.7.3.2023.4078-4105>.
- Montes, M. Á., Flores-Medrano, E., Carmona, E., & Huitrado, J. L. (2014). Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. ResearchGate. <https://doi.org/10.13140/2.1.3107.4246>

- Hernandez V, Rios M., (2004). Historia y Educación Matemática. Formación del profesorado e investigación en educación matemática, volumen VI, 189-216
- Salinas, J. (2010). El uso de la historia de las matemáticas para el aprendizaje de la geometría en alumnos del bachillerato. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 557–568). SEIEM.
- Henao López, V. (2020). GeoGebra como mediador didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de los cuerpos redondos: una visión desde la teoría de las situaciones didácticas en la Institución Educativa Viboral. *Repositorio Institucional UCM*.
<https://repositorio.ucm.edu.co/handle/10839/3037>
- Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, matemáticas y realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), 91–116.
<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=274032530006>
- Garreta Domingo, M., & Mor Pera, E. (2010). Diseño centrado en el usuario. *Universitat Oberta de Catalunya*. <https://cv.uoc.edu>
- Real Academia Española. (2025). Diccionario de la lengua española (23.ª ed., versión 23.8 en línea). Recuperado el 24 Julio del 2025, de <https://dle.rae.es>
- López Santana, M. A. (2023). Sólidos de revolución: Una forma de entender la integral. *Revista MICA*, 4(8), 81–88. ISSN 2594-1933.
- Stewart, J. (2015). Calculus (8.ª ed.). Cengage Learning.
- Carrión López, P. (2008). La medida del círculo de Arquímedes: Figura y texto de la proposición 1. CFC (G): Estudios griegos e indoeuropeos, 65-88

- Tocino Sánchez, A. (2018). El método de Arquímedes para calcular áreas y volúmenes: La historia de las Matemáticas como herramienta didáctica [Trabajo de Fin de Máster, Universidad Nacional de Educación a Distancia]
- Ruesta Quiroz, R. G., y Gejaño Ramos, C. V. (2022). Importancia del material concreto en el aprendizaje. Revista Franz Tamayo, 4(9), 94-108. <http://www.revistafranztamayo.org>
- Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje: Matemáticas (grado 9º)*. Ministerio de Educación Nacional de Colombia. <https://www.mineduccion.gov.co>
- Hernández Brito, L. M. (2020). Euclides: Libros XI-XII-XIII [Trabajo de Fin de Grado, Universidad de La Laguna]
- Evolución Histórica de la Geometría Plana. (2025). Innova Science Journal. <https://innovasciencejournal.omeditorial.com/index.php/home/article/download/143/311/645>
- García, M., & López, J. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. SciELO Colombia. http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0121-38142012000200001
- GeoGebra. (2020). GEOMETRÍA DEL ESPACIO 7. Unidad didáctica. <https://www.geogebra.org/m/xasuxn8w>
- Godino, J. D. (2013). La ingeniería didáctica como investigación basada en diseño. Universidad de Granada. http://www.ugr.es/~fqm126/documentos/JDGodino_2013_Ingenieria_didactica.pdf
- Hernández Sampieri, R., et al. (2021). Validación por juicio de expertos de un instrumento de evaluación. RIDE, 16(30), 1-20. <https://www.ride.org.mx/index.php/RIDE/article/view/960>
- McKenney, S., & Reeves, T. C. (2012). Conducting educational design research. Routledge.

<https://revistas.um.es/riite/article/view/260631>

- Román Andújar, L. (s.f.). Uso de materiales manipulativos para el aprendizaje de la geometría. Universidad Internacional de La Rioja.
<https://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/6536/ROMAN%20ANDUJAR,%20LAURA.pdf?sequence=1>
- Smartick. (2025, 14 de enero). Marco metodológico de Smartick: Investigación basada en diseño. <https://www.smartick.es/blog/sobre-smartick/investigacion-basada-en-diseno/>
- Stufflebeam, D. L., & Shinkfield, A. J. (2008). La validación por juicio de expertos. Dialnet. <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/9593530.pdf>
- Universidad de los Andes. (2024, 5 de noviembre). La investigación basada en diseño como sustento de ambientes de aprendizaje. Funes. <https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/la-investigacion-basada-en-diseno-como-sustento-de-ambientes-de-aprendizaje-para-el-aula-de-matematica/>
- Cruz Sáenz, F. J. (2015). Una propuesta didáctica basada en aprendizaje colaborativo para aprendizaje del cálculo de volúmenes de sólidos (Tesis de maestría). Universidad de Guadalajara, Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías, Guadalajara, México
- Mektrairat, W., & Thaikam, W. (2026). The effects of design-based learning on novice teachers' active learning management abilities. Higher Education Studies, 16(1), 11-20.
<https://doi.org/10.5539/hes.v16n1p11>
- Sevil Vicente, E. (2025). Implementación de recursos manipulativos para alumnos con Trastorno del Espectro Autista (TEA) [Trabajo Fin de Máster, Universidad Internacional de La Rioja].

- Bedoya Cuellar, M. (2023). El cuento y la personificación como medio para fortalecer la atención de los niños y niñas de 4 años del Centro de Desarrollo Infantil (CDI) La Morenita de Guadalupe, Huila [Trabajo de grado de licenciatura, Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD].
- Baldor, A. (2004). Geometría y trigonometría. Grupo Editorial Patria.
- Larson, R., & Hostetler, R. P. (2010). Geometría. McGraw-Hill.
- Stewart, J. (2018). Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas (8.ª ed.). Cengage Learning.
- Santana-Mero, E. M., VivasAlcívar, R. E., & Tamayo-Batista, M. (2025). Evolución Histórica de la Geometría Plana. Innova Science Journal, 3(4), 363- 376. <https://doi.org/10.63618/omd/isi/v3/n4/143>
-