

EL CUENTO “LA RAZÓN DE HIPARCO”, COMO ESTRATEGIA DIDACTICA  
PARA LA SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS DIRIGIDA A LOS  
ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO DEL COLEGIO KAPEIROT.

AYALA REYES LEIDY KATHERINE  
FONSECA PUERTO CARLOS DAVID



UNIVERSIDAD LA GRAN COLOMBIA  
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN  
BOGOTÁ  
2009

EL CUENTO “LA RAZÓN DE HIPARCO”, COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA  
PARA LA SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS DIRIGIDA A LOS  
ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO DEL COLEGIO KAPEIROT.

AYALA REYES LEIDY KATHERINE  
FONSECA PUERTO CARLOS DAVID

Trabajo de Grado presentado como requisito parcial para optar al título de:  
Licenciados en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

ASESOR:  
TORRES SÁNCHEZ WILSON  
Profesor Área de Matemáticas

UNIVERSIDAD LA GRAN COLOMBIA  
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN  
BOGOTA D.C.

2009

NOTA DE ACEPTACIÓN

---

---

---

Presidente del Jurado

---

Jurado

---

Jurado

Bogotá, 2 de Diciembre de 2009

Damos gracias a Dios por nuestras vidas,  
a nuestras mi familias y a nuestros amigos,  
y cada una de las personas que han estado  
con nosotros en la construcción  
del presente proyecto.

Leidy Katherine Ayala Reyes  
Carlos David Fonseca Puerto

## **AGRADECIMIENTOS**

Los autores expresan su agradecimiento a:

El profesor Wilson Torres Sánchez, Licenciado en Matemáticas, asesor en el proyecto de grado, por su conocimiento y sus valiosos aportes.

La Universidad La Gran Colombia, por todos los conocimientos brindados en el transcurso de estos años de estudio, experiencia que me permitirá ayudar a formar las nuevas generaciones.

Al Colegio Kapeirot por permitirnos aplicar la propuesta con los estudiantes.

A docentes y compañeros que a lo largo de la carrera nos brindaron experiencias y amistad.

## CARTA DERECHOS DE AUTOR

Bogotá D.C., 2 de Diciembre de 2009

Señores:

**UNIVERSIDAD LA GRAN COLOMBIA**

Bogotá

Estimados señores:

Nosotros, **Leidy Katherine Ayala Reyes** identificada con Cédula de ciudadanía No.1.022.329.395 de Bogotá y **Carlos David Fonseca Puerto** identificado con cédula de ciudadanía No. 80.845.436, autores del trabajo de grado nombrado **“El cuento “La razón de Hiparco”, como estrategia didáctica para la solución de triángulos rectángulos dirigida a los estudiantes de grado séptimo del colegio Kapeirot”** presentado como requisito para optar el título de **Licenciados en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas**; Autorizamos a la Universidad La Gran Colombia la consulta, reproducción, distribución o cualquier otra forma de uso de la obra parcial, con fines académicos en cualquier formato de presentación; conforme a la ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995, Circular No 06 de la Dirección Nacional de Derechos de autor para Instituciones de Educación Superior, y demás normas generales en la materia.

Atentamente,

**LEIDY KATHERINE AYALA REYES      CARLOS DAVID FONSECA PUERTO**  
**C.C. 1.022.329.395 de Bogotá      C.C. 80.845.436 de Bogotá**

## CONTENIDO

LISTA DE ANEXOS

RESUMEN

INTRODUCCIÓN

<b>1. TÍTULO .....</b>	<b>19</b>
<b>2. LÍNEA Y SUBLÍNEA DE INVESTIGACIÓN .....</b>	<b>20</b>
<b>3. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN .....</b>	<b>22</b>
3.1. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA .....	22
3.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	23
3.3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA .....	23
<b>4. OBJETIVOS.....</b>	<b>24</b>
4.1. OBJETIVO GENERAL .....	24
4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	24
<b>5. JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA.....</b>	<b>25</b>
5.1. JUSTIFICACIÓN DISCIPLINAR.....	25
5.2. JUSTIFICACIÓN PEDAGÓGICA .....	27
<b>6. MARCO DE REFERENCIA .....</b>	<b>29</b>
6.1. MAPA CONCEPTUAL.....	29
6.2. MARCO DE ANTECEDENTES.....	30
6.3. MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL .....	36
6.3.1. APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO.....	36
6.3.2. ESTRATEGIA PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS .....	37
6.3.2.1 El problema y sus características .....	38
6.3.2.2. Modelo para la solución de problemas.....	38
6.3.2.3. La propuesta .....	38
6.4. MARCO DISCIPLINAR .....	40
6.4.1. MARCO HISTÓRICO DE LA TRIGONOMETRÍA.....	40
6.4.2. TEOREMA DE PITÁGORAS.....	42
6.4.3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS .....	43
6.5. GLOSARIO .....	44
6.6. MARCO LEGAL .....	45
<b>7. HIPÓTESIS .....</b>	<b>48</b>
<b>8. METODOLOGÍA .....</b>	<b>49</b>
8.1. TIPO Y EN FOQUE DE LA INVESTIGACIÓN .....	49
8.2. FASES DE LA INVESTIGACIÓN .....	49
8.3. POBLACIÓN Y MUESTRA.....	50
8.4. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS .....	51

8.4.1. VALIDACIÓN.....	52
<b>9. BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>53</b>
9.1. BÁSICA Y DE REFERENCIA .....	53
<b>10. PLANEACIÓN O PROPUESTA ECONÓMICA.....</b>	<b>55</b>
<b>11. INFORME DE INVESTIGACIÓN.....</b>	<b>56</b>
11.1. RESULTADO Y ANÁLISIS.....	56
11.2. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	60
<b>12. ANEXOS.....</b>	<b>63</b>

## **LISTA DE ANEXOS**

ANEXO 1: PRETEST

ANEXO 2: ALGUNOS EJERCICIOS DE LA CARTILLA

ANEXO 3. FOTOS DE LA VALIDACIÓN.

UNIVERSIDAD LA GRAN COLOMBIA  
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN  
RAE Resumen Analítico de Investigación

TÍTULO

EL CUENTO “LA RAZÓN DE HIPARCO”, COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA LA SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO DEL COLEGIO KAPEIROT.

AUTORES

LEIDY KATHERINE AYALA REYES Y CARLOS DAVID FONSECA PUERTO

LUGAR DE ELABORACIÓN

Departamento	Cundinamarca
Ciudad/Año	Bogotá D.C., 2009
Entidad	Universidad la Gran Colombia

TIPO DE INVESTIGACIÓN

INVESTIGACIÓN CUALITATIVA

PALABRAS CLAVES

Ángulo, Aprendizaje significativo, Cartilla, Cateto, Cuento, Hipotenusa, Razones trigonométricas, Teorema de Pitágoras, Triángulo y Triángulo rectángulo

FORMULACIÓN Y DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Los docentes de matemáticas deben permitirle al estudiante el aprendizaje de los conceptos del área, el desarrollo de habilidades y de las competencias, con metodologías que impacten dentro del proceso

enseñanza-aprendizaje; por tal razón es preciso diseñar alternativas para la aplicación de los conceptos matemáticos, con miras a que los estudiantes puedan encontrar fácilmente el sentido a los procesos que realizan, por lo tanto, para el estudio de la solución de triángulos rectángulos a través del teorema de Pitágoras y de nociones de razones trigonométricas, se debería adoptar la solución de problemas como una estrategia que le de sentido al trabajo en el aula de clases.

El Colegio Kapeirot, es una institución educativa que ofrece el servicio de educación en los niveles de preescolar, primaria y bachillerato, desde hace treinta y cinco años. Dentro del plan de estudios está establecido para el grado séptimo una hora semanal de geometría, en ella se debe abordar contenidos tales como unidades de medidas, ángulos, triángulos, Teorema de Pitágoras, entre otros; y que son fundamento para los contenidos que se abordan dos años mas tarde en grado décimo.

Teniendo en cuenta la autonomía de la Institución y la del docente y que el Colegio ofrece espacios para diseñar o replantear el plan de estudios, se prevé que en grado séptimo se puede abordar la enseñanza de la resolución de triángulos rectángulos, no solo por medio del teorema de Pitágoras, sino también por medio de nociones de razones trigonométricas, dándole así una significación y una aplicación más real y más elaborada a los conceptos recientemente aprendidos.

En consecuencia, se plantea la siguiente pregunta: ¿Qué impacto tiene el cuento “La Razón de Hiparco”, como estrategia didáctica para la solución de problemas de triángulos rectángulos a través del teorema de Pitágoras y de nociones de razones trigonométricas en los estudiantes de grado séptimo del colegio Kapeirot”?

## OBJETIVOS

### GENERAL

Analizar el impacto del cuento “La razón de Hiparco, como estrategia didáctica para la solución de problemas de triángulos rectángulos a través del teorema de Pitágoras y de nociones de razones trigonométricas en los estudiantes de grado séptimo del colegio Kapeirot”.

## DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN

El trabajo de investigación se realizó en el Colegio Kapeirot, con los estudiantes de grado séptimo, para la enseñanza de solución de triángulos rectángulos por medio del teorema de Pitágoras y por medio de nociones razones trigonométricas; como herramienta didáctica se utilizó la cartilla “La razón de Hiparco” compuesta por un cuento y una serie de ejercicios basados en situaciones que se presentan a lo largo de la historia.

Para el trabajo de investigación se tuvieron en cuenta las siguientes fases: la primera comprende los primeros avances del proyecto; consultas bibliográficas de textos y documentos referentes de investigaciones relacionadas con el aprendizaje de la geometría y la trigonometría en grado séptimo; en la segunda fase, se realiza la primera versión del anteproyecto; la tercera fase, consiste en el diseño de un diagnostico; en la cuarta fase que se realiza el diseño del marco legal y del marco teórico; en la quinta fase, se delinear los pasos para el diseño de la propuesta, y se elabora la propuesta: “La razón de Hiparco”, que consiste en una narración acompañada de una cartilla de ejercicios, como herramienta para el aprendizaje de la solución de triángulos rectángulos por medio del teorema de Pitágoras y de nociones de razones trigonométricas; y por último, en la sexta fase se presenta y se valida la propuesta “La razón de Hiparco” como

estrategia didáctica para la solución de triángulos rectángulos dirigida a los estudiantes de grado séptimo del colegio Kapeirot”, y se sustenta.

## FUENTES

Boyer, C. (1996). Historia de la matemática, España; Ed. Alianza. 40 p.

De Zubiria, J. (1994). Tratado de Pedagogía Conceptual: Los modelos pedagógicos. Colombia, Fundación Merani. Fondo de Publicaciones Bernardo Herrera Merino, p. 8.

Díaz, F. & Hernández, G. Estrategias docentes para el aprendizaje significativo, una interpretación constructiva. México, Ed. McGraw Hill, 35 p.

Chacón, A., Monge, A. & Morales, C. (2007). Comprensión de razones trigonométricas: niveles de comprensión. Costa Rica

Ibáñez J. & López. O. (2008). Niveles de complejidad en la solución de problemas de geometría dinámica en ambientes Computacionales. Colombia.

Jiménez L., Picado M. (2003). La historia de la matemática: una herramienta metodológica en procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría en el currículo de séptimo año.

Oliver, Rocerau, Valdez, Vilanova, Medina Astiz & Laviada. (2007). Análisis de algunos temas de geometría en textos escolares para el tercer ciclo de la educación general básica. Universidad Nacional de Mar de Plata de Argentina.

Polya, G. (2002). Cómo plantear y resolver problemas. Mexico.

Torres, Andrea. (2008). Geometry easy. Juego educativo para el aprendizaje de clases de triángulos, Medidas de ángulos y teorema de Pitágoras en los Estudiantes de grado séptimo B del Liceo Santa Bárbara. Colombia, 55 p.

Wills, D., Guarín, H. & Takeuchi, Y. (1982). Hacia la matemática un enfoque estructurado. Colombia. Grupo Editorial Andino. 259 p.

## METODOLOGÍA

Para el trabajo de investigación se toma como modelo la investigación de tipo cualitativo, toda vez, que lo que se pretende con la propuesta es entender el comportamiento humano y la forma de tomar decisiones.

## CONCLUSIONES

La Propuesta “La razón de Hiparco” dirigida a los estudiantes de grado séptimo del Colegio Kapeirot, diseñada a partir de los fundamentos matemáticos, pedagógicos, históricos y legales planteados en el presente trabajo, es una estrategia para el aprendizaje de la solución de triángulos rectángulos a partir del teorema de Pitágoras y de nociones de razones trigonométricas; a través de la observación del los autores del trabajo al momento de la validación de la propuesta, y de acuerdo a ejercicios resueltos por los estudiantes tuvo mas incidencia en los alumnos que normalmente no les gusta y no entienden la forma tradicional de exposición del tema, adicionalmente, es una herramienta de apoyo para el docente del área de matemáticas. Contar en el aula de clase con un material diseñado

exclusivamente para tal fin puede facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Solucionar los problemas propuestos dentro de la cartilla de forma empírica, a partir de las sugerencias de los estudiantes y luego a partir de los pasos planteados como propuesta para la solución de problemas [Interpretación y análisis, Plan y ruta de trabajo y Elección del modelo de solución y evaluación.] permitió que los estudiantes reflexionaran sobre sus primeras respuestas; replantear los ejercicios bajo un esquema de trabajo conlleva a una solución mas segura y acertada. Los estudiantes afianzaron dicho proceso a medida que iban pasando de un capítulo al otro.

Se debe señalar que la propuesta hizo más efecto en una clase de estudiantes que en otra; los estudiantes que normalmente realizan correctamente los procesos algorítmicos manifestaron apatía y tuvieron dificultades en la solución de problemas en contextos llevados a la realidad, por el contrario, la cartilla generó mas expectativas en los estudiantes que presentan dificultades en la solución de problemas con algoritmos; esta clase de estudiantes estuvo mas atenta a la lectura del cuento, resolvieron con mayor brevedad los ejercicios propuestos y sus respuestas fueron mas concretas que la de los estudiantes que hacen buenos procesos.

La enseñanza de razones trigonométricas bajo el esquema de la solución de problemas en contextos que buscan llevar al estudiante a situaciones reales, permitió no solo avanzar en los contenidos del área sino que además permitió afianzar en algunos estudiantes conceptos tales como áreas, perímetros, raíces; los estudiantes manifestaron entender las razones del por qué de los conceptos y de los procedimientos, dieron razones del por qué se les solicitó hallar ternas pitagóricas y relación con las raíces, se les facilitó hallar áreas y perímetros con el material de la cartilla. De igual forma, la

ejecución de un plan de trabajo, interpretar y analizar, escoger un plan y una ruta de trabajo y la elección del modelo de solución y evaluación facilitó a los estudiantes hallar la solución de los problemas planteados.

Es preciso seguir formulando estrategias que dinamicen el aprendizaje de las razones trigonométricas y en general de la geometría plana; estrategias tales como cuentos, juegos, cartillas, etc., pueden ser parte de una gama de alternativas generadoras de estímulos para el aprendizaje. La cartilla diseñada a partir de fundamentos de la teoría del aprendizaje significativo resultó ser una opción más dentro del grado séptimo del colegio Kapeirot para el aprendizaje de la solución de triángulos rectángulos. El hecho de relacionar los preconceptos [abordados desde el primer capítulo de la cartilla] con la nueva teoría [Capítulos dos y tres], y la forma de abordar dicha teoría [la historia de Hiparco, los ejercicios y el material propuesto para la solución de los ejercicios], permitió ubicar al estudiante en contextos reales y atractivos para adquisición de nuevos conocimientos. Sin embargo, vale la pena resaltar que todos los estudiantes tienen motivaciones e intereses diferentes; el docente debe encontrar un punto de equilibrio en el aprendizaje de la solución de problemas por medio de algoritmos y ejercicios empíricos.

DIRECTOR DEL PROYECTO

Wilson Enrique Torres Sánchez

## INTRODUCCIÓN

El trabajo que se presentará a continuación fue realizado en el Colegio Kapeirot ubicado en la localidad de Puente Aranda en un sector socio cultural de nivel medio, es decir, entre estratos tres y cuatro. El trabajo se llevo a cabo con los 31 estudiantes de grado séptimo. Se pretendió dar a conocer una herramienta para la enseñanza de solución de triángulos rectángulos a través del teorema de Pitágoras y nociones de razones trigonométricas de una forma en que los estudiantes fueran quienes formularán posibles soluciones a las situaciones planteadas.

Para ello inicialmente se consultaron investigaciones realizadas previamente sobre la enseñanza de geometría en grado séptimo a partir de diferentes herramientas y la enseñanza de razones trigonométricas. Seguidamente se realizó un marco teórico donde se expone la historia de la trigonometría y sus orígenes para luego seguir con un marco teórico conceptual donde se relacionan pensamientos del modelo pedagógico, aprendizaje significativo y una estructura disciplinar, haciendo énfasis en la solución de problemas; para esto se proponen tres pasos a seguir: interpretar y analizar la situación planteada, diseñar un plan y ruta de trabajo y elegir el modelo de solución y evaluación.

Después de tener unas bases teóricas solidas se inició el diseño y validación de la propuesta “La razón de Hiparco” que como ya se mencionó hace referencia a una cartilla compuesta de un cuento y ejercicios para que el estudiante solucione con ayuda de la lectura; la propuesta fue aplicada de acuerdo a un plan que responde a tres pasos; Ambientación, Planteamiento de problemas y Presentación del tema y solución de problemas.

Fueron necesarias cinco sesiones para aplicar en su totalidad los tres capítulos contenidos en la cartilla, cada uno de ellos tienen un objetivo; el primero hace referencia a conceptos previos “Había una vez”, en el segundo se ven situaciones relacionadas con el teorema de Pitágoras “La malvada reina Kathis” y por último se le presentan al estudiantes algunas nociones de razones trigonométricas “la razón de Hiparco”.

## **1. TÍTULO**

El cuento “La razón de Hiparco” como estrategia didáctica para la solución de triángulos rectángulos dirigida a los estudiantes de grado séptimo del colegio Kapeirot.

## 2. LÍNEA Y SUBLÍNEA DE INVESTIGACIÓN

ALGUNAS DEFINICIONES SOBRE LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN	DEFINICIÓN EN LA FACULTAD	LÍNEAS Y SUBLINEAS	LÍNEA Y SUBLÍNEA QUE APOYA EL PRESENTE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN
<p>En el documento sistema de investigación de la Universidad la Gran Colombia. Se presentan algunas definiciones de líneas de investigación así:                      Son áreas o campos de énfasis de investigación.                      La línea es un eje ordenador de la actividad de investigación, posee una base racional, permite integración y continuidad de los esfuerzos de una o más personas, equipos o instituciones, comprendidas en el desarrollo del conocimiento en un ámbito específico.                      Es un cuerpo de problemas que se ubican en torno a un eje temático común y que demanda respuestas.                      Área, conjunto, núcleo básico de investigaciones producto de una</p>	<p>“Son las áreas temáticas que identifican el enfoque de la unidad académica; corresponden a una serie de proyectos con temas similares que pueden agruparse por razones teóricas y metodológicas. Conjunto de investigaciones que buscan aprehender una problemática común desde distintos enfoques teóricos, metodológicos y con coberturas variables”</p> <p>Facultad de educación</p> <p>Línea de investigación: Es una construcción formativa y/o profesional contextualizada en la Universidad La Gran Colombia que hacen los integrantes de la comunidad académica de la facultad de ciencias de la</p>	<p>El documento Sistema de Investigación de la Universidad establece dos líneas y deja posibilidad para construir sub. líneas así:</p> <p><b>1. pedagogía y educación para la solidaridad.</b>                      Pensamiento bolivariano.                      Ciencia, conocimiento y tecnología de la información.                      Comunicaciones aplicadas a la educación.                      Pedagogía, cultura y sociedad.</p> <p><b>2. pedagogía y educación básica</b></p>	<p>Para el desarrollo de este proyecto se tomará como eje conductor la línea de investigación pedagógica y educación básica enfocada directamente a la sub. Línea denominada desarrollo de las didácticas disciplinares, ya que se pretende diseñar una propuesta como estrategia para la enseñanza de razones trigonométricas a estudiantes de séptimo grado del colegio Kapeirot.</p>

<p>secuencia histórica.          Temática, problemática donde giran y se congregan los esfuerzos de todos.          Conjunto de proyectos de investigación que contribuyen a la solución de problemas de la comunidad.</p>	<p>educación en torno a temáticas inherentes a la pedagogía y la didáctica en relación con la cultura, economía, política, arte, tecnología y la sociedad que tienen como fuentes su propia práctica y la filosofía o ideario de la facultad y la universidad.</p> <p>Coordinación de investigaciones</p>	<p>Didáctica de las ciencias sociales.          Didáctica de la matemática.          Didáctica de las humanidades y la lengua castellana          Didáctica de las humanidades y el inglés.          Didáctica de la filosofía.</p>	
--	---	---	--

### **3. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN**

#### **3.1. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA**

Los docentes de matemáticas deben permitirle al estudiante el aprendizaje de los conceptos del área, el desarrollo de habilidades y de las competencias, con metodologías que impacten dentro del proceso enseñanza-aprendizaje; por tal razón es preciso diseñar alternativas para la aplicación de los conceptos matemáticos, con miras a que los estudiantes puedan encontrar fácilmente el sentido a los procesos que realizan, por lo tanto, para el estudio de la solución de triángulos rectángulos a través del teorema de Pitágoras y de nociones de razones trigonométricas, se debería adoptar la solución de problemas como una estrategia que le de sentido al trabajo en el aula de clases.

Ante la falta de creatividad y de recursos, en ocasiones, los profesores solo proponen a los estudiantes la solución de ejercicios mecanicistas a partir de algoritmos, en consecuencia, muchos de los conceptos de matemáticas quedan en la abstracción. Limitarse a entregar una tabla en la que figuren los ángulos y un teorema que carece de sentido práctico a un estudiante que apenas está recibiendo la información no asegura un aprendizaje efectivo de lo que se pretende enseñar. De otro lado, el carácter transversal de las matemáticas debe procurar el afianzamiento o la recordación de conceptos previos y la relación con otras disciplinas del saber; La solución de triángulos rectángulos por medio del teorema de Pitágoras es tema de grado séptimo y las razones trigonométricas de grado décimo de acuerdo a los lineamientos del MEN, sin embargo, el docente de matemáticas debería darle continuidad al tema y no esperar dos años después.

De otro lado, la abstracción como parte de las matemáticas en ocasiones puede presentarse como un obstáculo para que los docentes dejen de diseñar

escenarios de aprendizajes significativos en el aula, anulando la posibilidad de aprender nuevos y mejores conceptos

### **3.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.**

El Colegio Kapeirot, es una institución educativa que ofrece el servicio de educación en los niveles de preescolar, primaria y bachillerato, desde hace treinta y cinco años. Dentro del plan de estudios está establecido para el grado séptimo una hora semanal de geometría, en ella se debe abordar contenidos tales como unidades de medidas, ángulos, triángulos, Teorema de Pitágoras, entre otros; y que son fundamento para los contenidos que se abordan dos años más tarde en grado décimo.

Teniendo en cuenta la autonomía de la Institución y la del docente; y que el Colegio ofrece espacios para diseñar o replantear el plan de estudios, se prevé que en grado séptimo se puede abordar la enseñanza de la resolución de triángulos rectángulos, no solo por medio del teorema de Pitágoras, sino también por medio de nociones de razones trigonométricas, dándole así una significación y una aplicación más real y más elaborada a los conceptos recientemente aprendidos.

### **3.3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.**

¿Qué impacto tiene el cuento “La Razón de Hiparco”, como estrategia didáctica para la solución de problemas de triángulos rectángulos a través del teorema de Pitágoras y de nociones de razones trigonométricas en los estudiantes de grado séptimo del colegio Kapeirot”?

## **4. OBJETIVOS**

### **4.1. OBJETIVO GENERAL**

Analizar el impacto del cuento “La razón de Hiparco, como estrategia didáctica para la solución de problemas de triángulos rectángulos a través del teorema de Pitágoras y de nociones de razones trigonométricas en los estudiantes de grado séptimo del colegio Kapeirot”.

### **4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Realizar un diagnóstico que permita identificar los conocimientos en geometría de los estudiantes de grado séptimo<sup>1</sup>.
- Consultar bibliografía para el diseño del estado de arte, a partir de consultas e investigaciones que sean referente para la construcción del proyecto de grado.
- Diseñar y elaborar la propuesta didáctica basada en el planteamiento de un cuento como estrategia didáctica que nos permita abordar la enseñanza de la solución de triángulos rectángulos.
- Validar la propuesta “La razón de Hiparco” en el grado séptimo del Colegio Kapeirot.
- Analizar y concluir a partir de la aplicación y el proceso de investigación, el resultado de la propuesta “La razón de Hiparco”

---

<sup>1</sup> El diagnóstico se aplicó a los estudiantes de grado séptimo del Instituto Campestre Senderos ubicado en el municipio de Soacha, posteriormente se decidió cambiar la población por los estudiantes de grado séptimo del Colegio Kapeirot, en la Ciudad de Bogotá.

## 5. JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

La formulación de propuestas de aprendizaje debe orientarse en la pertinencia de la educación que contribuya al aprendizaje de cosas que en realidad le fortalezcan en su desarrollo, no solo en la ejercitación de mecanismos aritméticos sino como unidades de aprendizajes capaces de elaborar procesos de meta cognición en el estudiante. Por otra parte elaborar una propuesta basada en las tendencias actuales de la educación contribuye al fortalecimiento de las bases epistemológicas de un proyecto con grandes posibilidades de éxito y factibilidad dentro del contexto educativo. De igual modo determinar las características de lo que el estudiante puede desarrollar para si mismo y dentro del los estándares curriculares contextualiza al lector no solo a nivel curricular sino en el nivel transversal de la matemática.

### 5.1. JUSTIFICACIÓN DISCIPLINAR

El desarrollo de los conceptos, estructurados a partir de los primeros años, permite al estudiante reorganizar esquemas mentales acerca de la caracterización del espacio que lo rodea. En la actualidad el estudio de la geometría se aborda fundamentalmente a través del desarrollo del pensamiento geométrico, es decir, un estudio más allá de la percepción y categorización de figuras geométricas, con el animo de fabricar un sistema conjunto de elementos conceptuales para la adquisición de modelos de pensamiento<sup>2</sup> encaminados a la solución de situaciones que implican un análisis en la descripción y hallazgo de variantes en el mundo real.

La estrategia didáctica “La razón de Hiparco” busca afianzar los elementos conceptuales y las definiciones, no solo desde las ideas abstractas sino desde una perspectiva más activa, a través de una inclusión en el esquema general

---

<sup>2</sup> “El modelo de pensamiento sistemático consiste en el empleo deliberado y controlado de nuestros recursos” Villarini, Á. (1997). Teoría y pedagogía del pensamiento sistémico y crítico. Puerto Rico.

del aprendizaje de geometría una serie de actividades de tipo aplicativo. El carácter transversal de la geometría le permite al estudiante observar sistemas axiomáticos desde perspectivas más llamativas para ellos; de otro lado, es innegable el aporte de la geometría a otras áreas del conocimiento. Así pues, “La razón de Hiparco” es diseñado con base en los estándares curriculares propuestos por el MEN, procura que el estudiante de grado séptimo del colegio Kapeirot estimule y desarrolle el pensamiento geométrico; es así como “La razón de Hiparco” pretende ofrecer actividades en donde el estudiante resuelva problemas, caracterice figuras a través de la lectura y además se ejercite en el manejo de algoritmos, a través del desarrollo de lecturas que exigen del mismo un nivel de abstracción acorde a la edad.

Dentro de un marco más específico, la aplicación de las razones trigonométricas como modelos de solución de triángulos rectángulos, no solo posibilitan que el estudiante resuelva ejercicios de tipo aritmético y algebraico, sino que a partir del nivel de escolaridad y basados en los conocimientos adquiridos en el trabajo del pensamiento numérico y variacional, se esta en la capacidad de relacionar problemas en donde involucren distancias, longitudes de segmentos alturas de triángulos, entre otros, introduciendo al estudiante en un universo mas allá del mecanicismo, con el animo de prepararlo para que potencie sus competencias básicas, a partir de la solución de problemas.

En ese orden de ideas, es evidente que lo ideal para un gran número de docentes de matemáticas es conseguir que el docente genere hábitos de aplicación conceptual, en este caso, se establece que la aplicación de los contenidos temáticos es la interpretación de situaciones y escenarios tal como lo indica George Polya (2002) “Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero hay una pizca de descubrimiento en la solución de cualquier problema. Tu problema puede ser modesto, pero si es un reto a tu curiosidad y trae a juego tus facultades inventivas, y si lo resuelves por tus propios métodos, puedes experimentar la tensión y disfrutar del triunfo del descubrimiento”

## 5.2. JUSTIFICACIÓN PEDAGÓGICA

La solución de problemas es ante los ojos del aprendizaje significativo una de las estrategias más relevantes para motivar al estudiante hacia la aprehensión de los elementos teóricos; y si a este se le suma el hecho de que es posible elaborar una propuesta que articula la literatura con los contenidos matemáticos es posible inferir que las matemáticas aprendidas a partir de un cuento resultan ser más llamativas para los estudiantes, sin dejar a un lado el trabajo sobre los estándares curriculares.

La teoría del aprendizaje significativo planteada por Ausubel desarrolla una interpretación y estudio de las condiciones que se deben presentar para que ese aprendizaje contribuya en gran medida a la construcción de nuevos conceptos, a partir de los preconceptos, enmarcados en un contexto real. La estrategia didáctica “La razón de Hiparco” adopta el aprendizaje significativo como herramienta que ofrece elementos que permiten orientar el proceso de aprendizaje para la solución de problemas de triángulos rectángulos, pues parte de los conceptos previos que posee el alumno<sup>3</sup>, brindándole la oportunidad de interactuar con el conocimiento no solo como un elemento receptor, sino como el primero y más importante constructor de una nueva y mejorada estructura cognitiva.

El desarrollo de situaciones problémicas, en el caso específico de la solución de problemas de triángulos rectángulos, permite que el aprendizaje sea potencialmente significativo debido a que dichos problemas llevan al alumno a un ambiente más práctico de las ideas y no solo al desarrollo memorístico o mecanicista, orientándolo al estudio y entendimiento de los escenarios en los cuales se desarrolla.

La propuesta “La razón de Hiparco” pretende ofrecerles a los estudiantes de grado séptimo del Colegio Kapeirot, la posibilidad de explorar y profundizar en

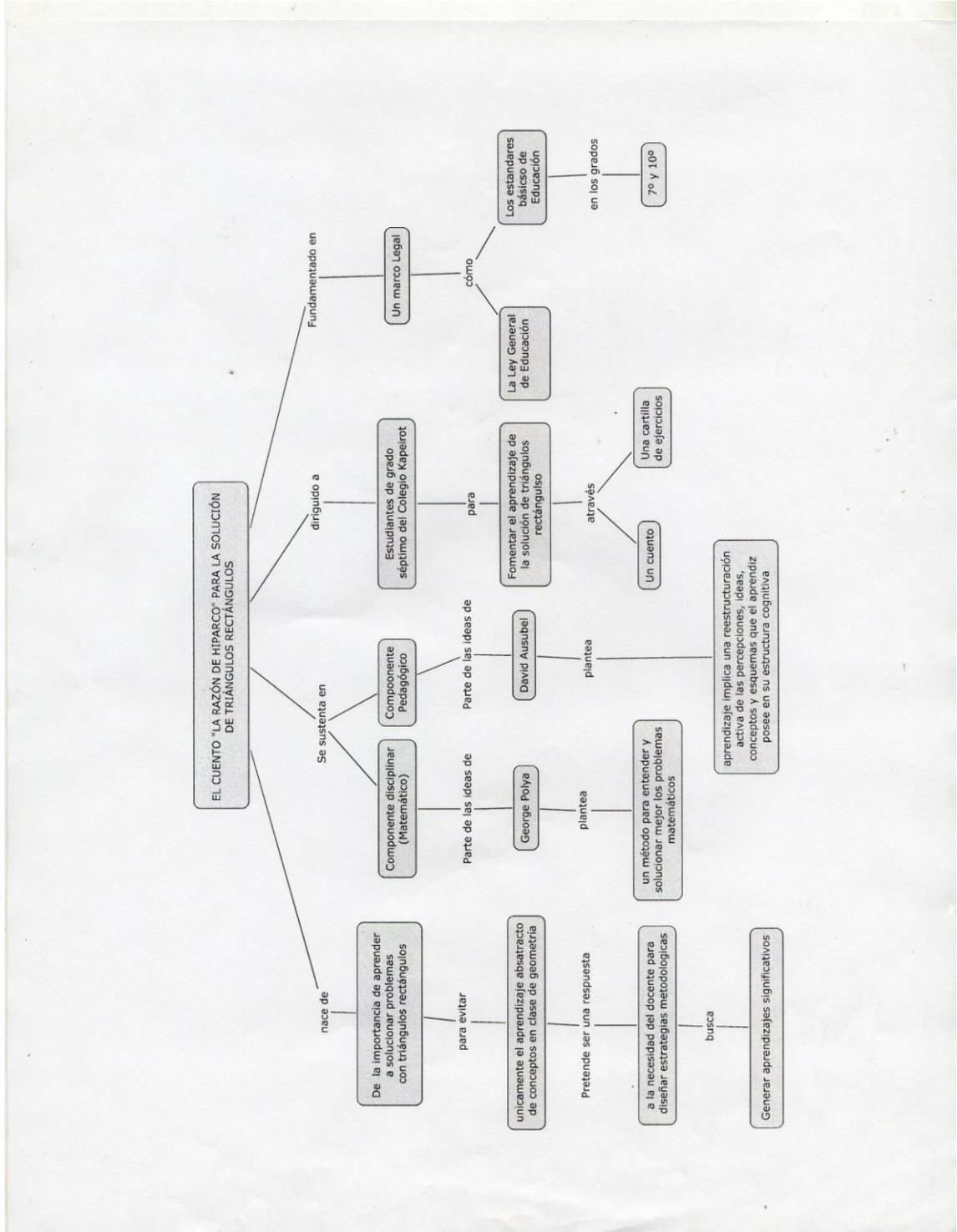
---

<sup>3</sup> De Zubiria, J. (1994). *Tratado de Pedagogía Conceptual: Los modelos pedagógicos*. Colombia. Fundación Merani. Fondo de Publicaciones Bernardo Herrera Merino, 8.

ambientes de motivación, para que a partir de los conceptos previos y de situaciones problemáticas reales, se generen esquemas mentales significativos, esto permite que el alumno adopte una actitud positiva, es decir, que manifieste agrado a la hora de “abordar” solución de triángulos rectángulos a través del teorema de Pitágoras y de nociones de razones trigonométricas.

## 6. MARCO DE REFERENCIA

### 6.1. MAPA CONCEPTUAL



## 6.2. MARCO DE ANTECEDENTES

La enseñanza de la geometría no solo debe ser vista como un tema más en el currículo o simplemente como un elemento más para completar el plan de estudios concernientes al área de matemáticas. El análisis que se le puede llevar a cabo a la enseñanza de la geometría puede ser de carácter investigativo, esto con el fin de determinar estrategias o replantear los conceptos de la didáctica general enfocados en el aprendizaje de la solución de triángulos rectángulos a través de razones trigonométricas desde la solución de problemas. Para diseñar dicha propuesta se han tenido en cuenta investigaciones previas referentes a razones trigonométricas, resolución de problemas y enseñanza de la geometría.

En primera instancia Chacón, A., Monge, A. & Morales, C. (2007) en su trabajo “Comprensión de razones trigonométricas: niveles de comprensión, indicadores y tareas para su análisis” llevada a cabo en la Universidad de Costa Rica, pretenden explorar como la comprensión incide en la resolución de problemas que involucran razones trigonométricas, para ello toman una población de tres docentes que asisten a un seminario de Enseñanza de la Matemática y algunos expertos que inciden en la forma en que se enseña la trigonometría desde las directrices del Ministerio de Educación. La metodología empleada se baso en entrevistas dirigidas a los maestros encaminadas a indagar en los procedimientos y técnicas de enseñanza de las razones trigonométricas y plenarias en donde se exponen los diferentes puntos de vista para la sistematización de ideas. El objetivo de la investigación fue desarrollar un conjunto de tareas criterios e indicadores para valorar de comprensión del tema.

Las conclusiones a las que se llegaron exaltan la importancia del conocimiento y dominio de los temas por parte del docente, y habilidad para manipularlos, aplicarlos y adaptarlos para resolver una situación en particular. Además de, desarrollar una estructura lógica o base conceptual que permita argumentar

mejor los razonamientos y visualizar los conceptos formando esquemas mentales que permitan establecer las relaciones entre ellos, también se aconseja proponer ejercicios novedosos y ejemplos más adecuados según el contexto y la población a quien van dirigidos.

La investigación realizada por Oliver, Rocerau, Valdez, Vilanova, Medina Astiz y Laviada (2003) “Análisis de algunos temas de geometría en textos escolares para el tercer ciclo de la educación general básica” en la Universidad Nacional de Mar de Plata de Argentina tuvo como objetivo principal analizar si los libros de geometría más usados por los docentes de tercer ciclo (7º, 8º y 9º) contienen una propuesta didáctica que favorezca la participación activa de los alumnos en la construcción de los conceptos del área. Dicho análisis se llevo a cabo a través de una encuesta realizada a 134 docentes en actividad en la que se busco conocer los textos usados, sus contenidos y cantidad de actividades propuestas para estudiantes.

Se pudo concluir que la enseñanza adecuada será la que privilegie los métodos activos, inductivos, es decir aquellos en los que el estudiante es algo más que un simple receptor pasivo de información, durante las fases de aprendizaje el estudiante debe transitar por una adecuada graduación y organización de actividades que le permita adquirir las experiencias necesarias para llegar al nivel superior de razonamiento en un área del conocimiento, además es función del docente procurar que sus alumnos construyan la red mental de relaciones del nivel de razonamiento correspondiente, creando primero los conceptos centrales, es decir, los vértices de la red y después las conexiones entre ellos.

Por otra parte la investigación de Ibáñez y López (2008) “Niveles de complejidad en la solución de problemas de geometría dinámica en ambientes Computacionales” de la Universidad Pedagógica Nacional en Bogotá D.C., Colombia, estudió dimensiones cognitivas agentes en la solución de problemas de geometría dinámica con diferentes niveles de complejidad; dada

ésta en términos del número de variables que se articulan entre sí, para dar solución a una situación problemática. Se utiliza como escenario experimental un programa de computador que posee una serie de figuras geométricas planas básicas, con diferentes posibilidades de movimiento para construir sistemas geométricos en el plano con diferentes niveles de complejidad. Específicamente se deseaba estudiar la incidencia del orden en los niveles de complejidad en la eficacia y eficiencia en la solución de problemas. Como metodología se utilizó el análisis experimental con 85 estudiantes de grado sexto, los estudiantes se distribuyeron aleatoriamente en tres (3) grupos para la solución de problemas de diferentes niveles de complejidad, al primer grupo solucionaba problemas de menor a mayor nivel de complejidad, el segundo grupo solucionaba problemas de mayor a menor nivel de complejidad y el tercero escogía libremente los niveles. La recolección de datos se realizó por medio del software, el cual registra el número de acciones que realizaba cada uno de los estudiantes y el tiempo que gasta en la solución de los problemas propuestos.

Los resultados muestran que el grupo que soluciona los problemas de menor a mayor nivel de complejidad es más eficiente y eficaz que quienes solucionan los problemas en orden inverso. Sin embargo los resultados tanto en eficiencia como eficacia de los tres grupos de estudiantes fue semejante en una prueba de retención de aprendizaje que se realizó una semana después, en consecuencia, todos los estudiantes alcanzaron niveles de aprendizaje similares; la diferencia radica en la cantidad de tiempo empleado para lograrlo. También se evidencia una correlación fuerte entre eficiencia y eficacia, es decir, los estudiantes de mayor eficiencia son también los de mayor eficacia.

Los procesos de enseñanza y aprendizaje proveen al maestro de un sin número de alternativas para inducir al estudiante al aprendizaje de un tema o contenido temático en especial, la historia puede ser tomada como una herramienta motivadora hacia el estudio de la geometría tal como lo exponen Jiménez y Picado (2003) en “La historia de la matemática: una herramienta

metodológica en procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría en el currículo de séptimo año” su objetivo fue determinar el nivel de conocimiento que tienen los estudiantes referentes a la historia de las matemáticas y la conexión con geometría para lo cual se desarrollaron test con el fin de recolectar la información necesaria.

La mayoría de los estudiantes encuestados proviene de centros educativos de primaria, con apenas una pincelada de elementos históricos relacionados con la Matemática. Sin embargo, estos mismos estudiantes manifestaron interés por conocer sobre temas relativos a la historia de la Matemática, específicamente en aspectos propios de esta disciplina tales como: origen, evolución y aplicación desde la antigüedad hasta el día de hoy.

Después del análisis de la información se pudo obtener que en cuanto a aspectos curriculares se recomienda que el maestro incorpore la historia de la Matemática como elemento didáctico en los programas de estudio de Matemática en los ciclos I, II, III y IV de la educación costarricense, como un comprender conceptos y contenidos que en muchas ocasiones se consideran aburridos y de poca utilidad.

Con la ayuda del Estado, y a través de diferentes instituciones como el Ministerio de Cultura Juventud y Deportes y de las universidades públicas y privadas del país, se fomentó y apoyó la creación de centros de documentación y exposición de elementos históricos relacionados con la Matemática, de manera que la educación Matemática costarricense cuente con recursos de carácter didáctico que faciliten la contextualización de conocimientos abstractos en situaciones reales y concretas.

Una vez resaltada la importancia de trabajar sobre lo demostrativo, se retoma el hecho de la importancia de llevar al contexto los conocimientos geométricos en pro del desarrollo del pensamiento espacial del estudiante y el pensamiento variacional.

Es posible establecer relaciones entre los elementos que participan en el proceso de aprendizaje: estudiante, maestro, institución, entre otros, sin embargo, el modelo de enseñanza, es uno de los principales elementos en la pedagogía, en la didáctica y en fin en la educación, entre tanto propone elementos teóricos que posibiliten progresar los conocimientos que el estudiante requiere construir. Analizarlos, describirlos y sobre todo aplicarlos es una de las oportunidades que tiene el docente para determinar el grado de validez que tiene cada uno de acuerdo al medio y a la comunidad a la cual va dirigida, por ello se cita a Ramiro (2004), quien formuló el proyecto "Diseño instruccional para la enseñanza de la geometría a través de un micromundo geométrico". La investigación tuvo como finalidad aportar y proponer un modelo de diseño instruccional para la enseñanza de la geometría, con fundamento en las teorías del aprendizaje (conductismo-cognitivismo y constructivismo) y los eventos de instrucción de Gagné, en el séptimo grado de la educación básica a través del uso y utilización de un micro mundo geométrico denominado Geometer's Sketchpad y cuya traducción al español es El Geómetra. Para el desarrollo de esta investigación se tomó en consideración a un grupo de estudiantes de la Escuela Básica Nacional "Tulio Febres Cordero" ubicada en el Municipio Libertador del Estado Mérida con la particularidad de estar cursando el octavo grado de educación básica con la asignatura matemática del séptimo grado en condición de materia pendiente. El marco de investigación en que se desarrolló el estudio fue el de la modalidad de investigación de campo basada en el modelo cuasi experimental y tuvo como objetivo diseñar y determinar el efecto del diseño instruccional aplicado en el rendimiento en geometría del séptimo grado de la escuela básica. Se utilizó como instrumento de recolección de datos una prueba escrita (postest) con trece (13) ítems que requerían la elaboración de respuestas en las cuales los alumnos hacían uso de la construcción geométrica, se elaboró una matriz de datos con la utilización del software para computadoras (SPSS), con la finalidad de realizar un análisis descriptivo e inferencial con el objetivo de determinar la significación del diseño aplicado.

El diseño instruccional expuesto aportó una herramienta estratégica de instrucción, al docente que pretende utilizar la tecnología, para reforzar el aprendizaje de sus alumnos, corroborando la idea que la instrucción no es modelo puramente mecánico y rígido que pretende abarcar conocimiento sin el desarrollo de competencias si no que por el contrario busca optimizar los niveles de aprendizaje de los estudiantes. Los resultados de las pruebas posteriores mostraron un incremento en el nivel de comprensión y de exactitud en la solución de problemas de tipo geométrico, todo gracias a la aplicación del modelo, en la enseñanza de la geometría en el grado séptimo.

Por otro lado Torres, Andrea (2008) en “Geometry easy” buscó implementar un juego educativo de mesa para ayudar al aprendizaje de geometría sobre temas relacionados con triángulos en grado séptimo. En primer lugar se realizó un diagnóstico a los estudiantes para revisar las falencias que tenían en geometría, esto se hizo mediante un pretest también se buscó evidenciar la forma de llevar la clase por parte del docente igualmente para revisar posibles falencias en el proceso en donde se pudo ver que la clase consistía netamente en explicación de temas por medio de clase magistral, ejercicios grupales e individuales y lectura de ejercicios tipo problema.

Luego se inició la elaboración del diseño que se divide en dos partes: el primero es la elaboración de la cartilla con los temas completamente organizados que será utilizado por el docente o por el juez del juego donde se encuentran los conceptos, las temáticas y las respuestas de las fichas. El segundo es el juego diseñado con cartón, fichas de preguntas y fichas de parques y dados. Los temas trabajados en el juego son: medida de ángulos, clases de triángulos y Teorema de Pitágoras.

Después de la aplicación de dichos juegos se realizó un postest para definir si en realidad habían dado resultado y de acuerdo con el análisis se pudo concluir que son necesarias las estrategias didácticas (como juegos) en las clases de

geometría tanto para el estudiante como para el docente, además es importante seguir innovando la parte pedagógica en la búsqueda de alternativas para un afianzamiento del aprendizaje, también se debe mencionar que el uso de juegos dentro del aula de clase es indispensable para motivar al estudiante y propiciar el aprendizaje significativo.

Autores de historias que involucran las matemáticas, como Julio César de Mello y Souza (1949) autor de “El hombre que calculaba”, Hans Magnus Enzensberger (1997) autor de El diablo de los números y Carlo Frabetti (2000) autor de “Alicia en el país de los números” han utilizado la literatura como un medio más para atraer la atención y el interés de los estudiantes; vale la pena resaltar que no se encontraron procesos de investigación a partir éstos libros, que son utilizados frecuentemente en clase de matemáticas como herramienta para el aprendizaje de la teoría de números, sucesiones y series y el álgebra.

### **6.3. MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL**

Diseñar una propuesta para el aprendizaje implica la estructuración de unidad teórica basada en los elementos epistemológicos pedagógicos y matemáticos, con el fin de argumentar y sustentar la validez de la misma mediante, juicios de valor lo suficientemente sólidos, con un gran carácter objetivo y sin adoptar posiciones totalmente individuales. Según lo anterior, es imperativo exponer un modelo pedagógico acorde a las necesidades del grupo de investigación así como referente conceptual y bibliográfico que refuercen la importancia de la propuesta.

#### **6.3.1. APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO**

Ausbel, D. (1999) plantea que el “aprendizaje implica una reestructuración activa de las percepciones, ideas, conceptos y esquemas que el aprendiz

posee en su estructura cognitiva”<sup>4</sup>. Lo anterior concibe que el conjunto de conocimientos de un individuo está estructurado a partir de generalizaciones y abstracciones, obtenidos a través de la observación, transmisión y en algunos casos de la experimentación. Ausubel señala que el conocimiento y las experiencias previas de los estudiantes deben ser pilares de la enseñanza, relacionándola a su propia estructura cognitiva con los elementos que se obtienen a través de la repetición o el descubrimiento.

El aprendizaje significativo sucede cuando la nueva información se relaciona con pre-conceptos relevantes, los cuales ya se encuentran claros y disponibles para que el estudiante los tome como un punto de partida para los nuevos saberes.

### **6.3.2. ESTRATEGIA PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS**

La solución de problemas comprende un conjunto de estrategias metodológicas a través de las cuales el docente no transmite conocimientos sino que plantea a los estudiantes situaciones de aprendizaje que le permitan establecer caminos para la elaboración de planes de modelación y así interpretar escenarios y obtener soluciones. El aprendizaje de la matemática debe ser orientado a la interpretación de la realidad y el contexto en el cual el estudiante se desarrolla; analizar y describir lo que sucede a alrededor, puede en muchas formas presentarse como un PROBLEMA.

Plantear un modelo de aprendizaje basado en la solución de problemas puede permitirle al estudiante la optimización de las competencias básicas y el desarrollo de procesos de pensamiento más complejos.

---

<sup>4</sup> Diaz, F. Hernandez, G. (1999). Estrategias docentes para el aprendizaje significativo, una interpretación constructiva. México; Ed. McGraw Hill, 35 p.

### **6.3.2.1 El problema y sus características**

Delimitar el conjunto de denotaciones y connotaciones de lo que es en realidad un problema es una tarea ardua. Sin embargo, es posible indicar una de las tantas definiciones que dentro del marco semántico pueden encontrarse. Un problema está estructurado a partir de un conjunto de proposiciones lógicas que buscan el desarrollo de operaciones, modelos y diagramas; El problema puede permitirle al individuo un análisis e interpretación de una situación.

Los problemas no son obstáculos o trampas textuales para confundir a los estudiantes; son estrategias que buscan desarrollar en el individuo las competencias básicas, poniendo a prueba la capacidad que el estudiante posee para asociar conceptos en un contexto determinado.

Los problemas no suelen ser simples enunciados, generalmente estos exigen un contenido conceptual amplio en la estructura cognitiva del individuo, así como el conocer y traer al momento elementos y experiencias pasadas.

### **6.3.2.2. Modelo para la solución de problemas**

En su trabajo "How to solve it", el matemático Húngaro George Polya (1961) propuso un método para aprender a resolver problemas por medio preguntas. El método consta de cuatro partes; Entender el Problema, concebir un plan, ejecutar el plan y mirar atrás. Basados en estos postulados.

### **6.3.2.3. La propuesta**

Autores matemáticos como Julio César de Mello y Souza (autor de "El hombre que calculaba") y Carlo Frabetti (autor de "Alicia en el país de los números") han utilizado la literatura como un medio más para atraer la atención y el interés de los estudiantes; el cuento es una narración que se puede utilizar como herramienta para ayudar al estudiante a interpretar y a comprender conceptos, y situaciones problema.

Basado en el método planteado por Polya (1999), pretendemos diseñar estrategia didáctica para la solución de problemas de triángulos rectángulos a partir del teorema de Pitágoras y de nociones de razones trigonométricas; la estrategia plantea la solución del problema en tres fases.

### 1. Interpretación y análisis

En esta fase el estudiante debe interpretar el enunciado e identificar los datos y conceptos necesarios, para luego asignar variables. En consecuencia, es preciso que el estudiante se pregunte lo siguiente:

- ¿Qué es lo que está sucediendo?
- ¿Puedo plantear el problema de un modo más sencillo?
- ¿Es posible ordenar los datos de otra forma o dibujar lo que sucede?
- ¿Qué es lo que me está pidiendo el problema?
- ¿Qué cosas sé para solucionar el problema?

### 2. Plan y ruta de trabajo

Cuando el estudiante se enfrenta a un problema, busca estrategias para hallar la solución, por ello se propone una serie de pasos ordenados, y los ejecuta. Entonces se plantea las siguientes preguntas:

- ¿Cómo voy a hacer para solucionar el problema?
- ¿Por qué esta operación es primera que ésta otra?

### 3. Elección del modelo de solución y evaluación.

Para verificar la respuesta, es necesario que el estudiante inspeccione su trabajo paso a paso.

## 6.4. MARCO DISCIPLINAR

### 6.4.1. MARCO HISTÓRICO DE LA TRIGONOMETRÍA

Desde la antigüedad el hombre se ha interesado por el uso de la trigonometría para la solución de problemas cotidianos. Las Pirámides de Egipto son un ejemplo de ello, los egipcios tuvieron inconvenientes al momento de hallar las pendientes de las caras de las pirámides, para lograr que todas fueran iguales; entonces introdujeron conceptos como el de la cotangente de un ángulo, al cual llamaron “seqt” que significa “la separación horizontal de una recta oblicua del eje vertical por unidad de variación en la altura”<sup>5</sup>, contrario a lo que se hace actualmente para hallar la pendiente de una recta, que consiste en hallar la razón entre la subida y el avance de la misma.

Los egipcios y babilónicos utilizaron propiedades y teoremas relacionados con triángulos semejantes, pero no trabajaron la medida de los ángulos a este estudio se le llamo “trilaterometria” o “triláteros” que se refiere a la medida de polígonos de tres lados.

En Grecia fueron encontrados los primeros estudios que hacen referencia a las relaciones entre ángulos centrales en un círculo y las longitudes de las cuerdas que los sujetan. Euclides en su famoso texto “Los Elementos” mostró indicios de trigonometría expresado en términos más geométricos; como la solución de triángulos con ángulos obtusos y agudos, lo que se conoce actualmente como el teorema del coseno. En el siglo V a.c. ya eran conocidas las propiedades de las cuerdas, y probablemente Eudoxo utilizó estas propiedades para calcular el tamaño de la tierra y la distancia entre el sol y la luna.

El teorema de la cuerda rota de Arquímedes contiene implícitamente un lenguaje trigonométrico refiriéndose a las formulas para los senos de suma y diferencia de ángulos. Más adelante los astrónomos de la época de Alejandría

---

<sup>5</sup> Boyer, C. (1996). Historia de la matemática, España. Ed. Alianza. 40 p.

vieron la urgencia de establecer sistemáticamente las relaciones entre los ángulos y las cuerdas.

Durante mucho tiempo matemáticos y astrónomos intentaron encontrar las medidas de la tierra; se basaron en la relación entre ángulos y cuerdas de la circunferencia del planeta. Tiempo después, durante la segunda mitad del siglo II a.c. se dio a conocer la primera tabla trigonométrica, obra aparentemente escrita por Hiparco de Nicea, razón por la cual actualmente se le conoce como “el padre de la trigonometría”. Sin embargo, y aunque no existe evidencia, se dice que Apolonio trabajó mucho antes los postulados de Hiparco.

No se sabe con exactitud como construyó Hiparco las tablas trigonométricas por que sus obras han desaparecido; se cree que el método utilizado es similar o el mismo usado por Ptolomeo. Hiparco tomó un ángulo de  $7^\circ$  y fue incrementándolo hasta acercarse a  $180^\circ$ , en la tabla fue registrando la longitud de la cuerda delimitada por los lados del ángulo central. No se conoce el radio de la circunferencia que utilizó Hiparco, sin embargo se sabe que Ptolomeo usó un radio de 60 unidades, pues los griegos usaban el sistema sexagesimal de los babilónicos.

En el siglo V d.c. en India fue escrito el Surya Siddhanta o “sistema del sol”, en él se encuentran teorías astronómicas griegas pero aparecen mezcladas con avances de la India: la trigonometría de Ptolomeo se basa en la relación entre las cuerdas y sus correspondientes arcos o ángulos centrales de la circunferencia mientras que en el Siddhanta usaron la relación entre la mitad de la cuerda y la mitad del arco o del ángulo central subtendido por la cuerda total. Así fue como apareció lo que se conoce hoy como la función seno de un ángulo, y es gracias a los hindúes y no de los griegos que se ha propagado el uso de la semicuerda hasta la actualidad.

En Arabia existían dos posturas la griega y la hindú, en esta mezcla de saberes triunfo al hindú y los avances hechos por los árabes se basan en la función

seno, a demás fue directamente por ellos que se conoció en Europa esta parte de la trigonometría. Un siglo después ya era conocida la función tangente que simplificaba algunas expresiones trabajadas hasta el momento con seno. En esta época ya la trigonometría es más sistemática y se demuestran teoremas de ángulos dobles y ángulos medios.

En el siglo X Abul Wefa dio a conocer una nueva tabla de senos con ocho decimas y con ángulos de cuatro en cuatro, realizo también una tabla de tangentes y utilizó las seis funciones trigonométricas y algunas relaciones entre ellas aunque no fueron muy acogidas en la época, tampoco se sabe a que pueblo se le atribuyen las funciones de coseno, secante o cosecante.

En el año 1464 Johann Regiomontano escribe “De triangulis omnimodis” obra con la cual se produciría el renacimiento de la trigonometría; el autor pretende independizar la trigonometría de la astronomía. Sin embargo, por su repentina muerte la obra fue impresa hasta el año 1533, aunque los manuscritos circularon por los matemáticos de Nuremberg donde trabajó Regiomontano. De triangulis omnimodis fue base para los trabajos realizados durante los principios del siglo XVI.

La obra comienza con definiciones fundamentales y luego nombra 50 proposiciones referentes a la resolución de triángulos, basándose en las propiedades de los triángulos rectángulos, para mas adelante enunciar y demostrar las leyes de senos.

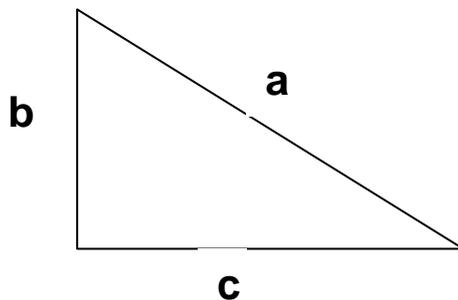
Para los árabes seguida del algebra, la trigonometría era la segunda rama en interés matemático, tal vez por esta razón las obras de esta época vienen acompañadas de tablas de funciones trigonométricas. A partir de ese momento los avances trigonométricos son triviales, lo que se ven son incrementos en las aplicaciones y tablas trigonométricas más estructuradas.

#### **6.4.2. TEOREMA DE PITÁGORAS**

Más que un algoritmo de carácter abstracto y mecánico, el teorema de Pitágoras es una de las herramientas matemáticas más utilizadas solucionar problemas y ejercicios de triángulos rectángulos; en algebra lineal el teorema es usado para demostrar teoremas, en la trigonometría es un elemento de gran ayuda.

Dentro de los contenidos temáticos de grado séptimo se encuentra el estudio de las propiedades de los triángulos rectángulos, una de las aplicaciones directas de las mismas es el reconocido teorema de Pitágoras.

"En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos". Y, "En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de uno de los catetos es igual a la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado del otro cateto".



**Si  $\triangle ABC$  es rectángulo en  $A$   
**a: hipotenusa**  
**b  $\wedge$  c son catetos**  
**entonces:****

$$a^2 = b^2 + c^2$$

### 6.4.3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Debido a que un triángulo tiene tres lados, se pueden establecer seis razones entre sus lados. Una razón trigonométrica es el cociente que existe entre los dos de sus lados, existen seis. Las razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo son:

**Seno:** razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa.

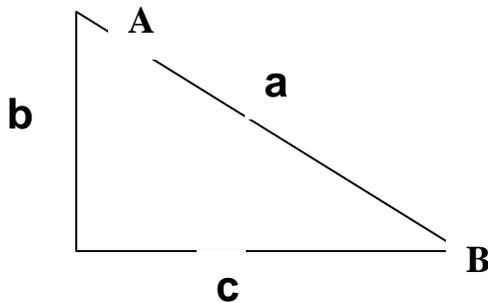
**Coseno:** razón entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa.

**Tangente:** razón entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto adyacente.

**Cotangente:** razón entre el cateto adyacente al ángulo y el cateto opuesto.

**Secante:** razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente al ángulo.

**Cosecante:** razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto al ángulo.



Si  $\triangle ABC$  es rectángulo en A

**a:** hipotenusa

**b:** es cateto opuesto  $\angle B$

**c:** es cateto opuesto  $\angle C$

entonces:

$$\text{sen}B = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{cos}B = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tan}B = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{cot}B = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{b}$$

$$\text{sec}B = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{csc}B = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{a}{b}$$

$$\text{sen}C = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{cos}C = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{tan}C = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{c}{b}$$

$$\text{cot}C = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{sec}C = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}$$

$$\text{csc}C = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{a}{c}$$

## 6.5. GLOSARIO

**ÁNGULO:** semiplano formado por el corte de dos semirrectas, estas reciben el nombre de lados y el punto de intersección es llamado vértice.

**ÁNGULO AGUDO:** ángulo cuya abertura es menor a la de un ángulo recto ( $90^\circ$ ).

**ÁNGULO DE ELEVACIÓN:** si el objeto que se está observando está por encima de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea y la horizontal se llama ángulo de elevación.

**ÁNGULO LLANO:** ángulo cuyos lados son semirrectas opuestas, por lo tanto su abertura es de exactamente  $180^{\circ}$ .

**ÁNGULO RECTO:** ángulo formado por el corte de dos rectas perpendiculares, es decir su medida es de  $90^{\circ}$ .

**ÁNGULO OBTUSO:** ángulo cuya abertura esta entre  $90^{\circ}$  y  $180^{\circ}$ , sin incluir los extremos.

**CONGRUENTE:** que tienen la misma medida.

**HIPOTENUSA:** es el lado de mayor longitud de un triángulo rectángulo, y el lado opuesto al ángulo recto.

**POLIGONO:** figura geométrica formada por segmentos consecutivos, no alineados llamados lados.

**RECTA:** es una sucesión indefinida de puntos que se prolonga en una misma dirección.

**SEGMENTO:** es una porción de recta que tiene inicio y fin.

**SEMIRECTA:** es la parte que resulta de dividir una recta.

**TRIANGULO:** es un polígono de tres lados, tres vértices y tres ángulos internos.

**TRIÁNGULOS ACUTÁNGULOS:** todos sus ángulos internos son agudos.

**TRIÁNGULOS EQUILATEROS:** todos sus lados tiene la misma medida

**TRIÁNGULOS ESCALENOS:** todos sus lados tienen medidas diferentes.

**TRIÁNGULOS ISÓSCELES:** tiene dos lados de la misma medida.

**TRIÁNGULOS OBTUSÁNGULOS:** tiene un ángulo obtuso.

**TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS:** tiene un ángulo recto.

## 6.6. MARCO LEGAL

NORMA	PLANTEAMIENTO
CONSTITUCIÓN POLÍTICA DE COLOMBIA	<b>ART.27</b> El estado garantiza las libertades de enseñanza, aprendizaje investigación y

	<p>cátedra.</p> <p><b>ART.44</b> Entre los derechos fundamentales de los niños se encuentra la educación y la cultura.</p> <p><b>ART.67</b> La educación es un derecho de la persona y es un derecho público que tiene una función social.</p>
<p>LEY GENERAL DE EDUCACIÓN LEY 115 DE 1994</p>	<p><b>ART.20</b> Objetivos generales de la educación básica, c) Aplicar y profundizar en el pensamiento lógico y analítico para la interpretación y solución de problemas de la ciencia, la tecnología t de la vida cotidiana.</p> <p><b>ART.22</b> Objetivos específicos de la educación básica en el ciclo de secundaria, c) el desarrollo de capacidades para el razonamiento lógico mediante el dominio de sistemas numéricos y geométricos para la interpretación y solución de problemas.</p> <p><b>ART.23</b> Áreas obligatorias y fundamentales, matemáticas es una de las áreas obligatorias en el plan de estudios.</p>
<p>MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL ESTANDARES BÁSICOS DE CALIDAD EN MATEMÁTICAS.</p>	<p><b>Pensamiento numérico y sistemas numéricos.</b></p> <p>Grado séptimo:</p> <p>Utilizo números racionales. En sus distintas expresiones para resolver problemas en contexto de medidas.</p> <p>Justifico procedimientos aritméticos, utilizando las relaciones y las propiedades</p>

	<p>de las operaciones.</p> <p><b>Pensamiento espacial y sistemas geométricos.</b></p> <p>Grado séptimo:</p> <p>Clasificar polígonos en relación con sus propiedades.</p> <p>Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos.</p> <p>Grado noveno:</p> <p>Reconozco y contrato propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostraciones de teoremas básicos. (Pitágoras y Tales)</p>
--	--

## **7. HIPÓTESIS**

El cuento “La razón de Hiparco”, como estrategia didáctica para la solución de triángulos rectángulos por medio del teorema de Pitágoras y de las razones trigonométricas, optimizará el aprendizaje de la geometría en los estudiantes de grado séptimo del Colegio Kapeirot.

## **8. METODOLOGÍA**

### **8.1. TIPO Y EN FOQUE DE LA INVESTIGACIÓN**

De acuerdo a las características del proyecto el tipo de investigación que abordaremos para el trabajo será de carácter cualitativo por las características de la propuesta la cuál pretende en primera medida evaluar preconceptos en la muestra para luego abordar conceptos mas estructurados.

La investigación cualitativa tiene como base explicar el comportamiento humano y las razones de dichos comportamientos. Éste tipo de investigación pretende hallar el por qué y el cómo se tomo una decisión, en las investigaciones de tipo cualitativo la poblaciones son pequeñas.

### **8.2. FASES DE LA INVESTIGACIÓN**

PRIMERA FASE comprende los primeros avances del proyecto; una consulta bibliográfica, analizar textos y documentos referentes de investigaciones relacionadas con el aprendizaje de la geometría y la trigonometría en grado séptimo.

SEGUNDA FASE en la que se realiza la primera versión del anteproyecto, el nombre, la población, los objetivos generales y específicos, y la justificación.

TERCERA FASE que consiste en el diseño de un diagnostico medido desde la eficacia, con el fin de encontrar información sobre el nivel de conocimiento de los estudiantes del grado séptimo en geometría, Se sistematiza y analiza la información para caracterizar la población.

CUARTA FASE en la que se realiza el diseño del marco legal y del marco teórico; se abordan las bases teóricas sobre el Teorema de Pitágoras, las razones trigonométricas y se realiza un recorrido por la historia de la trigonometría.

QUINTA FASE se delinear los pasos para el diseño de la propuesta, y se elabora la propuesta; “La razón de Hiparco”, que consiste en una narración acompañada de una cartilla de ejercicios, como herramienta para el aprendizaje de la solución de triángulos rectángulos por medio del teorema de Pitágoras y de las razones trigonométricas.

SEXTA FASE se presenta la propuesta “La razón de Hiparco” como estrategia didáctica para la solución de triángulos rectángulos dirigida a los estudiantes de grado séptimo del colegio Kapeirot”, y se sustenta.

### **8.3. POBLACIÓN Y MUESTRA**

El proyecto esta dirigido a los estudiantes del Colegio Kapeirot, una institución de carácter privado que se encuentra ubicado en el barrio Ciudad Montes de la localidad Puente Aranda en la ciudad de Bogotá, actualmente esta conformado por un grupo de aproximadamente 20 profesores, 300 estudiantes y 7 directivos. El colegio se encuentra ubicado en un sector con estrato socio económico igual a tres, sin embargo los estudiantes en su mayoría son estrato cuatro.

El proyecto va dirigido a una población de 31 estudiantes de grado séptimo: 11 niñas y 20 niños de edades entre los 11 y 15 años. De los cuales tres de ellos cursaron dos veces grado sexto, y uno de ellos esta cursando grado séptimo por segunda vez. La mayoría de los estudiantes empezaron su educación desde básica primaria en el colegio Kapeirot; el colegio evalúa a los estudiantes con un examen bimestral tipo icfes, pero los resultados señalan que los estudiantes no tienen la habilidad para resolver éste tipo de exámenes. La muestra será de 20 estudiantes, 7 niñas y 13 niños. La muestra se divide en dos categorías:

En la primera categoría se encuentran los estudiantes que durante el año han superado la mayoría de los logros, ésta categoría se subdivide en dos; en primer lugar están los estudiantes aplicados, que siempre están atentos a las explicaciones de la profesora, normalmente cumplen con sus trabajos y tareas puntualmente, les gustan aplicar formular y resolver ejercicios basados en otros ya propuestos, en otra subcategoría se encuentran los estudiantes que además de ser aplicados, son estudiantes que les gusta profundizar, les agrada mucho más las matemáticas y siempre están dispuestos a proponer y a resolver situaciones cada vez mas complejas; y por último, se encuentran los estudiantes inquietos y facilcitas, sólo hacen su trabajo bajo supervisión, realizan rápidamente su trabajo para luego generar indisciplina dentro del aula, sin embargo, logran cumplir con los logros propuestos.

En la segunda categoría se encuentran los estudiantes que normalmente no cumplen con los logros propuestos, realizan los trabajos y tareas sólo bajo supervisión y ayuda, no prestan atención a clase, y habitualmente no les llama la atención las matemáticas y sus aplicaciones.

#### **8.4. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS**

El diseño de la propuesta pretende en primera medida evaluar los preconceptos que tienen los estudiantes de grado séptimo del colegio Kapeirot con respecto de la geometría plana, la cartilla cuenta con un capítulo inicial denominado pretest, que de acuerdo a Torres, A. (2008) “Se aplica con el fin de identificar las falencias de los estudiantes en los temas establecidos de parte comunicativa, procedimental y resolución de problemas”<sup>6</sup>

Por otro lado, se pretende emplear el cuento, que es una narración breve de hechos imaginarios, con personas y argumentos sencillos, como estrategia

---

6 Torres, A. (2008). *Geometry easy. Juego educativo para el aprendizaje de clases de triángulos, Medidas de ángulos y teorema de Pitágoras en los Estudiantes de grado séptimo B del Liceo Santa Bárbara. Trabajo para optar al título de Licenciada en educación básica con énfasis en matemáticas, Universidad La Gran Colombia, Bogotá, Colombia* 55 p.

didáctica para motivar al estudiante a aprender a solucionar triángulos rectángulos de forma novedosa.

#### **8.4.1. VALIDACIÓN**

Teniendo en cuenta que la cartilla está dividida en tres capítulos, se plantea validar la propuesta de acuerdo al siguiente plan de acción:

**PRIMER PASO:** La ambientación, consiste en la lectura del cuento, el objetivo es involucrar al estudiante dentro de un escenario llamativo para él.

**SEGUNDO PASO:** Planteamiento de problemas, consiste en la entrega de problemas o ejercicios relacionados con la lectura de la ambientación, se busca que el estudiante proponga alternativas de solución empíricamente, ya que desconoce las reglas matemáticas para encontrar la respuesta al problema.

**TERCER PASO:** Presentación del tema y solución de problemas: consiste en presentarle al estudiante el tema y las herramientas necesarias para la solución del problema desde el punto de vista matemático. Se le entregan diversos ejercicios, incluidos los resueltos empíricamente para afianzar el tema.

## 9. BIBLIOGRAFÍA

### 9.1. BÁSICA Y DE REFERENCIA

Boyer, C. (1996). Historia de la matemática, España; Ed. Alianza. 40 p.

De Zubiria, J. (1994). Tratado de Pedagogía Conceptual: Los modelos pedagógicos. Colombia, Fundación Merani. Fondo de Publicaciones Bernardo Herrera Merino, p. 8.

Díaz, F. & Hernández, G. Estrategias docentes para el aprendizaje significativo, una interpretación constructiva. México, Ed. McGraw Hill, 35 p.

Chacón, A., Monge, A. & Morales, C. (2007). Comprensión de razones trigonométricas: niveles de comprensión. Costa Rica.

Ibáñez J. & López. O. (2008). Niveles de complejidad en la solución de problemas de geometría dinámica en ambientes Computacionales. Colombia.

Jiménez L., Picado M. (2003). La historia de la matemática: una herramienta metodológica en procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría en el currículo de sétimo año.

Oliver, Rocerau, Valdez, Vilanova, Medina Astiz & Laviada. (2007). Análisis de algunos temas de geometría en textos escolares para el tercer ciclo de la educación general básica. Universidad Nacional de Mar de Plata de Argentina.

Polya, G. (2002). Cómo plantear y resolver problemas. Mexico.

Torres, Andrea. (2008). Geometry easy. Juego educativo para el aprendizaje de clases de triángulos, Medidas de ángulos y teorema de Pitágoras en los Estudiantes de grado séptimo B del Liceo Santa Bárbara. Colombia, 55 p.

Wills, D., Guarín, H. & Takeuchi, Y. (1982). *Hacia la matemática un enfoque estructurado*. Colombia. Grupo Editorial Andino. 259 p.

## 10. PLANEACIÓN O PROPUESTA ECONÓMICA

Nombre del proyecto: El cuento “La razón de Hiparco”, como estrategia didáctica para el aprendizaje de la solución de triángulos rectángulos dirigida a los estudiantes de grado séptimo del Colegio Kapeirot.

Nombre de los investigadores: Leidy Katherine Ayala Reyes y Carlos David Fonseca Puerto.

Facultad: Ciencias de la educación.

RECURSOS	CANTIDAD	COSTO UNITARIO	COSTO TOTAL
INTERNET	MENSUAL	30.000	360.000
COMPUTADOR	2	1.400.000	2.800.000
IMPRESORA	2	150.000	300.000
TINTA NEGRA	1	60.000	60.000
TINTA COLOR	3	60.000	180.000
CD	2	1.000	2.000
MEMORIAUSB	2	30.000	60.000
TRANSPORTE	MENSUAL	50.000	600.000
FOTOCOPIAS	3000	50	150.000
LIBROS	3	10.000	30.000
RESMAS DE HOJAS	2	11.000	22.000
IMPRESIÓN LASER	100	300	30.000
DISEÑADOR GRAFICO	1	500.000	500.000
		<b>TOTAL</b>	<b>5.094.000</b>

## 11. INFORME DE INVESTIGACIÓN

### 11.1. RESULTADO Y ANÁLISIS

La propuesta se aplicó en cinco sesiones de hora y media cada una, a los estudiantes de grado séptimo del colegio Kapeirot,

Primera sesión.

Se realizó una introducción a los estudiantes sobre el trabajo que se pretendía realizar, se les entregó la cartilla, la cuál observaron con atención, seguidamente la profesora leyó el primer capítulo del cuento; y todos los estudiantes estuvieron atentos a la historia, inmediatamente se les solicitó resolver los ejercicios propuestos, los cuales pretendían ahondar sobre los conceptos básicos de los estudiantes en geometría plana.

Los ejercicios buscan ubicar al estudiante en contextos de situaciones para el aprendizaje significativo; en el cuento, se les presenta a los estudiantes un escenario: dos personajes deben entrar a un castillo rodeado por un río lleno de cocodrilos y árboles, la puerta se encuentra cerrada, la única forma de entrar al castillo es por medio de una ventana que está a determinada altura, entonces, se les realiza la siguiente pregunta:

¿Qué tendrían que hacer los personajes para entrar por la ventana?

Basados en la propuesta del trabajo de investigación, se les indica a los estudiantes que para resolver dicho problema es necesario seguir unos pasos: Interpretación y análisis del problema, Plan y ruta de trabajo, y la elección del modelo de solución y evaluación. Entonces la mayoría de estudiantes sugirieron derribar un árbol para ingresar por la ventana, otros pocos sugirieron utilizar una cuerda que llevaban los personajes para engancharla en la ventana y escalar sin ser comidos por los cocodrilos, ambas resultan ser válidas, sin embargo, en el siguiente ejercicio se les propone derribar un árbol, se les da

cuatro opciones con diferentes medidas de las alturas de los árboles, y se les pide que indiquen la mejor opción; los estudiantes trabajaron bajo los pasos que se les había sugerido para la resolución de problemas.

Las respuestas que se encontraron fueron satisfactorias, durante toda la sesión se observó un ambiente de trabajo, todos los estudiantes estuvieron atentos, manifestaron que nunca habían realizado éste tipo de ejercicios.

Segunda sesión.

En ésta ocasión se les solicitó a los estudiantes leer el segundo capítulo del cuento, esta vez, algunos de los estudiantes se vieron reacios hacia la lectura, se presume que les gusta leer poco, prefieren escuchar. Al finalizar el segundo capítulo de la historia los estudiantes procedieron a resolver los ejercicios propuestos; uno de ellos consistía en realizar el plano de un castillo con figuras tipo Tangram, dicho plano es la representación una de las demostraciones geométricas del teorema de Pitágoras. El ejercicio pretendía familiarizar al estudiante con el teorema. Se pudo observar que los estudiantes que son mecanicistas no les gustó mucho el ejercicio, porque manifestaron que les hubiese gustado que se les explicara en el tablero el teorema acompañado de ejemplos, para luego resolver ejercicios; por el contrario, los estudiantes que normalmente necesitan supervisión y ayuda de otros se interesaron bastante en la situación y vieron el ejercicio como un juego, finalmente todos lograron armar el tangram basándose en los dibujos del cuento.

En otro ejercicio de la misma sesión se les solicitó a los estudiantes hallar el área de cada una de las habitaciones del plano del castillo con unos cuadrados como una unidad de medida, los estudiantes encontraron áreas de 25 unidades, 16 unidades y 9 unidades, se les insinuó que la suma de las áreas de los cuadrados más pequeños, es igual al área del cuadrado grande, y se les pidió encontrar las raíces cuadradas de cada uno de las áreas de los cuadrados, ellos mismos dedujeron que las raíces cuadradas corresponden la

medida de los lados del triángulo ubicado en el medio del plano del castillo. Sobreponer los cuadrados de unidad de medida dentro de los cuadrados del plano del castillo les permitió a los estudiantes afianzar el concepto de raíz cuadrada, pues normalmente lo confundían con dividir el número en dos. Ahora los estudiantes tendrán presente que la raíz cuadrada será la medida del lado del cuadrado.

Es importante anotar que los estudiantes que usualmente no superan los logros fueron los que más rápidamente avanzaron; terminaron todos los ejercicios propuestos en una misma sesión, entre tanto, los estudiantes aplicados y los inquietos se distrajeron bastante y no alcanzaron a finalizar todos ejercicios del capítulo.

Tercera sesión.

En esta sesión se quiso profundizar en el Teorema de Pitágoras, para ello se les dio, a los estudiantes, un grupo de números que representaban áreas y se les pidió que escogieran ternas de números que cumplieran las condiciones para formar dicho teorema, luego debieron dibujar el triángulo rectángulo y los cuadrados sobre cada lado del triángulo, hallar la raíz cuadrada de cada área dada. Los estudiantes volvieron a inferir que aquella raíz se trataba de la medida de los lados del cuadrado y por tanto del triángulo hallado.

Seguidamente y sin que se les pidiera, los estudiantes a quienes no se les conoce como los mejores, resolvieron las siguientes actividades que proponían hallar un lado faltante de triángulos rectángulos conociendo dos de ellos, una de la forma que encontraron para resolver el problema fue dibujar cuadrados sobre cada lado del triángulo dado, encontrar el área de los cuadrados a los cuales se les conoce la medida del lado, sumarlas y hallar la raíz cuadrada de la suma. Fue un resultado no esperado, pues los estudiantes que se conocen a nivel general como los mejores del curso, no les agrado la actividad y pidieron que se les explicará como están acostumbrados a que se haga en clase y

hasta que no se hizo de esta manera ellos no resolvieron los ejercicios, por que no lograron entenderlo por la falta de interés.

Cuarta sesión.

Los estudiantes terminaron la lectura del cuento rápidamente para continuar realizando los ejercicios propuestos del nuevo tema. El primer problema propuesto requiere las razones trigonométricas para hallar la solución, pero a los estudiantes no se les ha explicado este tema, lo que se busca entonces, es que el estudiante dé alternativas de solución a los obstáculos que se les presentan a los personajes del cuento. A continuación se quiere aclarar los conceptos de hipotenusa, lado y ángulo opuesto y adyacente de un triángulo y para ello se relacionan los escenarios del cuento con actividades en donde el estudiante debe hallar o ubicar objetos en lados y ángulos opuestos o adyacentes de lugares que tienen forma de triángulos rectángulos como la plazoleta de la ciudad y el castillo donde se efectúa el final del cuento. Este ejercicio le resulto interesante a los estudiantes por que “con ayuda de pistas lograron resolver los acertijos jugando”, según afirmó uno de ellos, además se les pidió que dibujaran y colorearían y esto les agrado, otro de los ejercicios fue completar frases con palabras dadas. En este punto de la aplicación se puede asegurar que los estudiantes tienen totalmente claros los conceptos de opuesto y adyacente, que era lo que se pretendía.

Quinta sesión.

Ya teniendo claros los conceptos necesarios para resolver triángulos rectángulos y con el trabajo que realizaron los estudiantes para aprender a solucionar problemas, se pueden dar conocimientos referentes a trigonometría y específicamente sobre razones. En la quinta y última sesión se les explicó a los estudiantes lo que representa cada una de las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) en términos de cocientes de los lados de un triángulo rectángulo y se les pidió que revisaran los ejercicios resueltos con

anterioridad y los desarrollarán nuevamente con la ayuda de la calculadora para verificar las respuestas. Para realizar la actividad propuesta fue necesario recordar la regla de la igualdad de las ecuaciones y así poder despejar correctamente el dato necesario. A los estudiantes les pareció interesante el hecho de que existiera una forma de hallar la medida un lado del triángulo conociendo únicamente la medida de un lado y un ángulo, así que intentaron realizarlo con triángulos no rectángulos, ejercicio en el cual pudieron notar que además conocían un dato adicional, el ángulo recto, de no conocer este dato no podrían utilizar las razones trigonométricas para resolver el triángulo.

## **11.2. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

La Propuesta “La razón de Hiparco” dirigida a los estudiantes de grado séptimo del Colegio Kapeirot, diseñada a partir de los fundamentos matemáticos, pedagógicos, históricos y legales planteados en el presente trabajo, es una estrategia para el aprendizaje de la solución de triángulos rectángulos a partir del teorema de Pitágoras y de nociones de razones trigonométricas; a través de la observación de los autores del trabajo al momento de la validación de la propuesta, y de acuerdo a ejercicios resueltos por los estudiantes tuvo más incidencia en los alumnos que normalmente no les gusta y no entienden la forma tradicional de exposición del tema, adicionalmente, es una herramienta de apoyo para el docente del área de matemáticas. Contar en el aula de clase con un material diseñado exclusivamente para tal fin puede facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Solucionar los problemas propuestos dentro de la cartilla de forma empírica, a partir de las sugerencias de los estudiantes y luego a partir de los pasos planteados como propuesta para la solución de problemas [Interpretación y análisis, Plan y ruta de trabajo y Elección del modelo de solución y evaluación.] permitió que los estudiantes reflexionaran sobre sus primeras respuestas; replantear los ejercicios bajo un esquema de trabajo conlleva a una solución

mas segura y acertada. Los estudiantes afianzaron dicho proceso a medida que iban pasando de un capitulo al otro.

Se debe señalar que la propuesta hizo más efecto en una clase de estudiantes que en otra; los estudiantes que normalmente realizan correctamente los procesos algorítmicos manifestaron apatía y tuvieron dificultades en la solución de problemas en contextos llevados a la realidad, por el contrario, la cartilla generó mas expectativas en los estudiantes que presentan dificultades en la solución de problemas con algoritmos; esta clase de estudiantes estuvo mas atenta a la lectura del cuento, resolvieron con mayor brevedad los ejercicios propuestos y sus respuestas fueron mas concretas que la de los estudiantes que hacen buenos procesos.

La enseñanza de razones trigonométricas bajo el esquema de la solución de problemas en contextos que buscan llevar al estudiante a situaciones reales, permitió no solo avanzar en los contenidos del área sino que además permitió afianzar en algunos estudiantes conceptos tales como áreas, perímetros, raíces; los estudiantes manifestaron entender las razones del por qué de los conceptos y de los procedimientos, dieron razones del por qué se les solicitó hallar ternas pitagóricas y relación con las raíces, se les facilitó hallar áreas y perímetros con el material de la cartilla. De igual forma, la ejecución de un plan de trabajo, interpretar y analizar, escoger un plan y una ruta de trabajo y la elección del modelo de solución y evaluación facilitó a los estudiantes hallar la solución de los problemas planteados.

Es preciso seguir formulando estrategias que dinamicen el aprendizaje de las razones trigonométricas y en general de la geometría plana; estrategias tales como cuentos, juegos, cartillas, etc., pueden ser parte de una gama de alternativas generadoras de estímulos para el aprendizaje; La cartilla diseñada a partir de fundamentos de la teoría del aprendizaje significativo resultó ser una opción más dentro del grado séptimo del colegio Kapeirot para el aprendizaje de la solución de triángulos rectángulos. El hecho de relacionar los

preconceptos [abordados desde el primer capítulo de la cartilla] con la nueva teoría [Capítulos dos y tres], y la forma de abordar dicha teoría [la historia de Hiparco, los ejercicios y el material propuesto para la solución de los ejercicios], permitió ubicar al estudiante en contextos reales y atractivos para adquisición de nuevos conocimientos. Sin embargo, vale la pena resaltar que todos los estudiantes tienen motivaciones e intereses diferentes; el docente debe encontrar un punto de equilibrio en el aprendizaje de la solución de problemas por medio de algoritmos y ejercicios empíricos.

## 12. ANEXOS

### ANEXO 1: PRETEST

**UNIVERSIDAD LA GRAN COLOMBIA  
FACULTAD DE CIENCIAS DE EDUCACIÓN  
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS  
PRE-TEST**

El pre-test consta de 8 preguntas cada una con un enunciado y cuatro opciones de respuesta de las cuales el estudiante deberá elegir la que considere correcta. Si señala más de una respuesta en cada pregunta, esta será anulada.

NOMBRE Daniela Gil Montoya GRADO: Septimo EDAD 11

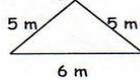
1. La definición de cuadrado es:
- a. Polígono de cuatro lados iguales.
  - b. Figura de tres lados.
  - c. Polígono de lados congruentes y ángulos de 60°.
  - d. Polígono de cinco lados congruentes.



2. El perímetro de un polígono se define como:
- a. Figura geométrica.
  - b. Suma de las longitudes de los lados de una figura.
  - c. Número de unidades cuadradas que se pueden ubicar dentro del polígono.
  - d. Número de lados de una figura.
3. El área de un polígono es:
- a. Una figura geométrica.
  - b. Suma de las longitudes de los lados de una figura.
  - c. Número de unidades cuadradas que se pueden ubicar dentro del polígono.
  - d. Número de lados de una figura.

4. El perímetro de los siguientes polígonos son respectivamente:

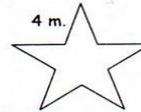
A. Triángulo



B. Cuadrado

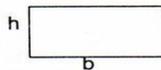


C. Polígono regular



- a. Triángulo 16m
  - b. Triángulo 16m,
  - c. Triángulo 26m,
  - d. Triángulo 150m,
- Cuadrado 8m
  - Cuadrado 8m
  - Cuadrado 9m
  - Cuadrado 2m
- Polígono regular 40m
  - Polígono regular 20m
  - Polígono regular 53m
  - Polígono regular 40m

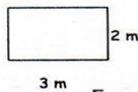
5. La fórmula que se utiliza para hallar el área de un rectángulo es:



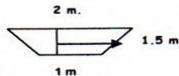
- a.  $A = \frac{bxh}{2}$
- b.  $A = bxb$
- c.  $A = bxh$
- d.  $A = a+b$

6. El área de los siguientes polígonos respectivamente es:

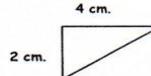
A. Rectángulo



B. Trapecio



C. Triángulo



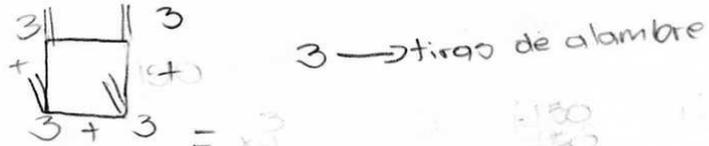
3 m 5m

4.5m

6cm

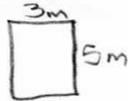
- |               |                               |                                |                              |
|---------------|-------------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| a.            | Rectángulo $6 \text{ m}^2$ ,  | Trapezio $2.25 \text{ m}^2$ ,  | Triángulo $4 \text{ cm}^2$ . |
| <del>b.</del> | Rectángulo $5 \text{ m}^2$ ,  | Trapezio $4.5 \text{ m}^2$ ,   | Triángulo $6 \text{ cm}^2$ . |
| c.            | Rectángulo $6 \text{ cm}^2$ , | Trapezio $2.25 \text{ cm}^2$ , | Triángulo $4 \text{ m}^2$ .  |
| d.            | Rectángulo $4 \text{ m}^2$ ,  | Trapezio $3 \text{ m}^2$ ,     | Triángulo $8 \text{ cm}^2$ . |

7. Un granjero posee una extensión de tierra para el cuidado del ganado de  $150\text{m}$  de largo por  $70\text{m}$  de ancho. A raíz de este hecho necesita cercar el terreno con alambre de púas, si necesita tres tiras de alambre entre cada posta para que quede bien cercado el granjero utiliza:  
(Escriba las operaciones pertinentes para la solución del problema)



- a.  $1320 \text{ m}$ .  
~~b.~~  $1480 \text{ m}$ .  
 c.  $6243 \text{ m}$ .  
 d.  $1480 \text{ mm}$ .

8. La habitación de Andrés tiene  $5\text{m}$  de largo por  $3\text{m}$  de ancho. Desea cubrir el suelo con baldosas cuadradas de  $50\text{cm}$  de lado. Andrés necesita: (Escriba las operaciones pertinentes para la solución del problema)



$$\frac{3}{0.5} \times \frac{5}{0.5} = 100$$

$$1\text{m} = 100\text{cm}$$

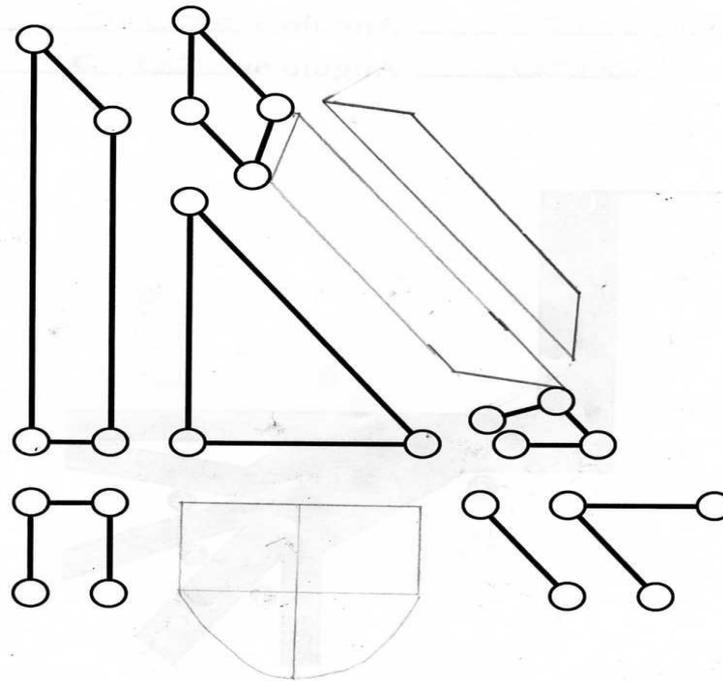
- a. 95 baldosas  
~~b.~~ 80 baldosas  
 c. 60 baldosas  
 d. 63 baldosas

ANEXO 2. ALGUNOS EJERCICIOS DE LA CARTILLA

INTERVISTA = BRIAN BAQUERO, JO-  
VAN PUENTES, CRISTIAN LIZICET, DA-  
LME Y PES.

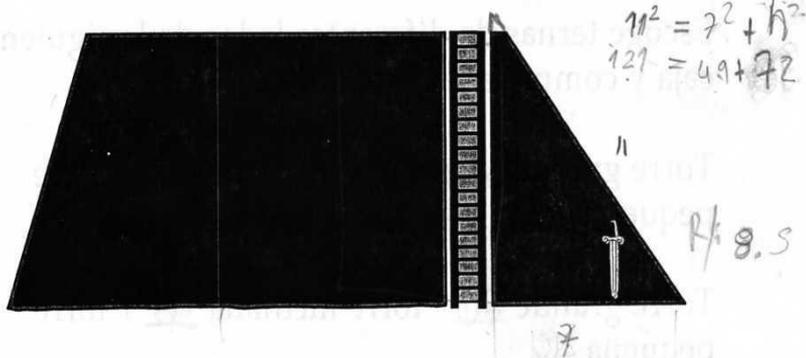
6- Al frente del otro lado de la plaza quiero unos  
bellos jardines con flores así: claveles, rosas, marga-  
ritas, más claveles, más rosas y más margaritas.

Grafico de la ciudad:

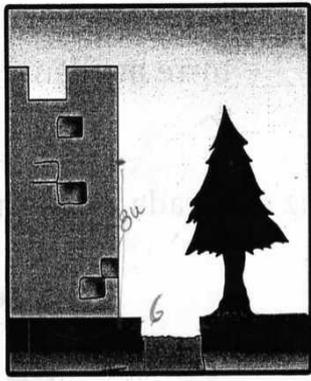


### Actividad No 3

1-Halla la altura de la meseta que Hiparco y Solón cruzaron para encontrar la espada encantada.



2-Verifica tu respuesta de la actividad No 4 del capitulo 1 usando lo que aprendiste con el teorema de Pitágoras.



$(\text{Longitud del árbol})^2 = (\text{altura de la torre})^2 + (\text{longitud del rio})^2$   
 $\underline{10}^2 = \underline{8}^2 + \underline{6}^2$   
 Ahora resuelve.  
 $\underline{100} = \underline{64} + \underline{36}$   
 ¿Se cumple la igualdad? \_\_\_\_\_

4- La malvada reina planea destruir la ciudad para construir una mas grande.

¿Qué otras áreas cumplen las condiciones del teorema de Pitágoras?

Escoge ternas de diferentes lados de la siguiente caja y completa las igualdades.

Torre grande 64 = torre mediana 48 + torre pequeña 16

Torre grande 81 = torre mediana 36 + torre pequeña 49

Torre grande 100 = torre mediana 64 + torre pequeña 36

Torre grande 74 = torre mediana 49 + torre pequeña 25

5 - Halla la raíz cuadrada de las áreas de cada una de las torres

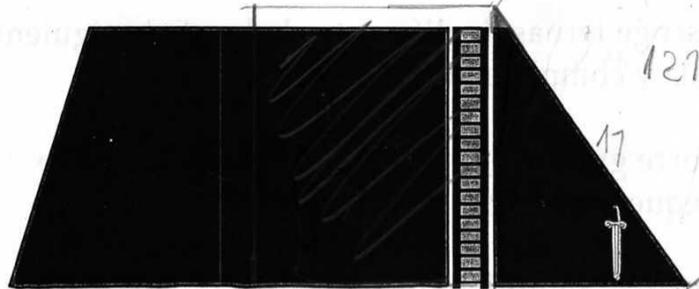
125  
49  
74



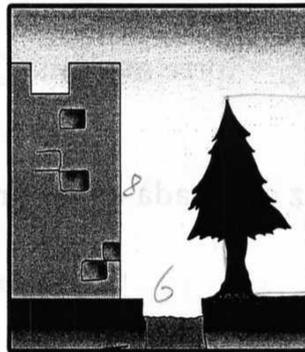
30

### Actividad No 3

1-Halla la altura de la meseta que Hiparco y Solón cruzaron para encontrar la espada encantada.



2-Verifica tu respuesta de la actividad No 4 del capítulo 1 usando lo que aprendiste con el teorema de Pitágoras.



$$(\text{Longitud del árbol})^2 = (\text{altura de la torre})^2 + (\text{longitud del río})^2$$

Ahora resuelve.

$$\underline{100}^2 = \underline{64}^2 + \underline{36}^2$$

¿Se cumple la igualdad? \_\_\_\_\_

ANEXO 3. FOTOS DE LA VALIDACIÓN.



