SELECCIÓN DE TEMAS PARA ESTUDIANTES DE INGENIERÍAS

UNIVERSIDAD
La Gran Colombia

Selección de Temas para Estudiantes de Ingenierías / Leidy Bibiana Pinzón Cubillos, Mónica Montoya Cortés. -- [et al.] 1a ed-- Bogotá: Universidad La Gran Colombia, 2021

324 páginas.

ISBN: 978-958-5179-60-8
ISBN-E: 978-958-5179-61-5

1. Cálculo diferencial -- ejercicios, etc. 2. Estadística descriptiva etc. I. Montoya Cortés, Mónica II. Universidad La Gran Colombia.

515.33 SCDD 23 ed.
STST-Biblioteca Universidad La Gran Colombia

Primera edición: 2021
Hecho en Colombia
Made in Colombia

Editorial:

Universidad La Gran Colombia
Carrera 5 No. 12 B - 49 - Teléfono: 3276999 ext.: 1048 - 1049 - 1050.
investigaciones.editorial@ugc.edu.co - direccion.investigaciones@ugc.edu.co
Bogotá D.C., Colombia
Diseño y diagramación:
Islenny Lizeth González

Portada:
Imagen intervenida tomada de internet

Contenido

Precálculo. Conceptos básicos de matemáticas

Edgar Alberto Barón Poveda
Luis Eduardo Sánchez Guzmán

UNIVERSIDAD
La Gran Colombia

1. Introducción

El siguiente material proporciona algunos contenidos seleccionados de los llamados temas básicos de las matemáticas, que permitirán al estudiante grancolombiano aproximarse a revisar y recuperar ideas y conceptos con los que seguramente trabajó durante su proceso de enseñanza-aprendizaje en los cursos de matemáticas. El material también presenta una serie de ejercicios y problemas que apoyarán los aprendizajes adquiridos.

Inicialmente se hará un recuento de cada uno de los subconjuntos que conforman el conjunto de los números reales; posteriormente, las operaciones suma y la multiplicación de números reales y sus propiedades.

En seguida se revisará en la potenciación, la radicación, la logaritmación y sus propiedades, pasando luego a la racionalización, las razones y proporciones junto al conocido Teorema de Thales.

A continuación, nos encontraremos con un recuento sobre las expresiones algebraicas y la manera de factorizarlas y finalmente trabajaremos ecuaciones de primer y segundo grado.

En cada uno de los anteriores apartados el estudiante encontrará la definición, algunos ejemplos y actividades propuestas con el fin de practicar lo aprendido. Con los temas abordados anteriormente, se pretende que el estudiante grancolombiano cuente con material de apoyo necesario para lograr dar inicio al cálculo.

2. Objetivos

2.1. General

Proporcionar herramientas que permitan, al estudiante grancolombiano, superar las dificultades presentadas en el desarrollo de actividades matemáticas y propias de las ciencias básicas.

2.2. Específicos

Desarrollar actividades que le permitan al estudiante grancolombiano afianzar los conocimientos básicos de matemáticas con los que cuenta.

Utilizar los conocimientos adquiridos, en su proceso de formación matemática, en la solución de problemas propios de las ciencias básicas.

3. Competencias

- Opera de manera comprensible con el conjunto de los números reales.
- Gestiona la información necesaria para la solución de problemas.
- Analiza diferentes alternativas de solución de una situación problema para la toma de decisiones.
- Utiliza los conocimientos adquiridos para la solución de situaciones en los que se requieran.

4 El conjunto de los números reales

4.1 Números naturales (N)

El conjunto de números que utilizamos para contar, incluido el cero (0), lo conocemos como los números naturales. Para denotar el conjunto de los números naturales utilizamos la letra N. Así, de esta manera:

$$N=\{0,1,2,3,\ldots\}$$

4.2 Números enteros (Z)

La necesidad del hombre por representar temperaturas bajo cero, deudas, entre otros, permite la existencia del conjunto de los números enteros. Donde aparecen, además, de los números naturales sus inversos aditivos. El conjunto de los números enteros los denotaremos mediante la letra Z. Es decir,

$$Z=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$$

4.3 Números racionales (Q)

Para representar situaciones en las cuales sea necesario dividir la unidad en partes iguales, es necesario hacer uso del conjunto de los números racionales. El conjunto de los números racionales es de la forma a/b:donde a y b $\in$Z,con b$\neq$0, y los denotaremos utilizando la letra Q. Así las cosas:

$$Q=\{a/b:\text{donde } a \text{ y } b \in Z, \text{con } b\neq 0\}$$

4.4 Números irracionales (I)

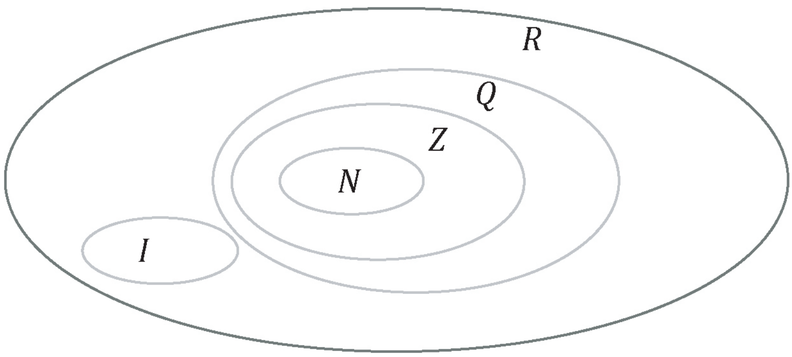
El conjunto de números que no se pueden expresar como un número racional se conoce como números irracionales, es decir, aquellos números decimales con cifras decimales infinitas no periódicas. Para referirnos al conjunto de los números irracionales lo haremos utilizando la letra I. Es decir:

$$I=\{\pi, e, \sqrt{2}, \sqrt{(3\ )}, \ldots\}$$

A la unión entre del conjunto N, Z, Q e I se le conoce como el conjunto de los números reales, el cual lo denotaremos con la letra R.

$$R=Q \cup I$$

De lo anterior podemos concluir



Actividad

Indique a qué conjunto numérico pertenece cada número:

Número	N	Z	Q	I
-5				
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$				
$\frac{5}{9}$				
π				
10				
$0,3333...$				
$-\frac{4}{7}$				
$\sqrt{625}$				
4^4				
-254				

5. Operaciones en el conjunto de los números reales

5.1. Suma en los reales

Sean a y $b \in R$; $a+b=c$,donde $c \in R$. Se llama sumandos a a y b, mientras c se le conoce como suma o diferencia. A partir de lo anterior, podemos concluir que, la suma en el conjunto de los números reales es una operación cerrada.

Para tener en cuenta:

1. Si sumamos dos números reales con igual signo. Sumamos los números y dejamos el mismo signo.

2. Si sumamos dos números reales con diferente signo; encontramos su diferencia y dejamos el signo del número cuyo valor absoluto sea mayor.

Ejemplo

$$a.\ -3 + [-8] = -11$$

$$b.\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Actividad

Resuelva las siguientes operaciones:

a. $(-11 + 8) + (5 - 9) =$

b. $(\frac{3}{5} - 6) - (4 + \frac{2}{3}) =$

c. $-\frac{2}{3} + \frac{2}{7} + \frac{4}{9} =$

d. $[(4 - 5) - (-3 -9)] + [(13 + (-6) -8] =$

e. $1752{,}25 - 12235{,}84 =$

5.2. Propiedades de la suma de números reales

Sean a,b,c números reales y la operación Suma entre ellos, se cumple las siguientes propiedades:		
Propiedad	Enunciado	Ejemplo
Clausurativa	$a+b=c$	$3+5=8$
Conmutativa	$a+b=b+a$	$8+3=3+8$ $11=11$
Asociativa	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(3+2)+5=3+(2+5)$ $5+5=3+7$ $10=10$
Modulativa	$a+0=a$. El módulo de la suma es el cero.	$\frac{1}{15} + 0 = \frac{1}{15}$
Inversa	$a+(-a)=0$	$\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) = 0$

5.3 Multiplicación en los reales

Sean a,b y c números reales $a \cdot b=c$, donde a y b se llaman factores y c producto.

Para multiplicar dos números reales tendremos en cuenta la siguiente ley de signos:

$$+\cdot+=+$$
$$-\cdot-=+$$
$$+\cdot-=-$$
$$-\cdot+=-$$

La cual podemos resumir de la siguiente manera, la multiplicación de dos signos iguales da como resultado positivo, mientras la multiplicación de signos distintos da negativo.

Ejemplo:

$$a.\ \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{12}{6} = 2$$

$$b.\ 3 \cdot (-8) = -24$$

Actividad

Teniendo en cuenta lo trabajado anteriormente, resuelva:

a. $-\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{7}$

b. $(\frac{4}{2}\ 2) \cdot (\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{9})$

c. $(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}) \cdot 24 =$

d. $-0{,}345x - 0{,}0546 =$

e. $(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{3\pi}{2}) \cdot (\frac{1}{2}) =$

5.4. Propiedades de la multiplicación de números reales

Sean a,b,c números reales y la operación multiplicación entre ellos, se cumple las siguientes propiedades:		
Propiedad	**Enunciado**	**Ejemplo**
Clausurativa	$a \times b = c$	$-7+6=-42$
Conmutativa	$a \times b = b \times a$	$8 \times 3 = 3 \times 8$ $24=24$
Asociativa	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(3+2)+5=3+(2+5)$ $5+5=3+7$ $10=10$
Modulativa	$a+1=a$. El módulo de la multiplicación es el uno.	$\frac{2}{7} \times 1 = \frac{2}{7}$

Inversa	$a \times 1/a=1$	$5 \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{5}{5} = 1$
Distributiva	$a(b+c)=a \cdot b+a \cdot c$	$5(6+3)=5 \cdot 6+5 \cdot 3$ $5 \cdot 9=30+15$ $45=45$

Para tener en cuenta:

El valor absoluto de cualquier número es la distancia que hay entre el número y el punto de referencia en la recta numérica, es decir, el cero. El valor absoluto de un número a lo denotaremos así $|a|$.

Ejemplo:

$$|3|=3$$
$$|-3|=3$$

Ya que la distancia que hay entre 3 y 0 es la misma que hay entre -3 y 0, 3 unidades.

6. Potenciación de números reales

La potenciación consiste en la multiplicación del mismo factor varias veces. En general, podemos representar la potenciación de la siguiente manera:

$$a^n = a \times a \times a \times \ldots$$
n veces

En la potenciación podemos encontrar los siguientes términos.

Base: Es el factor que se va a multiplicar.

Exponente: Corresponde al número de veces que debemos multiplicar el factor (la base).

Potencia: Es el resultado que obtenemos después de realizar la multiplicación.

Ejemplo:

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

En el ejemplo la base corresponde al número 3, el exponente al 4 y la potencia es 81.

6.1. Propiedades de la Potenciación

1. Cualquier número con exponente cero, es igual a uno. Es decir, $a^0 = 1$.

Ejemplo:

$$7^0 = 1$$

2. El producto de potencias con igual base y distinto exponente da como resultado, una potencia con la misma base y exponente igual a la suma de los exponentes. Es decir,

$$a^n \cdot a^m = a^{(n+m)}$$

Ejemplo:

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^5$$

3. La potencia de un producto es igual al producto de los factores elevados al exponente. Así:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Ejemplo:

$$(x \cdot 5)^2 = x^2 \cdot 5^2 = 25x^2$$

4. El cociente de potencias con igual base y distinto exponente da como resultado una potencia con la misma base y exponente igual a la diferencia de los exponentes. Es decir:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Ejemplo:

$$\frac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} = 4^2$$

5. La potencia de un cociente. Es igual al numerador y al denominador elevados al exponente. Lo que podemos expresar de la siguiente manera:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{3 \times 3 \times 3}{2 \times 2 \times 2} = \frac{27}{8}$$

6. La potencia de una potencia. Es igual a la base elevada al producto de los exponentes. Así,

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

Ejemplo:

$$((-3)^2)^3=(-3)^{2*3}=(-3)^6$$

7. Potencia con exponente negativo. Primero la convertimos dividiendo a 1 entre la potencia con exponente positivo y luego solucionamos el cociente.

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

Ejemplo:

$$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$

8. Potencia con exponente racional. Cuando nos encontramos con potencias de este tipo la podemos escribir en forma de radical teniendo en cuenta lo siguiente: El denominador del exponente expresa el índice de la raíz y el numerador el exponente de la base. Así las cosas, tendremos:

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt{a^n}$$

Ejemplo:

$$4^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{4^3} = \sqrt[2]{4 \text{ x } 4 \text{ x } 4} = \sqrt{64} = 8$$

7. Radicación de números reales

Como se vio en el apartado anterior, los radicales los podemos expresar como potencias de exponentes racionales, es decir: $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$.

En un radical podemos identificar los siguientes términos:

Índice

$$\sqrt[n]{a} = b$$

Raíz

Radicando

Lo que nos indica que $b^n = a$. Donde n es un número natural, a y $b \in R$.

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{27} = 3, luego\ 3^3 = 27$$

7.1. Propiedades de la radicación

1. Raíz enésima de un producto. Es igual al producto de las raíces de los factores. Es decir: $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} x \sqrt[n]{b}$

Ejemplo:

$$\sqrt[4]{16 \, x \, 81} = \sqrt[4]{16} \, x \, \sqrt[4]{81} = 2 \, x \, 3 = 6$$

2. Raíz enésima de un cociente. Es igual al cociente de las raíces. Así,

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[5]{\frac{32}{1024}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{1024}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

3. Raíz de una raíz. Es la raíz de índice igual al producto de las raíces.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mxn]{a}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$$

Actividad:

1. Aplique las propiedades para solucionar las siguientes operaciones

a. $7^2 \cdot 7^3$

b. $xy^3 \cdot x^5y^2$

c. $\dfrac{6x^2y^6}{2xy^2} =$

d. $\dfrac{9x}{2y} \times \dfrac{3y^2}{6x^3} \times \dfrac{4m^4}{3n^4} =$

e. $\left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2}\right)^3$

f. $\sqrt[3]{8x^3 =}$

g. $\sqrt[4]{\dfrac{6561}{10000}}$

h. $\sqrt[3]{27y^6} \times \sqrt[3]{64m^9}$

i. $\sqrt{2704 \times 225} =$

j. $\sqrt{\dfrac{1024}{256}}$

2. Cambie el signo de interrogación por el término que permita que la igualdad se cumpla.

a. $35^? = 1$

b. $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = ?^6$

c. $(-7)^3 = ?$

d. $-4^{-3} = ?$

e. $x^{-3} \cdot (?) = x^4y^2$

f. $x^? = \sqrt[5]{x^6}$

g. $\sqrt[?]{2401} = 7$

h. $\dfrac{x^3y^4\sqrt{xy}}{x(xy)^{\frac{1}{2}}}$

i. $\sqrt{\sqrt[3]{?}} = 4$

j. $\sqrt{(xy)^4} = (xy)^?$

8. Logaritmación

Podemos definir el $log\_a\ x=n$, lo que se lee como: logaritmo en base a de **x** es igual a **n**, es decir $a^n=x$.

Ejemplo:

$log_9\ 729=$ (Logaritmo en base 9 de 729)

Lo que nos piden es encontrar el exponente al que debo elevar el nueve (la base) para obtener como resultado 729, para nuestro caso será 3. Es decir:

$$log_9\ 729 = 3, \text{ luego } 9^3 = 729$$

8.1. Propiedades de la logaritmación

1.El logaritmo de un producto es igual a la suma de sus logaritmos. Es decir,

$$lo(a \cdot b) = log(a) + log\ (b)$$

Ejemplo:

$$log\ log\ (5\ x\ 2) = log5 + log2$$

$$1 = 0{,}6990... + 0{,}3010...$$

$$1 = 1$$

2. El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de sus logaritmos. Así,

$$lo(\frac{a}{b}) = log(a) - log\ (b)$$

Ejemplo:

$$log\ \frac{3}{4} = log3 - log4$$

$$-0{,}1249 = 0{,}4771 - 0{,}3020$$

3. El logaritmo de una potencia es igual al exponente de la potencia multiplicado por el logaritmo de la base. Es decir:

$$log\ ab = b\ log\ (a)$$

Ejemplo:

$$log\ 2^3 = 3log2$$

$$0{,}903 = 3(0{,}3010)$$

$$0{,}903 = 0{,}903$$

4. Para expresar un logaritmo en una base diferente a la inicial, tan sólo basta aplicar la siguiente expresión:

$$log_a b = \frac{log_x b}{log_x a}$$

Ejemplo

$$log_3 243 = \frac{log_{10} 243}{log_{10} 3}$$

Nota: Cuando el logaritmo es en base 10, como en el ejemplo anterior, log_10 243 se escribirá de la siguiente manera $log_{10}243$. Lo aquí expuesto aplicada para todos los logaritmos que se trabajen en base 10.

El logaritmo en base **a**, de una de una raíz enésima, es igual al logaritmo en base **a** del radicando dividido entre el índice de la raíz. Es decir:

$$log_a \sqrt[n]{b} = \frac{log_a b}{n}$$

Ejemplo:

$$log_2 \sqrt{64} = \frac{log_2 64}{2}$$

$$3 = \frac{6}{2}$$

$$3 = 3$$

Actividad

1. Resuelva los siguientes logaritmos aplicando las propiedades:

a. $\log \log 3 + \log a =$

b. $\log \log \left(\frac{2}{7} \right) =$

c. $\log x - \log y =$

d. $\log 2^{x} =$

e. $\log_{3} 729 =$

f. $\log_{5} 324 =$

g. $\log_{4} \sqrt{4096} =$

h. $\log \frac{3x}{2a} =$

i. $\log \log (2a + 3b) =$

j. $\log \sqrt[3]{a^{3}} =$

9. Racionalización

En algunas ocasiones nos encontramos con expresiones racionales cuyo denominador es un número irracional o simplemente contiene una raíz. Por facilidad, en la realización de operaciones, es conveniente convertir dicho denominador en un número racional, es decir, desaparecer las raíces que aparezcan en el denominador.

9.1. De la forma $\frac{x}{\sqrt{a}}$

Para racionalizar expresiones como $\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{2a}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \ldots$ multiplicaremos, tanto el numerador como el denominador, por la raíz que aparece en el denominador y realizamos las operaciones correspondientes.

Ejemplo:

Racionalizar la siguiente expresión $\frac{x}{\sqrt{3}}$

$$\frac{x}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{x\sqrt{3}}{3}$$

9.2. De la forma $\frac{x}{\sqrt[n]{a}}$

Para racionalizar expresiones de este tipo multiplicaremos, al numerador y al denominador, por la expresión $\sqrt[n]{a^{n-k}}$ y luego resolver las operaciones correspondientes.

Ejemplo: $\frac{4}{\sqrt[4]{3}}$

Racionalizar

$$\frac{4}{\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{3^{4-1}}}{\sqrt[4]{3^{4-1}}}$$

$$\frac{4}{\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{3^{3}}}{\sqrt[4]{3^{3}}}$$

$$\frac{4}{\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{3^{3}}}{\sqrt[4]{3^{3}}} = \frac{4\sqrt[4]{27}}{3}$$

Para recordar

$\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{3^3}$ lo podemos expresar de la siguiente manera: $3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}$ y teniendo en cuenta las propiedades de la potenciación, nos queda, $3^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=} 3^{\frac{4}{4}=3}$

9.3. De la forma $\frac{X}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$

Cuando el denominador tiene la forma $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, multiplicaremos, tanto el numerador como el denominador, por el conjugado de dicha expresión.

Ejemplo:

Racionalizar $\frac{5}{\sqrt{3} - \sqrt{6}}$

$$\frac{5}{\sqrt{3} - \sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{6}}$$

$$\frac{5\,(\sqrt{3} + \sqrt{6})}{(\sqrt{3} - \sqrt{6})\,(\sqrt{3} + \sqrt{6})} = \frac{5\sqrt{3} + 5\sqrt{6}}{(\sqrt{3}\,)^2 - (\sqrt{6})^2}$$

$$\frac{5\sqrt{3} + 5\sqrt{6}}{3 - 6} = \frac{5\sqrt{3} + 5\sqrt{6}}{-3}$$

Actividad

1. Utilice los anteriores procedimientos para racionalizar los siguientes denominadores

a. $-\dfrac{6}{\sqrt{3}}$

b. $\dfrac{7}{\sqrt{11}}$

c. $\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{8}}$

d. $\dfrac{2a}{\sqrt[3]{ab}}$

e. $\dfrac{4x}{\sqrt[4]{2x}}$

f. $\dfrac{2a}{\sqrt[3]{ab}}$

g. $\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

h. $\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

i. $\dfrac{3}{\sqrt{5}-3}$

j. $\dfrac{9}{3\sqrt{2}-\sqrt{7}}$

10. Razones y proporciones

Las razones se utilizan para comparar dos cantidades, expresadas en forma de un cociente. Una **razón** indica las unidades que hay en relación con la otra, en donde el valor que aparece en el numerador recibe el nombre de antecedente mientras que el que aparece en el denominador el de consecuente.

$$\frac{a}{b} \begin{array}{l} \longrightarrow \textit{Antecedentes} \\ \longrightarrow \textit{Consecuente} \end{array}$$

Ejemplo:

La razón $\frac{3}{2}$ indica que hay una razón de 3 a 2 o que existen 3 por cada 2.

En una razón podemos identificar los siguientes términos

Una proporción es una igualdad entre dos o más razones.

Así: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

En una proporción se cumple que el producto de los extremos es igual al producto de los medios, es decir: $a \cdot d=b \cdot c$

Ejemplo:

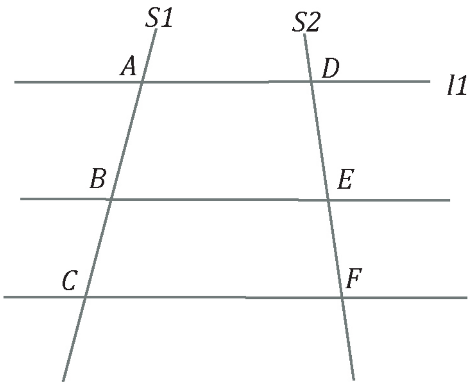
En la proporción $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$, se cumple que $1\times 6=2\times 3$

10.1. Teorema de Thales

Si dos o más rectas paralelas son intersecadas por dos rectas secantes; los segmentos determinados sobre las rectas secantes son proporcionales.

De esta manera, dadas tres rectas l_1, l_2 y l_3 paralelas entre sí y dos rectas secantes s_1 y s_2 que cortan las tres rectas en los puntos A,B,C y D,E,F respectivamente. Podemos afirmar que $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$

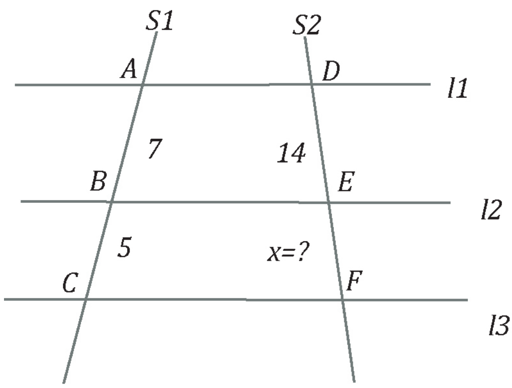
En forma algebraica el Teorema de Thales lo podemos enunciar así:



$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

Ejemplo:

Dadas las rectas l_1,l_2 y l_3, donde $l_1 \,||\, l_2 \,||\, l_3$ y dos secantes s_1 y s_2 que cortan las rectas, así como se muestra en la figura. El segmento AB, BC y DE mide 7, 5 y 14 unidades respectivamente. Determine el valor de x:



De acuerdo con el Teorema de Thales se cumple que $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ es decir:

$\frac{7}{5} = \frac{14}{x}$, de aquí

$$x = \frac{14 \text{ x } 5}{7}$$

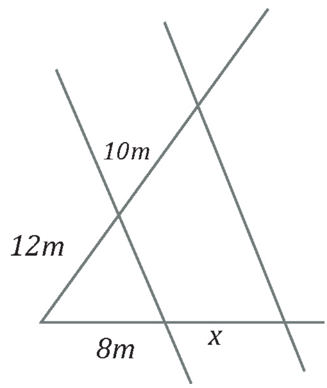
$$x = \frac{70}{7}$$

$$x = 10$$

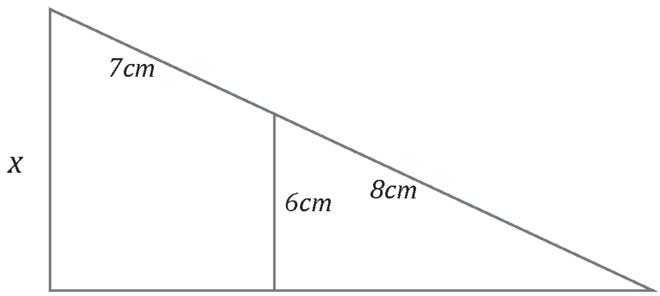
Actividad

Utiliza el Teorema de Thales para calcular el valor desconocido

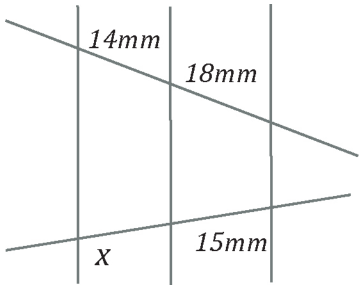
1.



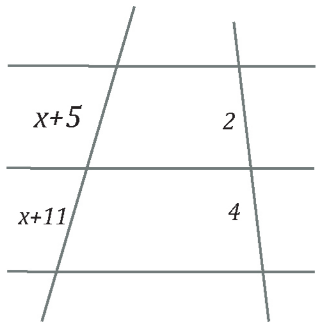
2.



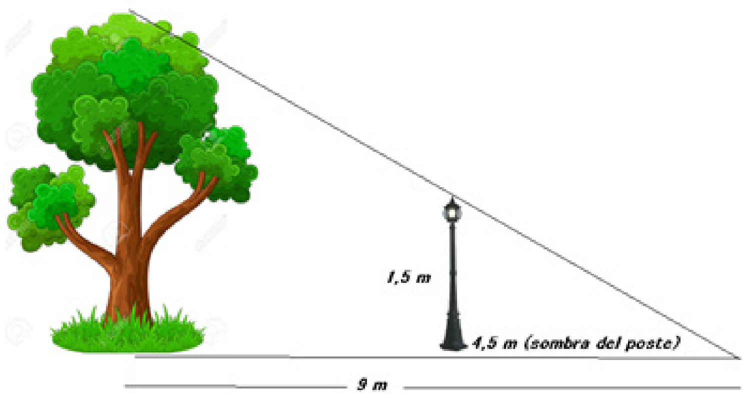
3.



4.



5. Encuentre la altura del árbol, sabiendo que el poste mide 1,5 metros de altura y proyecta una sombra de 4,5 metros.



11. Introducción al álgebra

11.1 Expresión Algebraica

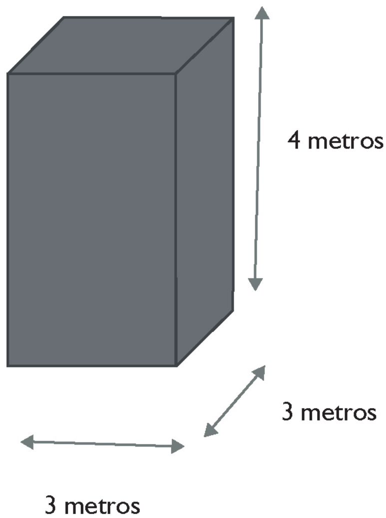
Una expresión algebraica, como por ejemplo $5m^2n^7$ se denomina un monomio. Nótese que se trata de una combinación de números (coeficiente que multiplica a la parte literal) y letras (la parte literal), las cuales representan cantidades desconocidas. Es importante observar que la expresión algebraica $5m^2n^7$ es diferente a la expresión algebraica $5m^2n^7$ es decir, no son semejantes.

Si por ejemplo, $m = 3$ y $n = -1$ tenemos que al reemplazar estos valores en $5m^2n^7$ se obtiene: $5(3)^2 (-1)^7 = 5(9)(-1) = -45$ Ahora, al reemplazar en $5m^2n^7$ se obtiene: $5(3)^7 (-1)^2 = 5(2187)(1) = 10.935$ Es decir, los valores numéricos de las expresiones son diferentes en cada caso.

Una expresión algebraica como por ejemplo $3x^2y^5 - 2x^2 y^5 + 3xy^3 - 7xy$ es una expresión polinómica que, para el caso, tiene 4 términos (monomios).

Ejemplo:

Se va a fabricar una caja de base cuadrada con tapa, cuya longitud es 3 metros y cada pared tiene una longitud de 4 metros. Si por cada metro cuadrado de área de la base y tapa se cobra $ 3.000 y por cada metro cuadrado de la pared se cobra $ 5.000, determinar el costo total de fabricación de la caja.



Podemos escribir una expresión algebraica que represente el costo total de fabricación de la caja, de la siguiente manera:

Sea:

x : Longitud del lado de la base

y : Longitud del lado de la pared de la caja

La expresión que representa el área de la base es: $A_b = xx = x^2$

La expresión que representa el área de una de las paredes de la caja es: $A_p = xy$

Luego,

$$C = 2\,(3.000x^2) + 4\,(5.000xy)$$

Que es posible escribirse:

$$C = 6.000x^2 + 20.000xy$$

Reemplazando los valores de las longitudes dadas, tenemos que:

$$C = 6.000\,(3)^2 + 20.000\,(3)(4)$$

$$C = 6.000\,(9) + 20.000\,(12)$$

$$C = 54.000 + 240.000$$

$$C = \$294.000$$

11.2 Factorización

Factorizar una expresión algebraica o aritmética, se entenderá como el proceso por el cual es posible escribir la expresión dada como un producto de dos o más factores.

Observe que en $3(5m - 4n) = 15m - 12n$ se aplicó la propiedad distributiva. Ahora bien, si tenemos la expresión $15m - 12n$ podemos escribirla como un producto para el cual factor común es 3.

Veamos: $15m - 12n = 3\,(5m - 4n)$

Factor Común.

Factorizar $5x - 15\,ab$ Como se observa, en este caso 5 es el factor común, por lo cual podemos reescribir la expresión de la siguiente manera:

$$5x - 15ab = 5\,(x - 3ab)$$

Ejemplo. Observe ahora cómo vía identificación del factor común, se puede reescribir la siguiente expresión como producto de dos factores:

$24x^2 y^3 - 12x^3 y^2 + 6x^5y^4 + 12x^6y^5$

$24x^2y^3 - 12x^3y^2 + 6x^5y^4 + 12x^6y^5 = 6x^2y^2\,(4y - 2x + x^3y^2 + 2x^4y^3$

Nótese que el factor común es $6x^2y^2$

Diferencia de Cuadrados Perfectos

La expresión $m^2 - n^2$ aparece como la diferencia de dos términos en la cual cada uno de ellos tiene raíz cuadrada exacta. La forma para factorizarla, es la siguiente:

$m^2 - n^2 = (m-n)\ (m+n)$

Ejemplos:

Factorizar: $4a^3 - 16an^6$

Observe que esta expresión tiene factor común y, por lo tanto, podemos reescribirla así:

$$4a^3 - 16an^6 = 4a\ (a^2 - 4n^6)$$

Sin embargo, el factor $a^2 - 4n^6$ se puede seguir factorizando ya que tiene la forma de una Diferencia de Cuadrados, luego podemos escribir:

$$4a^3 - 16an^6 = 4a\ (a^2 - 4n^6) = 4a\ (a - 2n^3)\ (a+2n^3)$$

Sin embargo, el factor $a^2 - 4n^6$ se puede seguir factorizando ya que tiene la forma de una Diferencia de Cuadrados, luego podemos escribir:

Factorizar $9 - k^2 y^2$

$$9 - k^2y^4 = (3-ky^2)\ (3+ky^2)$$

Factorizar: $\frac{1}{25} c^{16} - \frac{9}{16} k^4$

$$\frac{1}{25} C^{16} - \frac{9}{16} k^4 = (\frac{1}{5} C^8 - \frac{3}{4} K^2)\ (\frac{1}{5} C^8 + \frac{3}{4} K^2)$$

Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Para factorizar este tipo de trinomios, se deben buscar dos números cuyo producto sea c y cuya suma sea b.

Ejemplo.

Factorizar: $5mx^2 + 35mx + 60m$

Observe que la expresión tiene como factor común a $5m$, luego podemos escribir:

$$5mx^2 + 35mx + 60m = 5m\,(x^2 + 7x + 12)$$

Podemos seguir factorizando el segundo factor $x^2 + 7x + 12$ y obtenemos:

Factorizar: $x^2 - x - 6$

Debemos hallar dos números cuyo producto sea -6 y cuya suma sea -1. Los números son $-3y2$. Veamos:

Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0, 1$

Para factorizar este tipo de trinomios, se puede seguir el siguiente procedimiento:

$$ax^2 + bx + c = \frac{a\,(ax^2 + bx + c)}{a}$$

$$= \frac{a^2x^2 + b\,(ax) + ac}{a}$$

$$= \frac{(ax + m)\,(ax + n)}{a}$$

En donde $mn = ac$ y $m + n = b$

Ejemplo:

Factorizar: $3y^2 - 5y + 2$

$$3y^2 - 5y + 2 = \frac{3\,(3y^2 - 5y + 2)}{3}$$

$$= \frac{9y^2 - 5\,(3y) + 6}{3}$$

$$= \frac{(3y - 3)(3y - 2)}{3}$$

$$= \frac{3\,(y - 1)(3y - 2)}{3}$$

$$= (y - 1)\,(3y - 2)$$

Factorizar: $2a^2 + 5a\ 3$

$$2a^2\ 5\ a + 3 = \frac{2\ (2a^2 - 5a + 3)}{2}$$

$$= \frac{4a^2 + 5(2a) + 6}{2}$$

$$= \frac{(2a + 2)\ (2a + 3)}{2}$$

$$= \frac{2\ (a+1)(2a+3)}{2}$$

$$= (a + 1)\ (2a + 3)$$

Suma de Cubos

Una suma de cubos tiene la forma $x^3 + y^3$ y se factoriza de la siguiente manera:

$$x^3 + y^3 = (x + y)\ (x^2 + y^2 - xy)$$

Diferencia de Cubos

Una diferencia de cubos tiene la forma $x^3 - y^3$ y se factoriza de la siguiente manera:

$$x3 - y2 = (x + y)\ (x2 + y2 + xy)$$

Ejemplos:

Factorizar: $\frac{1}{125}K^3 - y^6$

$$\frac{1}{125}k^3 - y^6 = (\frac{1}{5}k - y^2)\ \Big((\frac{1}{5}k)^2 + (y^2)^2 + (\frac{1}{5}k)\ (y^2)$$

$$=(\frac{1}{5}k - y^2)\ (\frac{1}{25}k^2 + y^4 + \frac{ky^2}{5})$$

Factorizar: $8m^3 + 27$

$$8m^3 + 27 = (2m + 3)\left((2m)^2 + (3)^2 - (2m)(3)\right)$$
$$= (2m + 3)(4m^2 + 9 - 6m)$$

Actividad

1. El área del lote rectangular mostrado en la figura, se representa mediante la expresión

x^2-7x+12, con x una longitud en metros.

Represente el largo del terreno

2. Para el ejercicio 1, se asume que x=9 metros, determinar el perímetro del terreno

3. Escriba un término semejante a $\frac{2x^3y^5=}{3m}$

4. Determine un factor de $m^2+7m-44$

5. Factorizar completamente: $x^4 - 2x^3 - 3x^2$

6. Factorizar: $3x^3 - 7x^2 + 2x$

7. Factorizar: $9m^4 - \frac{1}{16}n^8$

8. Se va a fabricar una caja de base cuadrada. Para ello se sabe que el precio por metro cuadrado de la lámina para la base y la tapa de la caja, cuesta 3000 pesos y, además, el precio por metro cuadrado para cada pared de la caja, cuesta 5500 pesos. Escribir una expresión que permita calcular el precio total de fabricación de la caja.

9.Factorizar: $27 + x^3y^{12}$

12. Ecuaciones

Una Ecuación es una relación de igualdad entre valores conocidos (números) y valores desconocidos (incógnitas)

Consideremos algunos ejemplos que muestran cómo simbolizar una situación vía ecuaciones:

"La suma de cuatro números naturales consecutivos es 106"

Representamos mediante la letra x el primer número de los cuatro mencionados. Luego, el siguiente número será: $x+1$; el tercer número es $x+2$ y el cuarto número es $x+3$

De esta manera, la ecuación que se forma es

$$x + (x + 1) + (+2) + (x+3) = 106$$

"La mitad de la quinta parte de la diferencia entre un número y 50, es igual a 20"

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}(x-50)\right) = 20$$

"Las dos terceras partes de un número equivalen a 100"

Representamos mediante la letra k al número y podemos escribir la afirmación dada como:

$$\frac{2}{3}k = 100$$

"El total de productos de las marcas M y N es igual a 525"

Sea x el número de productos de la marca **M**

Sea y el número de productos de la marca **N**

Luego, la ecuación $x + y = 252$ representa las condiciones del enunciado.

12.1 Resolución de una ecuación

Resolver una ecuación de manera operativa implica utilizar las acciones contrarias agregar-quitar y Multiplicar – Dividir, para determinar el conjunto de los números reales que hacen de la ecuación dada una igualdad.

De esta manera, la idea de equilibrio, permite enunciar las siguientes propiedades de la igualdad:

- Si se está en equilibrio, lo cual se puede expresar $a=b$, al agregar o quitar la misma cantidad k a ambos lados de la igualdad, el equilibrio se mantiene.

$$a = b$$

$$a + k = b + k$$

- Si se está en equilibrio, lo cual se puede expresar $a=b$, al agregar el mismo número de veces la misma cantidad k a ambos lados de la igualdad, el equilibrio se mantiene.

$$a = b$$

$$ak = bk$$

- Si $ak=bk$, entonces, $a=b$ siempre que $a=0$

Actividad:

Escriba mediante una ecuación, cada uno de las siguientes afirmaciones

1. La mitad de la cuarta parte de un número, equivale a 12

2. Un quinto de la diferencia entre dos números reales, equivale a 21

3. El cuadrado de la diferencia entre dos números reales, es igual al cuadrado de **m**

4. La diferencia entre los cuadrados de dos números reales, es igual a la mitad de m

5. El 4% de cierta cantidad equivale al cubo de 36

6. El cubo de la diferencia entre dos cantidades, equivale a la diferencia de los cubos de esas cantidades

12.2 Ecuación de Primer Grado con una Incógnita

Una *Ecuación de Primer Grado* o *Ecuación Lineal*, es aquella en que su incógnita aparece con exponente máximo igual a 1.

Por ejemplo, las siguientes ecuaciones son lineales:

$$x - 2 = 17 \quad \frac{5y}{3} + 4 = y, \; 5(x-2) = 2x + 9$$

Veamos ahora cómo resolver la ecuación $x-3=11$

Indique qué propiedades de los números reales y de la igualdad se utilizaron para resolver la ecuación

Ahora bien. ¿Cómo comprobar que $x=14$ es solución de la ecuación dada?

Basta con reemplazar dicho valor en la ecuación original y verificar que se da una igualdad. Veamos:

$$x - 3 = 11$$

$$14 - 3 = 11$$

$$11 = 11$$

Ejemplo:

Resolver la ecuación $\frac{2x-5}{2} - \frac{x-1}{3} = \frac{x}{6}$

Observe que podemos conseguir que los denominadores de cada expresión sean iguales:

$$\frac{2x-5}{2} - \frac{3\,(2x-5)}{3\,(2)} = \frac{6x-15}{6}$$

$$\frac{x-1}{3} = \frac{2\,(x-1)}{2\,(3)} = \frac{2x-2}{6}$$

Ahora tenemos que:

$$\frac{2x-5}{2}-\frac{x-1}{3}=\frac{x}{6}$$

$$\frac{6x-15}{6}-\frac{2x-2}{6}=\frac{x}{6}$$

$$\frac{6x-15-(2x-2)}{6}=\frac{x}{6}$$

$$\frac{6x-15-2x+2}{6}=\frac{x}{6}$$

$$\frac{4x-13}{6}=\frac{x}{6}$$

$$4x-13=x$$

$$4x-13+13=x+13$$

$$4x+0=x+13$$

$$4x=x+13$$

$$4x-x=x-x+13$$

$$3x=0+13$$

$$3x=13$$

$$\frac{1}{3}(3x)=\frac{1}{3}(13)$$

$$x=\frac{1}{3}$$

Actividad:

Resolver cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $\frac{x-5}{3} - \frac{x-1}{7} = \frac{x}{4}$

2. $\frac{-k-1}{5} - \frac{k-1}{3} = 7k$

3. $3m - \frac{m-1}{3} = \frac{m+2}{6}$

4. $y^2 - 3 = (y-3)^2 - 1$

5. $\left(\frac{x+2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{3}\right)^2 = 0$

12.2 Aplicaciones

Para resolver problemas de aplicación que involucran ecuaciones, es importante tener las siguientes orientaciones, las cuales se presentan en los ejemplos que vienen a continuación:

Ejemplo.

El 20% de las tres quintas partes del dinero con que cuenta una persona diariamente equivale a 6.000 pesos ¿Cuál es la cantidad de dinero con la que la persona cuenta diariamente?

- Definir la o las incógnitas que tiene el problema:

Sea x la cantidad de dinero diario de la persona

- Plantear la ecuación:

$$20\% \left(\frac{3}{5}x\right) = 6.000$$

- Resolver la ecuación:

$$20\% \left(\frac{3}{5}x\right) = 6.000$$

$$\frac{20}{100}\left(\frac{3}{5}x\right) = 6000$$

$$\frac{60x}{500} = 6000$$

$$\frac{3x}{25} = 6000$$

$$3x = 3000\ (25)$$

$$x = \frac{3.000\ (25)}{3}$$

$$x = 25.000$$

Conclusión

Luego la cantidad de dinero diario de la persona es de $ 25.000

El siguiente ejemplo plantea una situación asociada con el uso de dos incógnitas y dos ecuaciones lineales. Se conoce como Sistema de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas

Ejemplo.

Una persona decide invertir 800 mil dólares en dos opciones que pagan 3% y 5% de interés mensual. Se sabe que al final del mes, obtiene una ganancia por concepto de intereses de 34 mil dólares. ¿Qué cantidad de dinero invirtió en cada tasa?

- Definición de las variables o incógnitas:

x Representa la cantidad de dinero invertida al 3% mensual

y Representa la cantidad de dinero invertida al 5% mensual

- Planteamiento del problema con las ecuaciones correspondientes:

$$\begin{cases} x + y = 800 \\ 3\%\, x + 5\% y = 34 \end{cases}$$

Para resolver este sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas, se utilizará el llamado método de sustitución, el cual consiste en despejar una incógnita en la primera ecuación $x+y=800$ y reemplazarla en la segunda ecuación $3\%x+5\%y=34$, para poder tener una ecuación con una única incógnita (variable):

En la ecuación:

$$x + y = 800$$

$$x = 800 - y$$

Reemplazando ahora en la ecuación *3%x+5%y=34:*

$$3\%\,(800 - y) + 5\%y = 34$$

$$\frac{3}{100}(800 - y) + \frac{5y}{100} = 34$$

$$\frac{2.400 - 3y}{100} + \frac{5y}{100} = 34$$

$$\frac{2.400 - 3y + 5y}{100} = 34$$

$$2.400 - 3y + 5y = 34\,(100)$$

$$2.400 + 2y = 3.400$$

$$2y = 3.400 - 2.400$$

$$2y = 1.000$$

$$y = \frac{1.000}{2}$$

$$y = 500$$

Ahora, reemplazamos *y=500* en *x+y=800*

$$x + 500 = 800$$

$$x = 800 - 500$$

$$x = 300$$

Luego, fueron invertidos 300 mil dólares al 3% mensual y 500 mil dólares al 5% mensual.

Actividad

Resolver cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ -x + 3y = 4 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 2 \\ -x + 3y = -6 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 5m + 3n = 16 \\ -m + 6n = -1 \end{cases}$$

12.3 Ecuaciones cuadráticas

Las Ecuaciones Cuadráticas o de Segundo Grado, tienen la forma $ax2 + bx + c = 0$ con a, b, c números reales y $a \neq 0$

Para resolver este tipo de ecuaciones, se aplica la siguiente fórmula, en la cual se reemplazan los valores de a, b, c para determinar el valor de la incógnita:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La cantidad $b^2 - 4ac$ se denomina el Discriminante y nos da información acerca de las soluciones de la ecuación:

- Si $b^2 - 4ac$ es positivo, la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas.
- Si $b^2 - 4ac$ es negativa, la ecuación No tiene solución en el conjunto de los números reales.
- Si $b^2 - 4ac$ es igual a cero, la ecuación tiene una única solución.

Ejemplo.

Resolver la ecuación: $2x^2 - x - 3 = 0$

Se observa que $a = 2$; $b = -1$; $c = -3$

Reemplazando en la fórmula dada, obtenemos:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4}$$

Como el discriminante es un valor positivo, tenemos entonces dos soluciones a saber:

$$x_1 = \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}\ ;\ x_2 = \frac{1-5}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

En conclusión, la solución de la ecuación dada es:

$$x_1 = \frac{3}{2}\ ;\ x_2 - -1$$

Ejemplo.

Resolver:

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} = -1$$

Observe que $x \neq 0$ y $x \neq 1$ ya que, para tales valores de la incógnita, la expresión que los tiene no estaría bien definida.

Realizamos las operaciones indicadas:

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} = -1$$

$$\frac{2x -1\,(x-1)}{(x-1)x} = -1$$

$$\frac{2x -x +1}{(x-1)x} = -1$$

$$\frac{x +1}{(x-1)x} = -1$$

$$x + 1 = -1x\,(x-1)$$

$$x + 1 = -x^2 + x$$

$$x + 1 = -x^2 + x$$

$$x + 1 + x^2 - x = 0$$

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

Como puede observarse, no existe un número real cuyo cuadrado sea igual a^{-1}. Luego, la ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales. Puede como ejercicio, comprobar esta afirmación utilizando la fórmula cuadrática.

Ejemplo.

Resolver la ecuación $\frac{3}{4m + 12} - \frac{m}{m - 3} = -2$

Observe que es posible factorizar el denominador del primer término del lado izquierdo de la igualdad. Luego, podemos escribir:

$$\frac{3}{4(m + 3)} - \frac{m}{m - 3} = -2$$

Ahora, podemos escribir como denominador común a: $4\ (m + 3)(m - 3)$ y al realizar la resta de fracciones algebraicas, tenemos que:

$$\frac{3\ (m - 3) -4m\ (m + 3)}{4(m + 3)\ (m - 3)} = -2$$

Ahora, desarrollamos las operaciones indicadas y despejamos la incógnita:

$$\frac{3\ (m - 3) -4m\ (m + 3)}{4(m + 3)\ (m - 3)} = -2$$

$$\frac{3m - 9 -4m^2 - 12}{4(m + 3)\ (m - 3)} = -2$$

$$\frac{-4m^2 - 9m - 9}{4(m + 3)\ (m - 3)} = -2$$

$-4m^2 -9m -9 = -2\ [\ 4\ (m + 3)\ (m - 3)]$

$-4m^2 -9m -9m = -8\ (m^2 - 9)$

$-4m^2 - 9m -9 = 8m^2 +72$

$-4m^2 -9m -9 = -8m^2 -72 = 0$

$4m^2 -9m - 72 = 0$

Ahora, se aplica la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas, dado que el proceso seguido con la ecuación original, generó una ecuación de segundo grado:

$$4m2 - 9m -72 = 0$$

Como $a= 4;\ b = -9;\ c = -72$ reemplazando en la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ obtenemos que:

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)2 - 4\,(4)\,(-72)}}{2(4)}$$

$$x = \frac{(-9) \pm \sqrt{81 - 4(4)\,(-72)}}{2(4)}$$

$$x = \frac{(-9) \pm \sqrt{81 + 1152}}{8}$$

$$x_1 = \frac{9 + \sqrt{81 + 1152}}{8} = \frac{9 + \sqrt{1233}}{8}$$

$$x_2 = \frac{9 - \sqrt{81 + 1152}}{8} = \frac{9 + \sqrt{1233}}{8}$$

Actividad:

Resolver, si es posible, cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+1} = -3$

2. $\frac{7}{x^2 - x} = \frac{3}{x} - 5$

3. $3m^2 - 2m - 11 = 0$

4. $-4 \frac{3}{x^2 - 2x - 3} = -4x^2$

5. $(n-3)^2 = 4n^2 - 2n$

6. $- \frac{3}{x+1} - x\,2 = \frac{1}{2}$

13. Referencias

Stewart, J., Redlin,L. & Watson, S. (2012). Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Sexta edición. México, D.F., México: Cengage Learning Editores, S.A. de C.V Recuperado de: http://ftp1.unimeta.edu.co/calculus/multivariable/books/precalculo_-_matematicas_para_el_calculo-1.pdf

Swokowski, C. (2012). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Doceava edición. México, D.F., México: Cengage Learning Editores, S.A. de C.V. Recuperado de: https://henryhs14.files.wordpress.com/2015/02/algebra-y-trigonometria-con-geometria-analitica-swokowski-12th.pdf

ALGUNOS ELEMENTOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL

Una guía práctica para estudiantes de
Ciencias de la Administración,
Economía e Ingeniería

Leidy Bibiana Pinzón Cubillos
Mónica Montoya Cortés

UNIVERSIDAD
La Gran Colombia

1. Introducción

El Cálculo Diferencial es un curso importante del núcleo de ciencias básicas para la formación de los profesionales en las ciencias económicas, administrativas y en la ingeniería, fundamentalmente porque apunta al desarrollo de tres habilidades básicas que impactarán al profesional: primero, desde lo instrumental, hace referencia a la utilidad de la matemática como herramienta fundamental en la solución de diversos problemas que plantean las diferentes áreas del conocimiento de las distintas disciplinas e, incluso, en las mismas matemáticas. Segundo, desde lo comunicativo, hace referencia a que es considerada como un lenguaje apropiado para la formalización y formulación de constructos teóricos, lo que implica que se requiera una sólida fundamentación en cuanto a la conceptualización, la modelación y los procesos operatorios. Y tercero, desde lo cognitivo, se refiere al desarrollo de pensamiento formal, algorítmico, inferencial, inductivo y deductivo, que permite abordar los problemas propios de la ingeniería en consideración a todas las variables presentadas y las consecuencias éticas, ambientales, económicas y demás requeridas por la disciplina.

En consecuencia, esta cartilla está diseñada con el fin apoyar el proceso de aprendizaje del estudiante en cuanto a promover el desarrollo del pensamiento lógico-matemático a partir del planteamiento y de la solución de problemas en diferentes contextos tanto resueltos como propuestos, en los cuales el estudiante podrá aplicar las definiciones y los teoremas que hacen parte del conocimiento teórico.

La cartilla está conformada por tres grandes temas: funciones en una variable, límites y derivadas, los cuales se exponen desde sus diferentes representaciones con ilustraciones que son realizadas con herramientas tecnológicas para hacer más dinámico el aprendizaje de los conceptos. El desarrollo de cada tema viene estructurado a través de una explicación basada en definiciones y teoremas propios del cálculo que sustentan los conocimientos, los cuales están debidamente referenciados; se plantean ejercicios y problemas de aplicación en diferentes disciplinas desarrollados paso a paso, con lo cual se pretende que el estudiante desarrolle habilidades de tipo procedimental, algorítmico y de análisis que le permitan una adquisición de los conceptos de forma significativa y que los pueda aplicar a diferentes situaciones problémicas bajo una estructura formal coherente. Por último, se propone una serie de actividades que son consideradas de trabajo independiente, con las cuales se busca que el estudiante ponga en práctica los conocimientos aprendidos durante cada tema a partir de los ejercicios y los problemas propuestos

Objetivo

Desarrollar habilidades de pensamiento lógico para la comprensión de conceptos matemáticos y su aplicación en el planteamiento y en la solución de situaciones problema, referentes funciones, razones de cambio y optimización que aporten a los fundamentos teóricos de áreas específicas de las ciencias administrativas, contables o ingenieriles.

Competencias

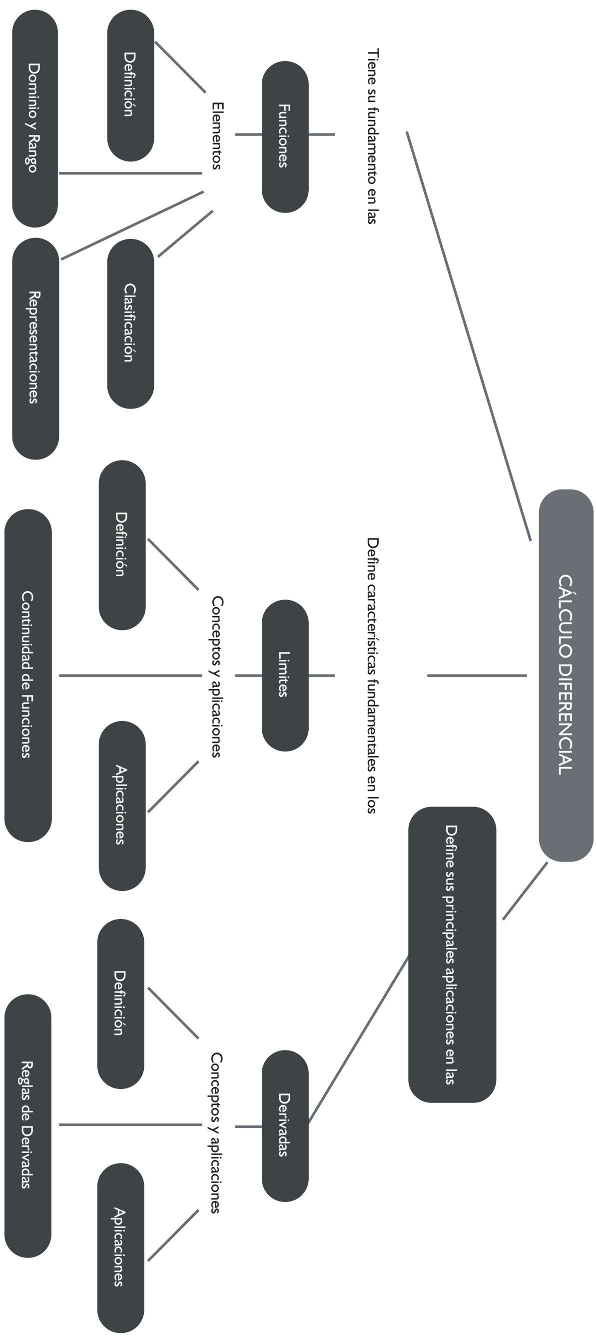
Reconocer e interpretar relaciones funcionales expresadas en distintas formas (verbal, tabular, gráfica y algebraica) y realizar transición entre las diversas formas de representación.

Modelar situaciones problema mediante funciones matemáticas a través de diferentes representaciones y analizar las implicaciones éticas que pueden presentar estas situaciones.

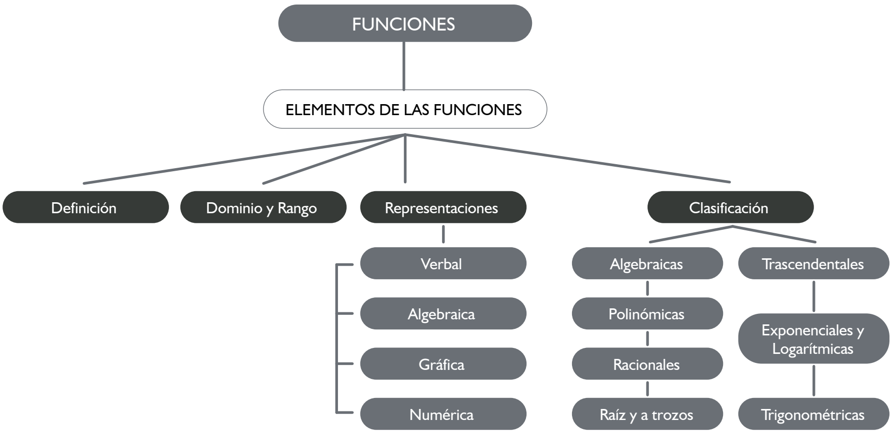
Usar diferentes técnicas de algoritmos para calcular, representar e interpretar límites y derivadas de funciones.

Leer, comprender, plantear y proponer alternativas de solución a problemas de límites, razón de cambio y optimización, en consideración a las implicaciones éticas y ambientales presentes en las propuestas de solución a los problemas de ciencias aplicadas.

Representación global de la cartilla



2. Funciones



2.1 Conceptos básicos

Nota histórica

El concepto de función es fundamental en las matemáticas, ya que a partir él se relacionan magnitudes que describen muchas situaciones de la vida real. Este concepto ha tenido un tratamiento matemático que se ha ido construyendo y formalizando a lo largo de la historia desde la matemática prehelénica cuando la relación entre cantidades se representaba mediante gráficos, pasando por Leibniz quien fue el primer matemático que nombró el término de función para designar "un objeto geométrico asociado con una curva, v. g. coordenadas de un punto sobre la curva o la pendiente de una curva" (Youschkevitch, 1976, p. 56), hasta su última formulación dada por Bourbaki (1939) citado por Arriola (2015) como una regla de correspondencia entre los elementos de dos conjuntos, dominio y rango que será la que usaremos

Definición de función

“Sean A y B dos conjuntos, que pueden ser distintos o no. Una relación entre un elemento variable x de A y un elemento variable y de B se llama una relación funcional en y, si para toda x de A, existe un único y en F el cual está en la relación dada con x” (Rüthing, 1984).

En esta definición, hay que considerar varios aspectos:

- Definir los elementos que conforman cada uno de los conjuntos, en este caso serán los números reales, lo que implica que solo se hablará de funciones en números reales de una sola variable (Pérez, 2008).

- La notación: las funciones se denotan con letras, las cuales las más comunes son f, g, h, entre otras. Así pues, si f es una función y x es un elemento del dominio de f, $f(x)$ representa la imagen de x por f.

- Las letras x y y representan las variables de la función; la variable x se considerará independiente y la variable dependiente.

- Las funciones se pueden expresar de cuatro formas distintas: verbal, algebraica, numérica y gráfica, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1: Representación de funciones

Verbal	Algebraica
Una función definida como el cubo de un número aumentado en 3	$f(x)=x^3+3$

Numérica

x	$f(x)$
0	$f(0)=0^3+3=3$
1	$f(1)=1^3+3=4$
-1	$f(-1)=(-1)^3+3=4$
2	$f(2)=2^3+3=11$
-2	$f(-2)=(-2)^3+3=-5$

Gráfica

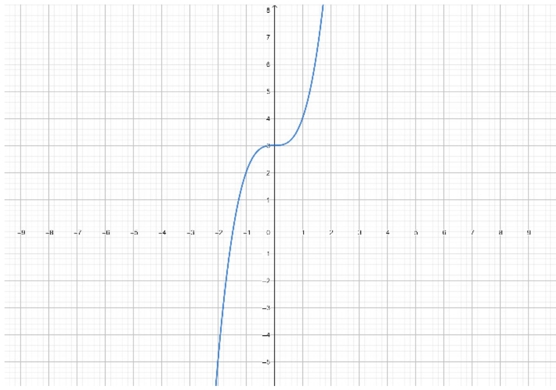


Figura 1

De acuerdo con la definición de función que se dio anteriormente, cabe aclarar que no toda relación es función, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2: Relación que no es función

Verbal	Algebraica
El conjunto de puntos del plano cartesiano tal que la suma de los cuadrados de sus abscisas y las ordenadas sea igual a 16.	$x^2+y^2=16$ $y=\pm\sqrt{16-x^2}$

Numérica	Gráfica

x	$y=\pm\sqrt{16-x^2}$
0	$y=\pm\sqrt{16-0^2}=\pm 4$
1	$y=\pm\sqrt{16-1^2}=\pm\sqrt{15}$
-1	$y=\pm\sqrt{16-(-1)^2}=\pm\sqrt{15}$
2	$y=\pm\sqrt{16-2^2}=\pm\sqrt{12}$
-2	$y=\pm\sqrt{16-(-2)^2}=\pm\sqrt{12}$

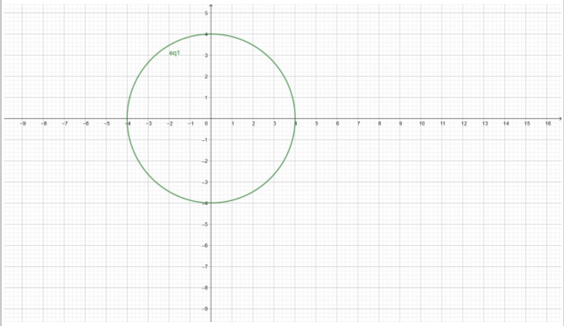


Figura 2. A cada valor $-4<x<4$ le corresponde dos valores de y

Una forma de analizar que una relación sea función es aplicando el criterio de la recta vertical, definido por:

Una recta vertical intersecta la gráfica de una función a lo más en un punto (Leithold, 1998).

Observe que en la gráfica del ejemplo 1 toda recta de la forma $x=a$ siempre la intersecta en un solo punto, mientras que en el ejemplo 2 la intersecta en dos puntos para todo número real del intervalo $(-4, 4)$.

Ejemplo 3: Observe cada una de las siguientes gráficas y establezca cuáles no son funciones.

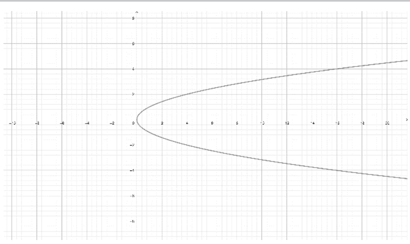


Figura 3

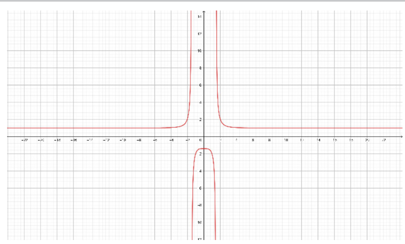


Figura 4

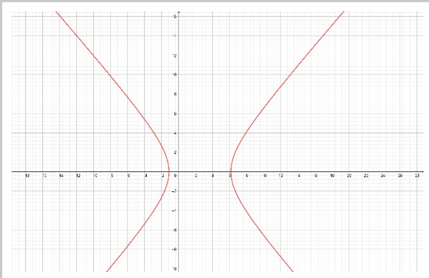


Figura 5

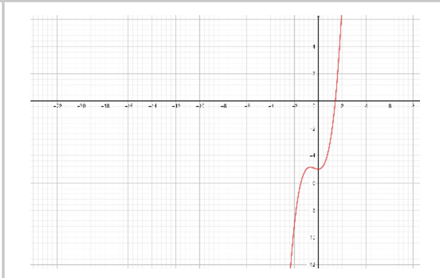


Figura 6

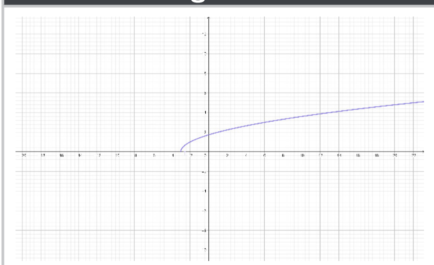


Figura 7

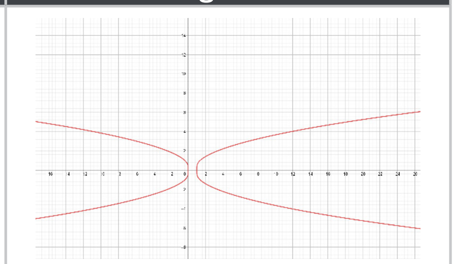


Figura 8

Solución: Las gráficas de las figuras *(3), (5) y (8)* no representan una función, ya que, si se traza una recta vertical en cada una de ellas, la recta corta a cada gráfica en más de un punto, mientras que las gráficas de las figuras (4), (6) y (7) sí representan una relación de función.

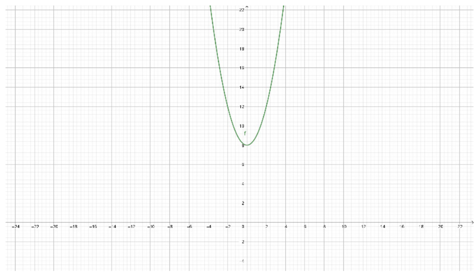
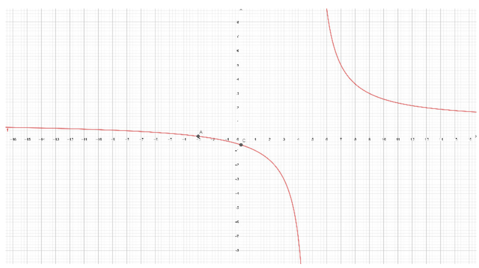
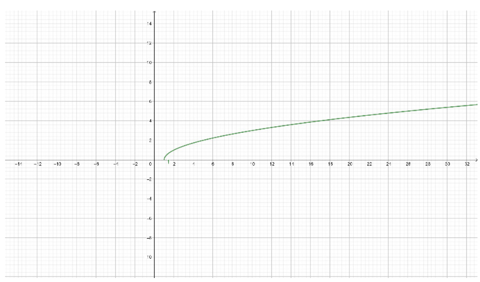
2.2 Dominio y rango de una función

El dominio y el rango son dos elementos fundamentales de las funciones, ya que permiten conocer los conjuntos de valores en los cuales sea posible estudiar la función. De esta forma, el dominio comprende el conjunto de números reales x para los cuales la función está definida (variable independiente) y, asimismo, el rango se considera como el conjunto de números reales que son resultado de aplicar la función en la variable independiente, esto es, el conjunto de los valores de $f(x)$. Gráficamente, el dominio se representa en el eje horizontal de las abscisas y el rango en el eje vertical de las ordenadas. El dominio de una función lo denotaremos como *Dom f* y el rango como *Ran f.*

Ejemplo 4: Determine el dominio y el rango de las siguientes funciones, luego grafíquelas:

a. $f(x)= x^2+8$ b. $g(x)=\frac{x+3}{x-5}$ c. $h(x)=\sqrt{x}-1$ d. $m(x)=3^x$

Solución:

a. Domf=R Ran f= $\{x\in R \mid x\geq 8\}=[8,\infty)$	 Figura 9 $f(x)= x^2+8$
b. Dom g= $\{x\in R \mid x\neq 5\}$ Ran g=$\{x\in R \mid x\neq 1\}=(-\infty,1)\cup(1,\infty)$	 Figura 10 $g(x)=\dfrac{x+3}{x-5}$
c. Dom h=$\{x\in R \mid x\geq 1\}=[1,\infty)$ Ran h=$\{x\in R \mid x\geq 0\}=[0,\infty)$	 Figura 11 $h(x)=\sqrt{x}-1$

d.

Dom m=R=(-∞,∞)
Ran m={x|x>0}=(0,∞)

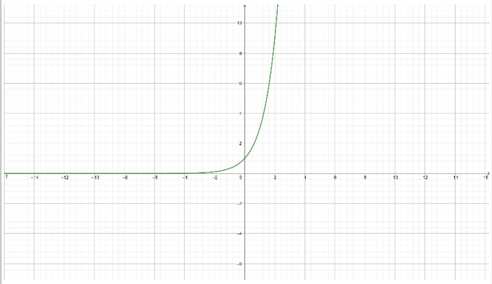


Figura 12. $m(x)=3^x$

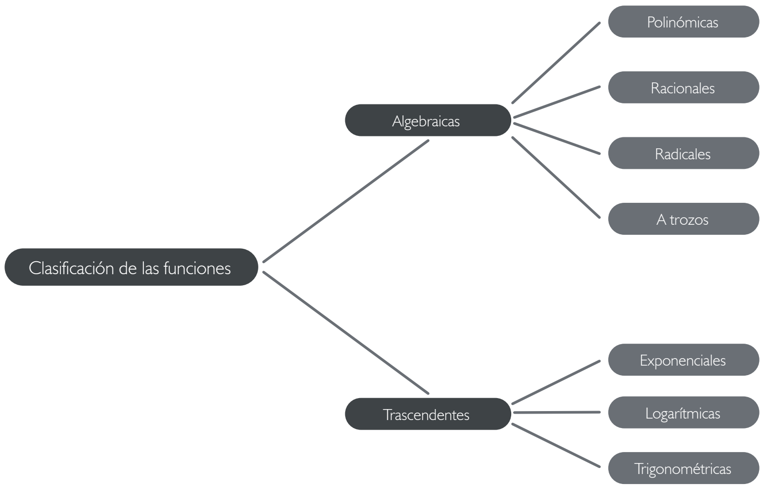
Una forma de calcular el rango de una función es haciendo un cambio de variables, esto es, cambiar la variable dependiente por la independiente y analizar los valores para los cuales la función resultante (en caso de que exista) está definida. Así pues, para el ejemplo *4(b)*, al hacer cambio de variables, se tiene:

$$g(x) = y = \frac{x+3}{x-5} \rightarrow x = \frac{x+3}{x-5} \rightarrow (y-5)\,x = y+3 \rightarrow xy - y = 3+5x \rightarrow y\,(x-1)$$

$$= 3 + 5x \rightarrow y = \frac{3+5x}{x-1}$$

Como se puede ver en la última expresión, el rango está conformado por el conjunto de números reales diferentes de 1, esto es .$(-\infty,1) \cup (1,\infty)$.

2.3 Clasificación de las funciones



2.3.1 Funciones algebraicas

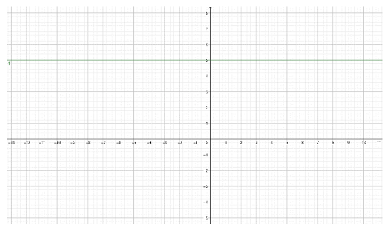
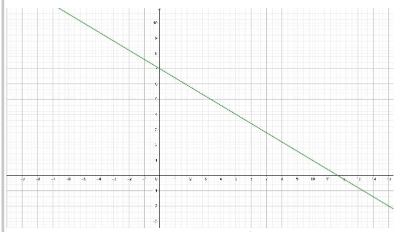
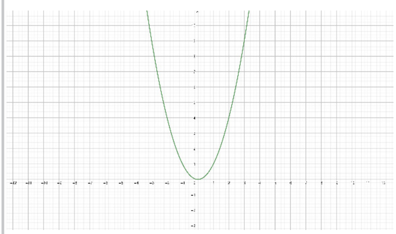
Se consideran funciones algebraicas aquellas en las que intervienen con la variable independiente únicamente operaciones de adición, sustracción, producto, cociente, potenciación y radicación.

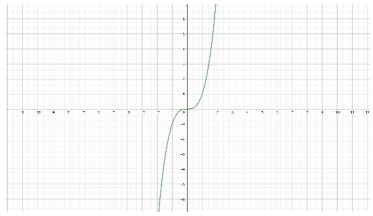
2.3.1.1 Funciones polinómicas

Las funciones polinómicas son las funciones que tienen la estructura:

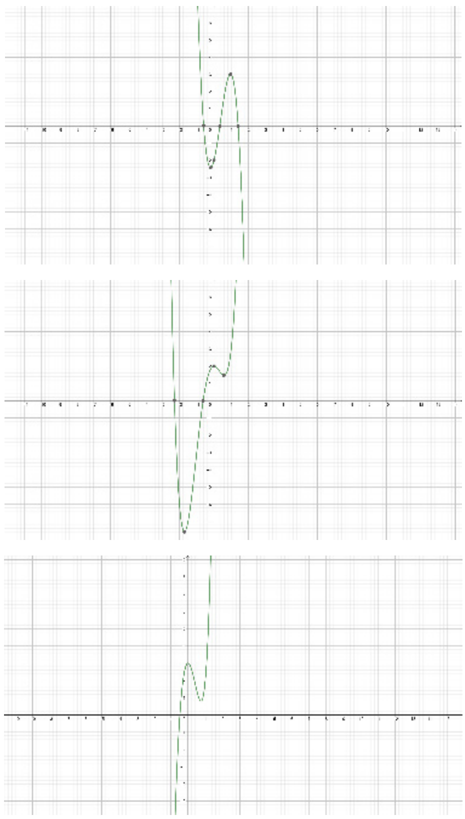
$$P(x)=c_0+c_1\,x+c_2\,x^2+c_3\,x^3+\dots c_n\,x^n$$

Donde $c_1,c_2,\dots c_n$ son números reales llamados coeficiente del polinomio; $n\in\mathrm{N}$ es un número natural; $c_n\neq 0$, n representa el grado del polinomio (Pérez, 2008). Entre las funciones polinómicas algunas de ellas son:

Función polinómica	**Características**	**Ejemplo Gráfica**
Constante	✓ Tiene la forma $y=a$, lo que significa que, para todo valor que toma la variable independiente, el valor de la variable dependiente siempre es el mismo. ✓ El dominio de esta función es el conjunto de los números reales. ✓ Su rango es un único número fijo. ✓ Su gráfica es una recta que es paralela al eje de las abscisas.	 Figura 13. $y=5$
Lineal	Tiene la forma $y=mx+b$ donde m representa la pendiente y b el punto de corte con el eje y. El dominio es el conjunto de los números reales. El rango es el conjunto de los números reales. Su gráfica es una línea recta. Si $m>0$ la recta es creciente. Si $m<0$ la recta es decreciente. Si $m=0$ la recta, la función se convierte en una función constante.	 Figura 14. $y=-\frac{3}{5}x+7$
Cuadrática	Su estructura es de la forma $y=ax^2+bx+c$, donde $a,b,c \in R$ y $a\neq 0$. La función se puede transformar en: $y=(x-h)^2+k$, donde h representa el desplazamiento de su gráfica con respecto al eje y representa el desplazamiento con respecto al eje. La gráfica es una parábola en la que su concavidad depende de a, esto es: si $a>0$ la parábola es cóncava hacia arriba y si $a<0$. El dominio es el conjunto de los números reales. El rango depende de la ordenada de la función en el vértice. Si w es la ordenada del vértice: $Ran_y = \begin{cases} y\geq w & \text{si la parábola es concava} \\ y\leq w & \text{si la parábola es concava} \end{cases}$	 Figura 15. $y=x2$

Cúbica	Su estructura es de la forma $y=ax^3+bx^2+cx+d$ donde $a,b,c,d \in R$ y $a\neq 0$ El dominio es el conjunto de los números reales.	 Figura 16. $y=x^3$

La figura 17 muestra otras funciones polinómicas:



$y=-7x^3+8x^2+4x-3$ $\quad$ $y=2x^4+3x^3-4x^2+2$ $\quad$ $y=2x^5+7x^3-10x^2+3$

2.3.1.2 Funciones racionales

Una función racional es una razón entre dos polinomios (Stewart, 2012), su estructura es:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Donde P y Q son polinomios. El dominio de este tipo de funciones está conformado por el conjunto de número reales tal que $Q(x) \neq 0$. La función más conocida es $y=\frac{1}{x}$ para la cual el dominio está conformado por el intervalo $(-\infty,1) \cup (1,\infty)$.

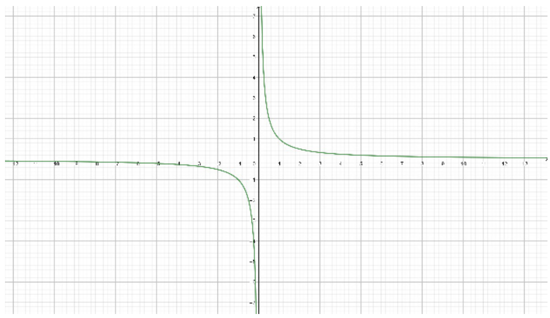


Figura 18 (a). $y=\frac{1}{x}$

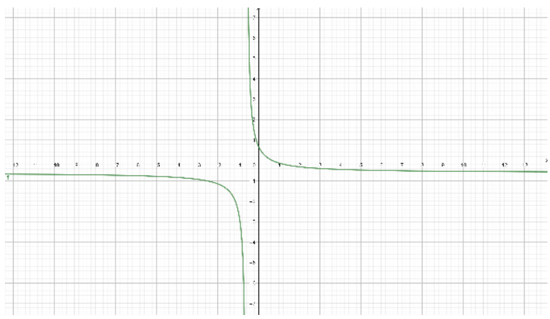


Figura 18 (b). $y=-\frac{3x-2}{5x+3}$

2.3.1.3 Función raíz

La función raíz es cualquier función que implique una raíz en la variable independiente. El dominio de esta función depende del índice de la raíz. Si dicho índice es par, el dominio son todos los reales para los cuales el radicando es mayor o igual a cero. Si el índice es impar, el dominio es todos los reales.

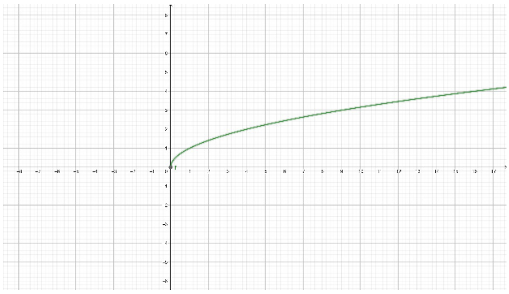


Figura 19 (a). $y=\sqrt{x}$

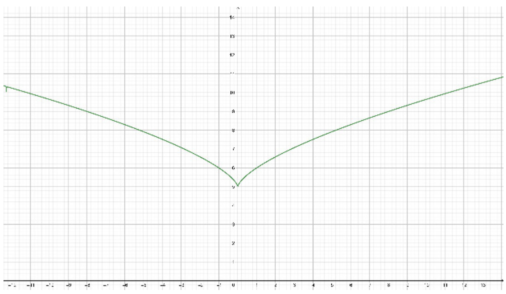


Figura 19 (b). $y=\sqrt[3]{x^2}+5$

2.3.1.4 Función a trozos

Es una función algebraica cuya estructura tiene más de un término. Estas funciones son muy útiles en el estudio de los límites, la continuidad y las derivadas (Leithold, 1998). El dominio depende de las funciones que estén asociadas al igual que el rango, como se ve a continuación:

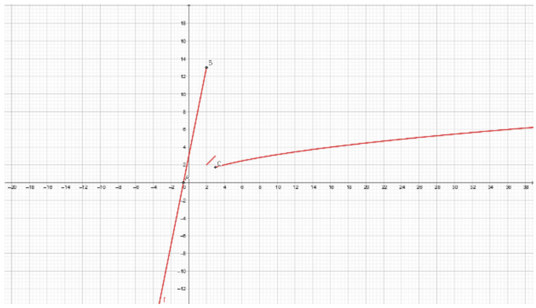
Ejemplo 5

Sea la función $g(x)=\begin{cases} 5x+3 \text{ si } x\leq 2 \\ x \text{ si } 2<x<3 \\ \sqrt{x} \text{ si } x\geq 3 \end{cases}$ determine el dominio, el rango y esboce su gráfica.

Solución

Como las funciones que conforman a g son polinómicas, el dominio está conformado por el conjunto de los números reales, esto es, $Dom_g=R \qquad Ran_g=R$

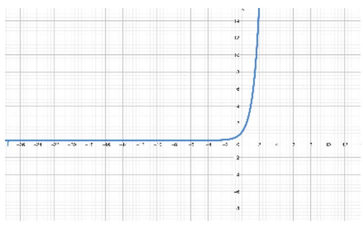
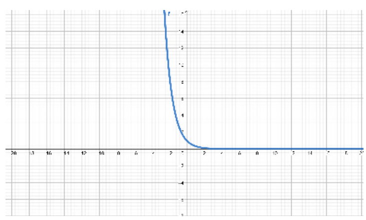
Figura 20

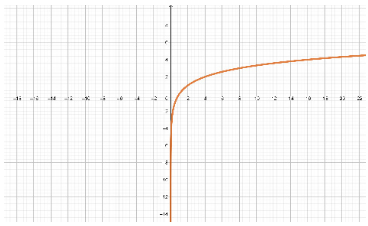
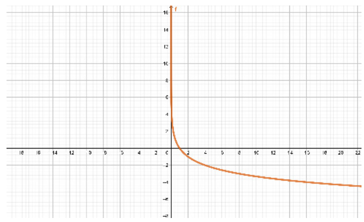
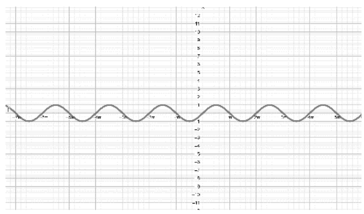
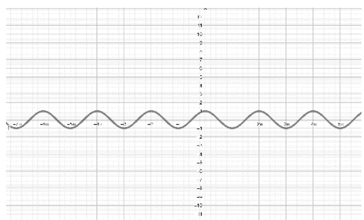
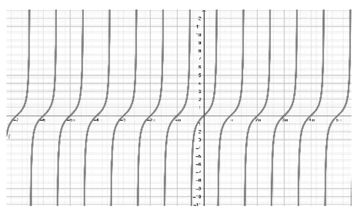


2.3.2 Funciones transcendentes

Las funciones trascendentes son aquellas que no son algebraicas; estas se caracterizan por que la variable independiente representa un exponente, un índice de una raíz, el ángulo de una función trigonométrica o se relacione con un logaritmo.

Ejemplo 6

Función	Definición	Gráfica
Exponencial	Es de la forma $f(x)=a\^x$ donde a es una constante positiva (Stewart, 2012). Como se observa en las Figuras 21 (a) y (b) el dominio es R y el rango es $(0,\infty)$.	 Figura 21 (a). $y=4^x$  Figura 21(b). $y=\frac{1x}{3}$

Logarítmica	Es de la forma $f(x)=\log_a x$ donde a es una constante positiva (Stewart, 2012). En las Figuras 22 (a) y (b) el dominio es $(0,\infty)$ y el rango es R. Se puede observar que la función logarítmica es la inversa de la función exponencial.	 Figura 22 (a). $y=\log_2 x$  Figura 22(b). $\log_{\frac{1}{2}} x$
Trigonométrica	Se definen desde la relación entre los lados de un triángulo rectángulo que se construye en una circunferencia unitaria. $y=\text{sen}x = {}^{\text{ordenada}}/_{\text{radio}}$ $y=\cos x = {}^{\text{abscisa}}/_{\text{radio}}$ $y=\tan x = {}^{\text{ordenada}}/_{\text{abscisa}}$ $y=\cot x = {}^{\text{abscisa}}/_{\text{ordenada}}$ $y=\sec x = {}^{\text{radio}}/_{\text{abscisa}}$ $y=\csc x = {}^{\text{radio}}/_{\text{ordenada}}$	 Figura 23(a). $y = \text{sen}\ x$  Figura 23(b). $y = \cos x$  Figura 23 (c). $y = \tan x$ Las funciones $y = \cot x$, $y = \csc x$, $y = \sec x$ se propondrán como ejercicio para el lector.

Ejemplo 7

Otras de las funciones importantes que se estudian en el cálculo son las funciones valor absoluto y parte entera que se definen de la siguiente forma:

$$f(x) = |x|$$

El valor absoluto de un número real se define:

se define: $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x<0 \end{cases}$

El dominio es el intervalo $(-\infty,\infty)$

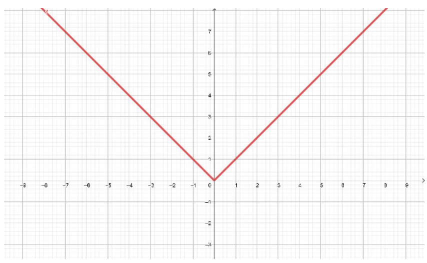


Figura 24. $y=|x|$

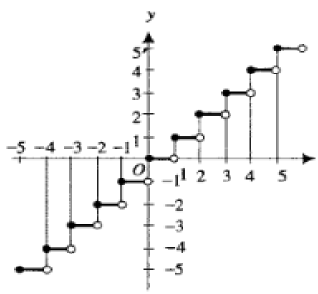
El rango es el intervalo $[0,\infty)$

Su gráfica es la unión de dos semirrectas que se intersecan en el origen, con pendientes 1 y -1, respectivamente (Leithold, 1998).

La función parte entera definida:

$f(x)=\|x\|$ Donde $\|x\|$ se define como el máximo entero menor o igual a x, por lo que se puede decir que el dominio es el conjunto de los números reales y el rango es el conjunto de los números enteros (Leithold, 1998).

Figura 25. $y=\|x\|$.



Fuente: Leithold (1998, p. 9).

2.4 transformación de funciones

Cuando se habla de transformar una función, significa que a partir de su gráfica se pueden construir nuevas gráficas de funciones, lo que permitirá al lector esbozar una gráfica de una función de una forma más sencilla a partir de representación algebraica. Algunas de estas transformaciones son:

En cuanto a su desplazamiento:

Sea $f(x)$ una función y $c>0 \in R$ entonces:

Figura 26. Transformaciones de funciones. Fuente: Recuperado de Cálculo en una variable, Stewart, J. 2008, sexta edición, pág 37

En cuanto a su alargamiento tanto vertical como horizontal:

Si c> I se tiene:

$Y = f(x) + c$, se desplaza la gráfica de $y= f(x)$ una distancia de c unidades hacia arriba
$y = f(x) - c$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia abajo
$y = f(x - c)$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia la derecha
$y = f(x + c)$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia la izquierda

Figura 27. Transformaciones de funciones

$y = cf(x)$, alárguese la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente en un factor de c
$y = (1/c)f(x)$, comprímase la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente en un factor de c
$y = f(cx)$, comprímase la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente en un factor de c
$y = f(x/c)$, alárguese la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente en el factor de c
$y = -f(x)$, refléjese la gráfica de $y = f(x)$ respecto al eje x
$y = f(-x)$, refléjeses la gráfica de $y = f(x)$ respecto al eje y

Fuente: Stewart (2008, p. 38).

Figura 28 (a).

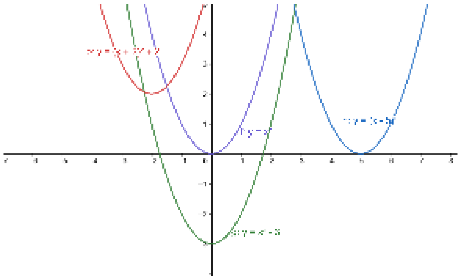


Figura 28 (b).

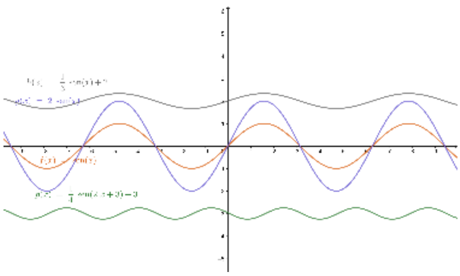
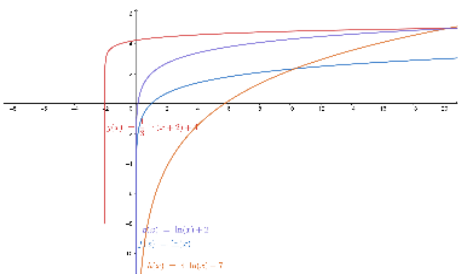


Figura 28(c).



Ejemplo 8

Dada la función $y=x^2$, use los esquemas de transformación para esbozar las siguientes funciones

a. $y=(x+3)^2-3$ b. $y=x^2+7x+10$ c. $y=2x^2-5x-12$ d. $y=-x^2-5$

Solución

La función (a) describe una parábola cóncava hacia arriba que está desplazada 3 lugares hacia la izquierda con respecto al eje x y 3 lugares hacia abajo con respecto al eje . La función (d) es una parábola cóncava hacia abajo y desplazada 5 lugares hacia abajo en torno al eje y. Las funciones (b) y (c) se deben transformar a la forma $f(x)=(x-h)^2+k$, como se muestra a continuación:

b. $y=x^2+7x+10 \rightarrow x^2+7x+\frac{49}{4}-\frac{49}{4}+10 \rightarrow (x+\frac{7}{2})^2-\frac{9}{4}$ Es una parábola cóncava hacia arriba, desplazada $\frac{7}{2}$ unidades hacia la izquierda en torno al eje x y desplazada $\frac{9}{4}$ hacia abajo en torno al eje y.

c. $y=2x^2-5x-12 \rightarrow 2(x^2-\frac{5}{2}x)-12 \rightarrow 2(x^2-\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}-\frac{25}{16})-12$

$\rightarrow 2(x^2-\frac{5}{2}x+\frac{25}{16})-\frac{50}{16}-12 \rightarrow 2(x^2-\frac{5}{2}x+\frac{25}{16})-\frac{121}{8}0 \rightarrow 2(x-\frac{5}{4})^2-\frac{121}{8}$. Es una parábola cóncava hacia arriba y alargada verticalmente 2 veces con respecto a $y=x^2$. Está desplazada hacia la derecha $\frac{5}{4}$ unidades en torno al eje x y desplazada $\frac{121}{8}$ hacia abajo en torno al eje y.

Figura 29 (a). $y = (x+3)^2 - 3$

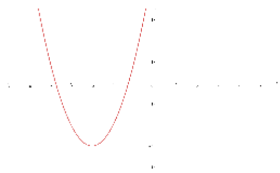


Figura 29 (b). $y = x^2+7x+10$

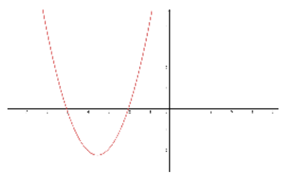


Figura 29 (c). $y = 2x^2-5x-12$

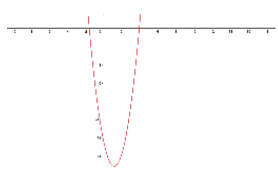
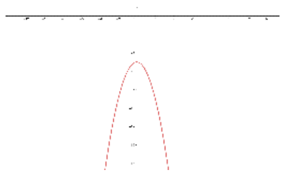


Figura 29 (d). $y = -x^2 - 5$



Sección de ejercicios:

1. Encuentre el dominio y el rango de las siguientes funciones, luego esboce su gráfica.

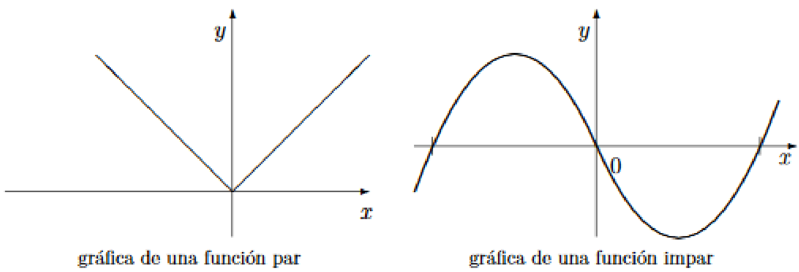
a. $y=\sqrt[3]{x-2}$ b. $y=2^x+3x-4$ c. $y=x^2-\frac{7}{2}$ d. $y=\frac{2x^2+7}{x^3+3}$ e. $y=8x-\frac{3}{2}$.

2. Estudiar cada una de las siguientes funciones y determinar dominio y rango, y esbozar su gráfica a partir de la transformación de funciones. Si las funciones son lineales o cuadráticas, encontrar los puntos de corte con los ejes y las coordenadas del vértice.

a. $y = x-2$ b. $y = -\frac{1}{5}x - 3$ c. $y = 2x^2 + 4x - 8$ d. $y = -6 - x^2$
e. $m = \sqrt{t} - 2$ f. $s=|z-2|$ g. $y=\frac{2x^2+7}{x^3+3}$ h. $y=\log_3 x+2$.

3. Se dice que una función (definida para todos los números reales). *f(x)* es una función par si *f(x) =f(−x)* para todo *x*. La gráfica de una función par es simétrica respecto del eje *y*. Se dice que es una función impar si *f(x) =−f(−x)* para todo *x*. Observar que la gráfica de una función impar es simétrica respecto del origen del plano cartesiano.

Figura 30.



Fuente: González y Caraballo (2013, p. 126).

De acuerdo con lo anterior, determine cuáles de las siguientes funciones son pares o impares o ninguna de las dos.

a. $y = x^3 + \frac{1}{2}$ b. $y = 5x + 5$ c. $g(x) = |x-2|+3$ d. $h(x) = 3^x - 2$
e. $m(x) = \frac{3x+2}{x^3-2} - 2$ f. $k(x)=x^2 - 3$ g. $y = sen\ x$ h. $y = cos\ x$

4. Esboce las funciones trigonométricas, $y=csc\ x$, $y=cotx$, $y=secx$.

Sección de problemas:

1. Una caja metálica que alberga materiales para construcción de forma rectangular sin tapa, en la cual una de las longitudes de la base es 3 veces la del ancho, tiene un volumen de 20 cm^3. Si se desea comprar una caja, el precio de ella depende de su material, por lo que cobran $15 por metro cuadrado en la base y $7 por metro cuadrado en sus lados laterales. Construya una función en la que exprese el precio del material en función del ancho de la base.

2. Dados los siguientes enunciados, escriba la expresión algebraica que representa la función y halle su dominio y rango.

   a. Un rectángulo tiene 22 cm2. El perímetro está en función de sus lados.

   b. El área total de un cubo como función de su volumen.

   c. Una empresa de transporte de mercancía cobra $10 por el kilómetro recorrido y cobra $2000 de cargo fijo. Expresar el costo de un viaje en función de la distancia recorrida x si $0< x <50$.

3. Para abastecer el agua potable a un municipio, la empresa de acueducto instala un sistema de tuberías que salen de un mismo punto de un pozo profundo que está a 20 m de la superficie a dos puntos diferentes *x* y *y* separados por 3 km. Si la línea que une a los puntos *x* y *y* es paralela al pozo, determine una función que estime el metraje de tubo que se necesita desde uno de los puntos de la superficie y el punto desde donde sale la tubería.

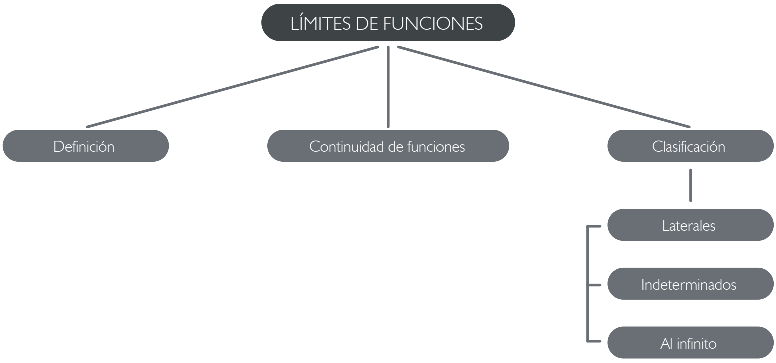
4. Una compañía de telefonía móvil lanza al mercado un plan de celular que consiste en cobrar un cargo fijo de \$10 y \$2,5 por minuto durante los primeros 80 minutos; para los minutos adicionales, tendrá un cargo de \$4 por cada uno. Plantee una función que relacione el precio total del plan $P(x)$ y la cantidad de minutos consumidos durante un mes.

5. Hace 10 años un aeropuerto ejecutaba un promedio de 300 operaciones diarias. Cinco años después el aeropuerto se amplió en cuanto a su infraestructura, lo que generó que su capacidad de operaciones diarias aumentara a 900. Si se supone que su crecimiento es lineal, determine:

d. Exprese mediante una expresión algebraica la cantidad de operaciones en función del tiempo.

e. Realice un gráfico de la situación.

3. Límites



3.1 Conceptos básicos

En el estudio de las funciones, es importante determinar el comportamiento de estas para unos valores particulares y sus proximidades. Este estudio determina, entre otras cosas, la continuidad de la función, permite determinar el comportamiento de las rectas tangentes a la función y, en consecuencia, aspectos como su curvatura de la curva generada.

Por ejemplo, si es necesario estudiar una función $f(x)$ en las cercanías de un valor $x=a$, requeriría, de forma intuitiva, realizar una tabulación para determinar a qué valores se acerca y en la medida que nos acercamos a x, o bien por la derecha, o bien por la izquierda.

El concepto previo permite definir un criterio muy importante, cuando de límites se trata:

El $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, si y solo sí cumple que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

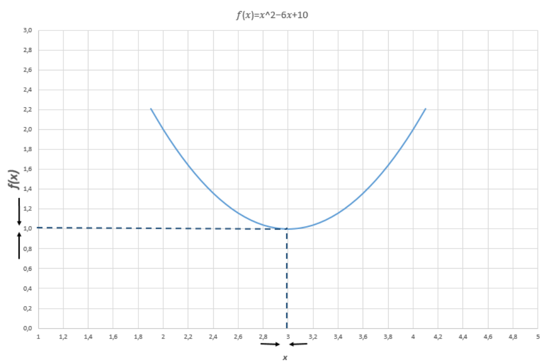
Ejemplo 1:

Sea , calcular el

$\lim_{x \to 3^+} f(x)$		$\lim_{x \to 3^-} f(x)$	
x	f(x)	x	f(x)
3,00001	*1,0000000001*	*2,99999*	*1,0000000001*
3,0001	*1,00000001*	*2,9999*	*1,00000001*
3,001	*1,000001*	*2,999*	*1,000001*
3,01	*1,0001*	*2,99*	*1,0001*
3,1	*1,01*	*2,9*	*1,01*
3,2	*1,04*	*2,8*	*1,04*
3,3	*1,09*	*2,7*	*1,09*
3,4	*1,16*	*2,6*	*1,16*
3,5	*1,25*	*2,5*	*1,25*
3,6	*1,36*	*2,4*	*1,36*

De la tabla se concluye que , con , tiende a 1.

Figura 31.



3.2 Límites indeterminados

El resolver los límites implica evaluar la función en ***a***, es decir:

Ejemplo 2:

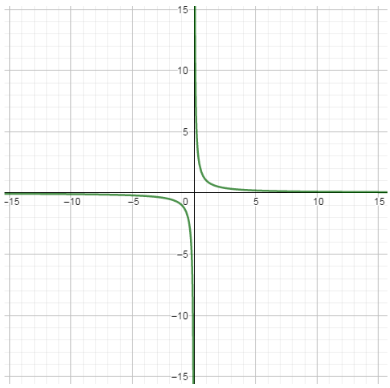
$$\lim_{x \to 2} x^2 - 3x + 2 = 2^2 - 3(2) + 2 = 0$$

Al realizar esta evaluación, se pueden obtener los siguientes resultados:

$$\lim_{(x \to a)} f(x) \begin{cases} l, \text{ El límite existe y tiende a } l \\ {}^{k}/_{0}, \text{ El límite puede no existir o ser infinito} \\ {}^{0}/_{0}, \text{ Se presenta una indeterminación matemática que debe ser removida} \end{cases}$$

- En el primer resultado, $\lim f(x) = l$, el límite se da por resuelto. El Ejemplo 2 es un caso típico de este resultado, el $\lim_{(x \to 2)} x^2 - 3x + 2$ es igual a cero (0). Y no se requieren procesos adicionales para evaluarlo.

Figura 32.



- Para el segundo resultado, $\lim_{x \to a} f(x) = \frac{k}{0}$, es importante verificar la existencia del límite y evaluarlo por la derecha y por la izquierda:

Ejemplo 3:

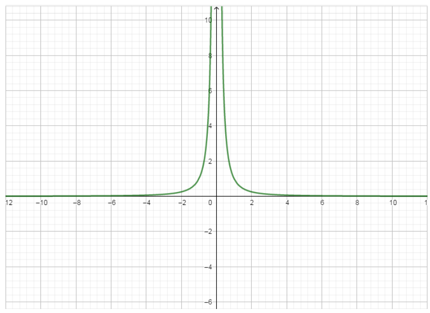
En cambio . Esto implica que, al ser los límites laterales diferentes, el límite no existe.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0}$$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, en cambio $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. Esto implica que, al ser los límites laterales

diferentes, el límite no existe.

Figura 33.



Ejemplo 4:

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty$, y el $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty$. Esto implica que, al ser los límites

laterales iguales a infinito, el límite tiende a infinito.

Para el tercer resultado $\lim_{x\to a} f(x) = \frac{0}{0}$, es necesario realizar procesos algebraicos para eliminar la indeterminación.

Ejemplo 5:

$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{0}{0}$ Este resultado hace necesario realizar procesos de factorización que permitan realizar el cálculo correcto, así:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 2+2 = 4$$

$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \frac{0}{0}$ Este resultado hace necesario realizar procesos

$$\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-9)}{(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-9)}(\sqrt{x}+3)}{\cancel{x-9}} = \lim_{x \to 3} \sqrt{x}+3 = \sqrt{9}+3 = 6$$

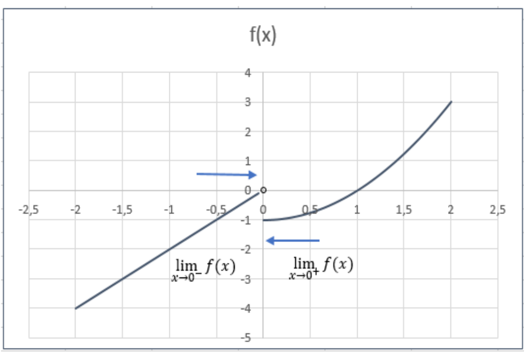
de racionalización que permitan realizar el cálculo correcto así:

3.3 Límites laterales

Los límites laterales se encargan de revisar una función que se acercan por el lado derecho o por el izquierdo a un valor del dominio de la función.

$$f(x)\begin{cases} 2x, & x < 0 \\ x^2-1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Figura 34.



Para el caso presentado en la figura, al acercarnos por la derecha a $x = 0$, se usará la función $f(x)=x\ 2-1$ que es la que corresponde a los

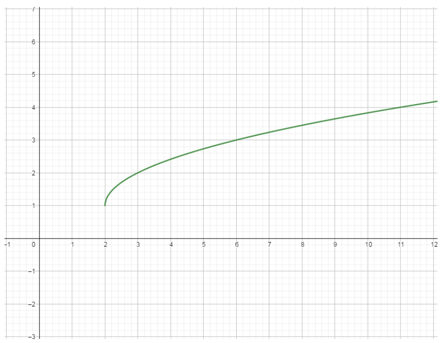
$x \geq 0$, entonces el límite por la derecha se notaría: $\lim_{x \to 0^+} x^2 - 1 = -1$

Ahora bien, si nuestro interés es calcular el límite por la izquierda, la función a usar es $f(x) = 2x$ que es la que corresponde a los $x<0$, y el límite sería $\lim_{x \to 0+} 2x = 0.$

Ejemplo 6:

Supongamos la función $f(x) = \sqrt{x}-2+1$, al graficarla observamos que su dominio esta dado para los números reales que pertenecen al intervalo $[2,\infty)$.

Figura 35.



En este caso, hallar el $\lim_{.x \to 2-} f(x)$ no es posible, puesto que, para valores

menores que 2, la función no está definida para los números reales.

En cambio, el $\lim_{x \to 2+} f(x)=1$, dado que para los valores mayores o iguales

que 2, la función sí está definida.

En este caso, si la pregunta es ¿el $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe?

La respuesta es no, dado que la condición de existencia de los límites es que los límites laterales sean iguales entre sí. Y este caso no se cumple.

3.4 Límites al infinito

Cuando el estudio de la función requiere que determinemos su comportamiento en el infinito positivo $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ o negativo $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, es importante considerar algunas reglas que facilitarán su proceso:

i $\infty + \infty = \infty$, sumar dos números infinitamente grandes nos dará como resultado un número infinitamente grande.

ii $\infty - \infty =$ indeterminación, al desconocer la magnitud cada uno de los infinitos, es imposible determinar el resultado.

iii $\pm\infty \pm k = \pm\infty$ independiente del signo de la constante, dado que cualquier número sumado o restado a un número infinitamente grande no afectará significativamente al número.

iv $\pm\infty \times \pm\infty = \pm\infty$

v $\pm\infty \div \pm\infty =$ indeterminación.

vi $k/\pm\infty = 0$ En la medida en que el denominador crece, el resultado de la división se hace más pequeño, de tal manera que cuando es infinitamente grande el resultado es tan pequeño que tiende a cero.

vii $0 \times \pm\infty =$ indeterminado, como se desconoce el valor de , no se puede terminar el resultado de la operación.

La evaluación de los límites que tienden al infinito es sencilla:

Ejemplo 7:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3x + 2}{4x^2 + 5x - 1}$$

Como en todos los casos de los límites, el primer paso a seguir es evaluar para saber si el límite es indeterminado, y si es así, proceder a realizar las operaciones correspondientes para definir su valor real:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3x + 2}{4x^2 + 5x - 1} = \frac{2\infty^2 - 3\,\infty + 2}{4\infty^2 + 5\infty - 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

Como el resultado es una indeterminación, entonces se realiza el procedimiento correspondiente, a saber:

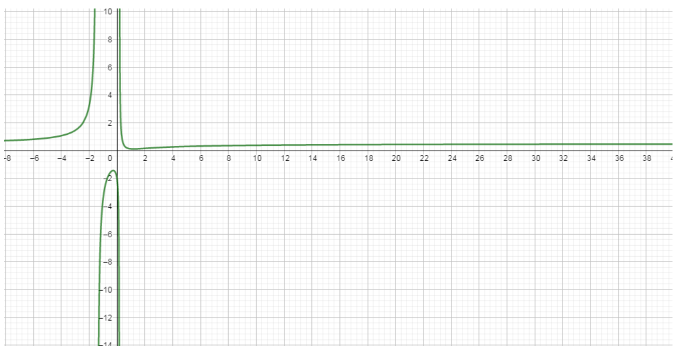
Se determina cuál es la variable con el mayor exponente en el denominador, en este caso es x^2, se dividen todos y cada uno de los términos de la función entre este valor, se realizan las simplificaciones correspondientes y posteriormente se evalúa:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{4 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{2 - 0 + 0}{4\ 0 - 0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Así se puede concluir que el valor de este límite es $\frac{1}{2}$.

La existencia y el cálculo de los límites al infinito proveen información importante para el estudio de las funciones; cuando el límite al infinito de una función existe, su valor determina la existencia y ubicación de una asíntota horizontal, para el caso de este ejercicio:

Figura 36.



Ahora bien, cuando al realizar la evaluación primera del límite el resultado no es una indeterminación, el límite ya está resuelto.

Ejemplo 8.

a. $\lim\limits_{x \to \infty} 3x2 + 2x - 1 = \infty$

b. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x-2} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{x^3}}{2\frac{x^3}{x^3} + \frac{5}{x^3}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{2 - \frac{5}{x^3}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{0}{2-0} = 0$

c. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2+3}{x-2} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2\frac{x^2}{x} + \frac{3}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{2}{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x + \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{2\infty + 0}{1 - 0} = \infty$

3.5 Continuidad

Cuando una función no presenta rupturas ni cambios abruptos, se define como función continua. Matemáticamente, la continuidad de una función en requiere el cumplimiento de las siguientes tres condiciones:

i. $f(a)$ debe existir

ii. El $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ debe existir

iii. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(a)$

Ejemplo 9

Determinar si la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}, & si\ x \neq 2\ en\ a=2 \\ 1, & si\ x = 2 \end{cases}$

Constatamos las tres condiciones para el valor de ***a***:

i. f(2) = 1, existe

ii. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)} = 2 + 1 = 3$$

iii. como sucede que $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} \neq f(2)$*, se puede afirmar que la funciónno es continua en a =2*

Si el interés es determinar el intervalo en el que la función es continua, lo que se debe hacer es determinar el dominio de la función. Toda función es continua en su dominio.

Ejemplo 10

¿Dónde es discontinua la función $\frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$?

Se debe determinar el dominio de la función: $x - 2 \neq 0$, por tanto $x \neq 2$.

La función es discontinua en $x = 2$, y es continua en $(-\infty,2)\cup(2,\infty)$.

Se pueden presentar dos clases de discontinuidades, cuando se evalúan sobre un valor de ***a***:

✓ Discontinuidad removible: esta se presenta cuando la función evaluada en ***a*** existe y el $\lim_{x \to a} f(x)$ también existe, pero no son iguales.

✓ Discontinuidad esencial: esta se presenta cuando el $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe.

Ejemplo 11

Determine si la función $f(x) = \begin{cases} 1 - x, \text{ si } x \leq 2 \\ x^2 - 2x, \text{ si } x > 2 \end{cases}$ en $a = 2$.

i. $f(2) = 1 - 2 = -1$

ii $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 1 - x = -1$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 - 2x = 0$

Como los límites laterales son diferentes, el $\lim_{x \to \infty} f(x)$ no existe. Por tanto, esta función presenta una discontinuidad esencial en $a = 2$.

Sección de ejercicios

1. $\lim\limits_{x\to 1} x^2 + 3x - 1$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{(x+4)}-2}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2 + 6x + 5}{x + 5}$

4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$

5. $\lim\limits_{t\to 2} \dfrac{2^{-1} - t^{-1}}{t - 2}$

6. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x^3 - 2x^2 + x - 2}{2x^3 - 3}$

7. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2 + 2x - 2}{5x^3 + 1}$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3 + 2x + 5}{3x - 2}$

9. $\lim\limits_{x\to \infty} 2x4 + 3x2 - 5$

10. $\lim \dfrac{12x^2 - 5x + 6}{4x^2 - 5x + 1}$

11. Determine si las siguientes funciones son continuas en el punto dado; si son discontinuas, determine qué clase de discontinuidad presenta.

a. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, si\ x \neq 2 \\ 8, si\ x = 2 \end{cases}$ $\quad si\ a = 2$

a. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2, si\ x < 1 \\ 3x + 5, si\ x > 1 \\ 0, si\ x = 1 \end{cases}$ $\quad si\ a = 1$

c. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}, si\ x > 3 \\ 2x - 5, si\ x < 3 \\ 1, si\ x = 3 \end{cases}$ $\quad si\ a = 3$

12. Determine en cuál(es) intervalo(s) las siguientes funciones son continuas:

a. $f(x) = \sqrt{x^2\text{-}9}$

b $f(x) = \frac{3x}{x+5}$

Sección de problemas

1. Una compañía financiera lanza una campaña que consiste en pagar una tasa de interés compuesto al 8 % anualmente por depósito de dinero que hagan sus clientes sin importar la cantidad. De acuerdo con esto, la cantidad en depósito luego de un año viene dada por la función:

$M(t) = x\,(1 + 0{,}8t)\ ^{1}/_{t}$, donde x es la cantidad de dinero invertido y t es el tiempo.

Si un cliente decide invertir $3.000, estime:

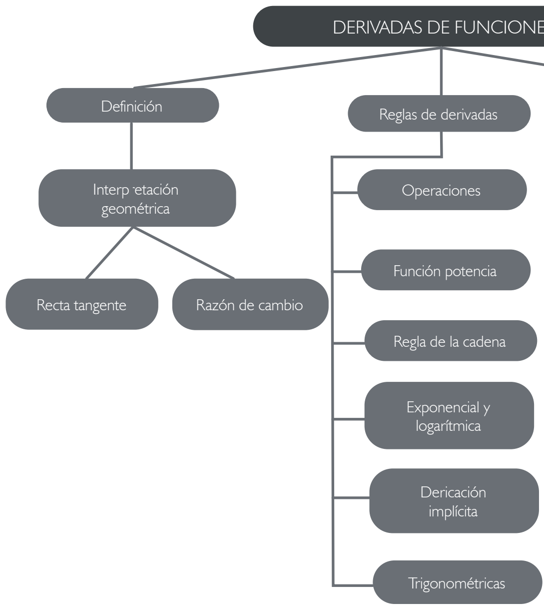
a. El capital después un año y 6 meses

b. Complete la siguiente tabla

Tiempo de inversión	Valor del tiempo	Valor del capital
Anualmente	$t =$	
Semestralmente	$t =$	
Cuatrimestralmente	$t =$	
Trimestralmente	$t =$	
Mensualmente	$t =$	
Semanalmente	$t =$	
Diariamente	$t =$	
Cada hora	$t =$	

c. Determine el valor del capital cuando el tiempo de inversión tiende a 0.

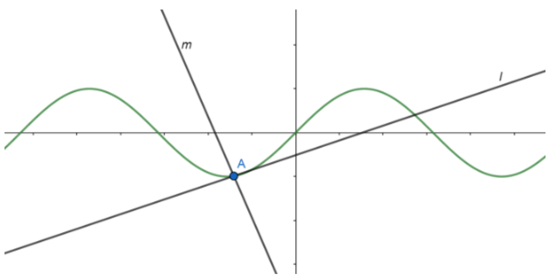
4. Derivadas



Una de las nociones primordiales del cálculo diferencial es el estudio del concepto de derivada. Esta idea fue desarrollada a partir de un problema geométrico que consistía en hallar la tangente de una curva en un determinado punto. Este problema aparece mucho después del estudio del cálculo integral y tarde en la historia de las matemáticas, en el siglo XVII, cuando el matemático francés Pierre de Fermat trató de determinar los máximos y mínimos de ciertas funciones. Él parte de la premisa de que en todo punto de una curva esta tiene una dirección definida que puede venir dada por una tangente; también observó que en los puntos en los que la curva tiene un máximo o un mínimo, la tangente es horizontal. De esta forma, el problema se centra en determinar la dirección de la tangente en cualquier punto de la curva, lo que conduce al desarrollo de la noción de derivada (Apostol, 1984).

En consecuencia, para desarrollar el concepto de derivada, se parte del problema de hallar la pendiente de una recta tangente a una curva dada en un punto. Para abordar este problema, se considera el concepto de recta tangente. Desde la geometría euclidiana, una recta tangente a una circunferencia se define como aquella que la interseca en un único punto (Escobar, 2012); sin embargo, esta definición se vuelve compleja en una curva cualquiera, ya que no cumpliría la condición de dicha definición, por lo que inicialmente este concepto se verá de forma intuitiva y, luego, se definirá formalmente desde el concepto de límite. Para llegar al concepto de recta tangente a una curva, se parte de una recta secante, como se observa en la figura 38, la cual se considera como toda línea recta que interseca a la curva en dos o más puntos (Haeussler, Richard & Wood, 2008).

Figura 37a. La recta ***l*** es tangente a la curva en A.



La recta ***m*** no es tangente a la curva.

Figura 37b. La recta es tangente a la curva en el punto A.

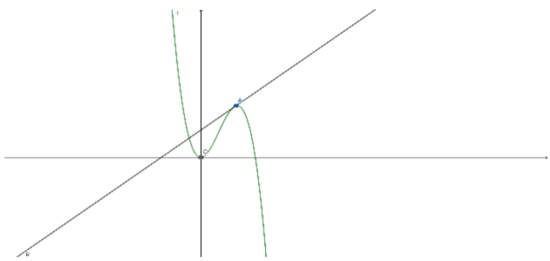


Figura 38 a. l es la recta secante que pasa por los puntos A y B.

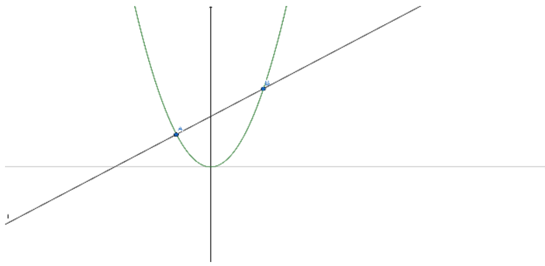
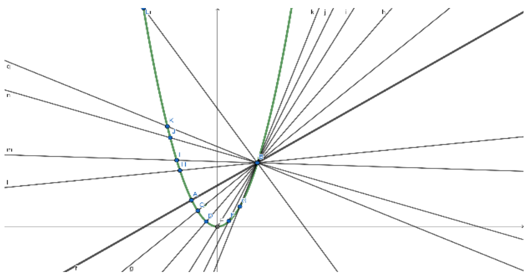


Figura 38b. Rectas secantes que se acercan a la recta tangente.



El objetivo es definir la recta tangente en el punto B, así que se considera el otro punto de la secante, el punto A, y se mueve hacia el punto B alrededor de la curva tanto por derecha como por la izquierda, tras lo cual se obtienen diferentes secantes que se van acercando a la posición del límite que determinaría la recta tangente en B. La pendiente de dicha recta tangente, en caso de que exista, es lo que se conoce como la derivada de una función en un punto de la curva que determina la función, tal como se definirá a continuación.

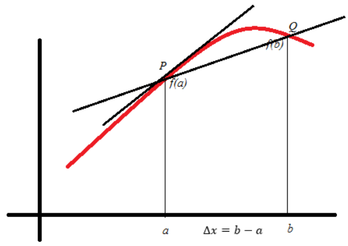
4.1 Conceptos básicos

4.1.1 Definición de derivada

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo (a,b). Sea $\Delta x = b - a$. Considérese $f(a)$ y $f(b)$ como las imágenes de la recta secante que pasa por P y Q, tal como lo muestra la figura 39. La pendiente de la recta tangente en ***P*** se define desde el límite como un incremento de la función así:

$$f'(a)= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Figura 39.



Siempre que el límite exista.
Se dice que $f'(x)$ es la derivada de $f(x)$.
La derivada de una función también se puede denotar como:

$$y', \quad \frac{d}{dx}, \quad \frac{dy}{dx}$$

Ejemplo 1:

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $Y= 2x^2 + 3x -3$ en el punto donde su abscisa es.

Solución

Para hallar la ecuación de una recta, se debe conocer la pendiente y uno de sus puntos; así, pues, la pendiente de dicha recta se obtiene con la derivada de la función dada y evaluada en $\frac{1}{2}$, como se muestra a continuación.

$$f'(x) = m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2(x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x) -3) - (2x^2 + 3x - 3)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = m = \lim \frac{2(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + 3x + 3\Delta x -3 - 2x^2 - 3x + 3)}{\Delta x}$$

Luego evaluando la pendiente en $^1/_2$ se obtiene $m=4(^1/_2)+3=5$.

Además, donde la abscisa es $^1/_2$ la ordenada de la función es $y=2(^1/_2)^2+3(^1/_2)-3=-1$.

Por tanto, la ecuación de la recta tangente con pendiente $m=5$ y que pasa por el punto $(^1/_2, -1)$ es:

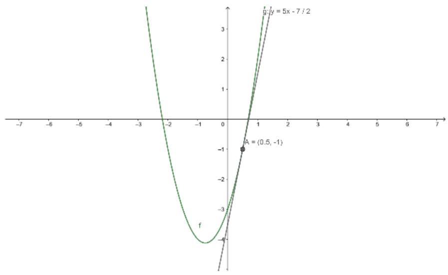
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 1 = 5\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$y = 5x - \frac{5}{2} - 1$$

$$y = 5x - \frac{7}{2}$$

Figura 40.



Ejemplo 2:

Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva y determine los puntos donde la pendiente es paralela al eje ***x***.

Solución

Al calcular la función que representa la pendiente de la curva se obtiene:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3(x+\Delta x)^3-5(x+\Delta x)] - [3x^3-5x]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^3 + 9x^2\Delta x + -9x\Delta x^2 + 3\Delta x^3 - 5x - 5\Delta x - 3x^3 + 5x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{9x^2\Delta x + 9x^2\Delta x^2 + 3\Delta x^3 - 5\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 9x^2 + 9x\Delta x - 5 = 9x^2 - 5$$

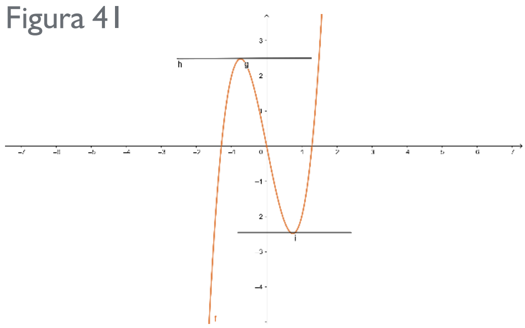
Luego, para determinar los puntos donde la pendiente es horizontal, se iguala la derivada a 0 para obtener:

$$0 = 9x^2 - 5$$

$$5 = 9x^2$$

$$\pm\sqrt{\frac{5}{9}} = x$$

Figura 41



4.1.2 La derivada como razón de cambio

Ejemplo 3:

Otra de las interpretaciones que tiene la derivada es como razón de cambio; aquí se supone que y es una cantidad que depende de x sabiendo que $y = f(x)$. Si x varía de x_1 a , la diferencia entre x_2 y x_1 se denominará incremento de ***x***:

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

Análogamente el incremento en y es: $\Delta x = f(x_2) - f(x_1)$. El cociente de dichos incrementos está dado por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Al cociente anterior se le llama razón de cambio promedio de y con respecto de x (Stewart, 2012)**.** Así, al hacer intervalos más pequeños de tal forma que x_2 tienda a x_1, esto es, hacer que esta diferencia tienda a 0, se denominará la razón instantánea de cambio de y con respecto a x**.**

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Según lo anterior, encuentre la razón de cambio instantánea de la función $y = x^3 - 3$ con respecto a ***x*** y luego evalúela en $x = 5$.

Solución

Al aplicar la definición de derivada como razón de cambio y sus reglas, se tiene:

$$y = 3x^2.$$

Al evaluarla en $x=2$, se obtiene $y=12$, lo que significa que cuando $x=2$ **y** crece 12 veces más rápido que x.

Ejemplo 4:

Se infla un balón de baloncesto y se quiere hallar la razón de cambio del volumen con respecto al radio cuando este mide 15 cm.

Solución

Si se considera que el balón tiene forma esférica y el volumen está en función de su radio, se tiene que:

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dv}{dr} = \frac{12}{3}\pi r^2 = 4\pi r^2$$

Cuando el radio es 15 cm, la razón de cambio es $\frac{dv}{dr}(15) = 4\pi(15^2) = 900\pi$ lo que significa que, cuando el radio del balón es 15 cm, el volumen 900π crece más rápido que su radio.

3.1.3 La derivada como velocidad

Ejemplo 5:

Una partícula se desplaza a lo largo de una curva definida por la función que relaciona la distancia medida en pulgadas y el tiempo en segundos:

$$m = 7k^2 - 4k + 2.$$

Encuentre la aceleración en función del tiempo y determine la aceleración después de 5 segundos.

Solución

Considérese la ecuación de movimiento de la partícula como una función de posición; así pues, la velocidad se considera como el límite de la razón de cambio entre las diferencias de la distancia que recorre la partícula en un intervalo de tiempo, esto es, la derivada de la función. De esta forma:

$$m' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(7(k + \Delta k))^2 - 4(k + \Delta k) + 2] - [7k^2 - 4k + 2]}{\Delta k}$$

$$m' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{7k^2 + 14k\Delta k + 7\Delta k^2 - 4k - 4\Delta k + 2 - 7k^2 + 4k - 2}{\Delta k}$$

$$m' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{14k\Delta k + 7\Delta k^2 - 4\Delta k}{\Delta k} = \lim 14k + 7\Delta k - 4 = 14k - 4$$

La función obtenida $m` = 14k - 4$ representa la velocidad instantánea o simplemente velocidad de la partícula en un intervalo de tiempo. Luego, la aceleración representa el cambio de velocidad en un intervalo de tiempo, lo que implica que en términos matemáticos representa la derivada de la velocidad y la segunda derivada de la función de posición. Por tanto:

$$m'' = \lim \frac{[7(k + \Delta k) -4] - [14k - 4]}{\Delta k}$$

$$m'' = \lim \frac{14k + 14\Delta k - 4 - 14k + 4}{\Delta k} \lim 14k = 14k$$

Lo que significa que la función de aceleración viene representada por. La aceleración después de 5s es $70\ in/s2$

4.2 Reglas para derivadas

Aunque todas las derivadas se pueden realizar mediante la definición, en algunas de ellas se vuelve un proceso que, aparte de ser extenso, es tedioso. Así pues, existen unas reglas de diferenciación que ya han sido demostradas desde su definición y permiten derivar una función de forma rápida y evitar el cálculo de límites. Algunas de ellas son:

Derivada de función	Ejemplo
Función constante Si c es una constante, entonces: $\frac{d}{dx}(c) = 0$ La derivada de una constante siempre es cero.	Si $y=v - \sqrt{3}$ $\frac{d}{dx}(-\sqrt{3}) = 0$
Función potencia Si $y=x^n$ donde n es cualquier número real, entonces: $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	Si $y = x^{-\frac{4}{3}}$ $\frac{d}{dx}(x^{-\frac{1}{3}}) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$
Función (producto de una constante y una función) Si c es una constante y f una función, entonces: $\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$	Si $y = 15x^3$ $\frac{d}{dx}(15x^3) = 45x^2$

Adición y sustracción de funciones Si f y g son funciones, entonces: $[f(x)+g(x)]' = f(x)' + g(x)'$ $[f(x) - g(x)]' = f(x)' - g(x)'$	Si $y = \sqrt{3m^3 + 2m - 6}$ $\frac{d}{dx}(\sqrt{3m^3 + 2m - 6})$ $= \frac{d}{dx}(\sqrt{3m^3}) + \frac{d}{dx}(2m)$ $+ \frac{d}{dx}(-6)$ $= 3\sqrt{3m^2} + 2$
Producto y cociente de funciones Si f y g son funciones, entonces: $[f(x) + g(x)]'g(x) + f(x)g(x)'$ $[\frac{f(x)}{g(x)}]' = \frac{f(x)' g(x) - g(x)'f(x)}{[g(x)]^2}$	Si $y = 7x2$ $\frac{d}{dx}(7x^2) = [\frac{d}{dx}(7)]x^2 + 7[\frac{d}{dx}(x^2)]$ $= 14$ Si $Y = \frac{3x^2}{\sqrt{x}}$ $\frac{d}{dx}(\frac{3x^2}{\sqrt{x}}) = \frac{6x\sqrt{x} - (\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})(3x2)}{(\sqrt{x})^2}$ $= \frac{6x\sqrt{x} - \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}}{x}$
Función exponencial Si $f(x) = a^x$ entonces $f(x)' = a^x lna\,(\frac{d}{dx})x$	Si $y = e^x$ $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x lne\,(\frac{d}{dx})x$ $=e^x$
Función logarítmica Si $f(x) = loga_x$, entonces: $f'(x) = \frac{(\frac{d}{dx})\,x}{x\ in\ a}$	Si $y = log(5x - 3)$ $\frac{d}{dx} lox\,(5x - 3) = \frac{5}{(5x - 3)\ in\ 10}$ Si $y = lnx$ $ln\,x$ es equivalente a $log_e x$, por tanto: $\frac{d}{dx}(lnx) = \frac{1}{x}$
Regla de la cadena Se usa para derivar funciones. compuestas. Si f y g son funciones compuestas, entonces: $[f)g(x))]' = f'(g(x)) * g'(x)$	Si y $=[(5x^4 + \frac{1}{2}x^2)^{-1/4}]'$ $\frac{d}{dx} = \frac{1}{4}(5x^4 + \frac{1}{2}x^2)^{-3/4}(20x^3 + x)$ $\frac{d}{dx} = \frac{20x^3 + x}{4(5x^4 + \frac{1}{2}x^2)^{-3/4}}$

Funciones trigonométricas si $f(x)$ es una función trigonométrica, entonces: $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \frac{d}{dx}(x)$ $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \frac{d}{dx}(x)$ $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec x^2 \frac{d}{dx}(x)$ $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x \frac{d}{dx}(x)$ $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x \frac{d}{dx}(x)$ $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x \frac{d}{dx}(x)$	Si $y = -\frac{1}{2}\tan(3x)$ $\frac{d}{dx}(-\frac{1}{2}\tan(3x)) = -\frac{3}{2}\sec 3x^2$ Si $y = \sin x^3 - \sec(x-4)$ $\frac{d}{dx}(\sin x^3 - \sec(x-4))$ $= \frac{d}{dx}\sin x^3 - \frac{d}{dx}\sec(x-4)$ $= 3son\ x^2 \cos x - \sec(x-4)\tan(x-4)$
Funciones trigonométricas inversas si $f(x)$ es una función trigonométrica inversa, entonces: $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{\frac{d}{dx}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{\frac{d}{dx}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{\frac{d}{dx}(x)}{1+x^2}$ $\frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = \frac{-\frac{d}{dx}(x)}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$ $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{\frac{d}{dx}(x)}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$ $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{-x}{1+x^2}$	$y = \cos^{-1}(x+3)$ $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}(x+3)) = -\frac{\frac{d}{dx}(x+3)}{\sqrt{1-(x+3)^2}}$ $= \frac{1}{\sqrt{1-x^2-6x-9}} = -\frac{1}{\sqrt{-x^2-6x-8}}$ Si $y = \csc^{-1}(3x+7)$ $\frac{d}{dx}\csc^{-1}(3x+7)$ $\frac{-\frac{d}{dx}(3x+7)}{\lvert 3x+7\rvert\sqrt{(3x+7^2-1}}$ $\frac{-3}{\lvert 3x+7\rvert\sqrt{9x^2+42x+50}}$
Otras funciones *Valor absoluto:* Si $f(x)=\lvert x\rvert$, entonces: $\frac{d}{dx}(\lvert x\rvert) = \frac{x}{\lvert x\rvert}(\frac{d}{dx})x$	Si $y=\lvert x^2-\frac{3}{2}\rvert$ $\frac{d}{dx}(\lvert x^2-\frac{3}{2}\rvert) = \frac{x^2-\frac{3}{2}}{\lvert x^2-\frac{3}{2}\rvert}$ $\frac{2x^2-3x}{\lvert x^2-\frac{3}{2}\rvert}$

4.3 Cálculo de derivadas

Ejemplo 6:

Aplique las reglas de derivación para encontrar la derivada de las siguientes funciones:

a. $f(x) = e^x (\ln(\cos x)^2) + \sin^{-1} (\frac{3x}{5 - x^2})$ b. $f(x) = \frac{-(x- \sqrt[3]{1+x^2}) + 7 (3^x) \ln (\frac{1}{2}x +4)}{x^2 \sqrt{x^2 + 2}}$

Solución

a. $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} [e^x (\ln(\cos x)^2 + \sin^{-1} \frac{3x}{5 - x^2}]$

$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} e^x (\ln (\cos x)^2) + \frac{d}{dx} \sin^{-1} (\frac{3x}{5 - x^2}) \rightarrow$ Suma de derivadas

$\frac{d}{dx} f(x) = e^x (\ln (\cos x)^2) - \frac{2 e^x \cos x \sin x}{(\cos x)^2} + \frac{\frac{3x^2 + 15}{(5 - x^2)^2}}{\sqrt{1- \frac{3x}{(5 - x^2)^2}}}$

→ Derivada de ln, regla de la cadena y regla del cociente.

$\frac{d}{dx} f(x) = e^x (\ln(\cos)^2) - e^x \sin 2x (\sec x)^2 + \frac{\frac{3x^2 + 15}{(5 - x^2)^2}}{\sqrt{1- \frac{9x^2}{(5 - x^2)^2}}}$

→ Identidad trigonométrica

$\frac{d}{dx} f(x)\ e^x (\ln(\cos x)^2) - e^x \sin 2x (\sec x)^2 + \frac{(3x^2 + 5) (5 - x^2)}{\sqrt{(25-10x^2+x^4-9x^2)+(5-x^2)^2}}$

Operaciones

algebraicas

a. $\frac{d}{dx} f(x) = e^x (\ln(\cos x)^2) - e^x \sin 2x (\sec x)^2 + \frac{(3x^2 + 5) (5 - x^2)}{\sqrt{25-19x^2+x^4 * (5-x^2)}}$

$\frac{d}{dx} f(x) = e^x (\ln(\cos x)^2) - e^x \sin 2x (\sec x)^2 + \frac{(3x^2 + 5)}{\sqrt{25-19x^2+x^4 * (5-x^2)}}$

b. $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} [\frac{-(x - \sqrt[3]{1+x^2}) + 7(3^x) \ln (\frac{1}{2} x + 4)}{x^2\sqrt{x^2 + 2}}]$

$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} [\frac{-(x - \sqrt[3]{1+x^2})}{x^2\sqrt{x^2 + 2}}] + \frac{d}{dx} [\frac{7(x^3)\ln (\frac{1}{2}x + 4)}{x^2\sqrt{x^2 + 2}}]$

$$\frac{d}{dx}f(x)\ \frac{-1+\frac{1}{3}\,2x(1+x^2)^{-\frac{2}{3}}]\ [x^2\sqrt{x^2+2}]-[-x+\sqrt[3]{1+x^2}]\ [2x\sqrt{x^2+2+x^3(x^2+2)^{-\frac{1}{3}}}}{(x^2\sqrt{x^2+2})^2}\ +$$

$$\frac{[7(3^x\ln 3)\ln\frac{1}{2}x+4)+7(3^x)(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}x+4})]\ [x^2\sqrt{x^2+2}]-[2x\sqrt{x^2+2+x^3(x^2+2)^{-1/2}}]}{(x^2(x^2+2))^2}\ [7(3^x)\ln\tfrac{1}{2}x+4)]$$

4.3 Derivadas implícitas

Cuando se consideran funciones de la forma $y=e^x\ \ln|x+3|$, es inmediato encontrar su derivada a partir de las reglas que se expusieron, ya que la variable dependiente está dada explícitamente respecto de la variable independiente. No obstante, existen funciones en las cuales su variable independiente está expresada de manera implícita, esto es, la variable dependiente está definida implícitamente por una ecuación.

Ejemplo 7: Funciones implícitas

$$9y^4 + 2x = x^2y^3 + 7x^5y^3 - \frac{1}{5}x^2y$$

$$15xy^5 + 2xy - \frac{1}{5}x^4y^3 = 5x^3 - 2x^2y^2$$

Así pues, para derivar estas funciones, se deriva en ambas parte de la igualdad con respecto a la variable independiente, en este caso x, como se muestra a continuación:

En la primera función:

$a.\ \frac{d}{dx}(9y^4) + \frac{d}{dx}(2x) = \frac{d}{dx}(x^2y^3) + \frac{d}{dx}(7x^5y^3) - \frac{d}{dx}(\frac{1}{5}x^2y)$

$36y^3y' + 2 = 2xy^3 + 3x^2y^2y' + 35x^4y^3 + 21x^5y^2y' - \frac{2}{5}xy - \frac{1}{5}x^2y'$

Luego despejando y' se obtiene:

$36y^3y' - 3x^2y^2y' - 21x^5y^2y' + \frac{1}{5}x^2y' = 2xy^3 + 35x^4y^3 - \frac{2}{5}xy - 2$

$y'(36y^3 - 3x^2y^2 - 21x^5y^2 + \frac{1}{5}x^2) = 2xy^3 + 35x^4y^3 - \frac{2}{5}xy - 2$

$$y' = \frac{2xy^3 + 35x^4y^3 - \frac{2}{5}xy - 2}{36y^3 - 3x^2y^2 - 21x^5y^2 + \frac{1}{5}x^2}$$

b. $\frac{d}{dx}(15xy^5) + \frac{d}{dx}(2xy) - \frac{d}{dx}(\frac{1}{3}x^4y^3) = \frac{d}{dx}(5x^3) - \frac{d}{dx}(2x^2y^2)$

$$15y^5 + 75xy^4y' + 2y + 2xy' - \frac{4}{3}x^3y^3 - x4y^2y' = 15x^2 - 4xy^2 - 4x^2yy'$$

$$75xy^4y' + 2xy' - x^4y^2y' + 4x^2yy' = 15x^2 - 4xy^2 - 15y^5 - 2y + \frac{4}{3}x^3y^3$$

$$y'[75xy^4 + 2x - x^4y^2 + 4x^2y] = 15x^2 - 4xy^2 - 15y^5 - 4y + \frac{4}{3}x^3y^3$$

$$y' = \frac{15x^2 - 4xy^2 - 15y^5 - 2y + \frac{4}{3}x^3y^3}{75xy^4 + 2x - x^4y^2 + 4x^2y}$$

4.4 Derivada logarítmica

Una de las aplicaciones que tienen las derivadas logarítmicas es la utilidad en el cálculo de derivadas de funciones de la forma $y=f(x)^{g(x)}$, lo que facilita el proceso en este tipo de funciones, como se muestra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 8

Encuentre la derivada de la función $y=(\sin x)^{3x-4}$

Solución

Al aplicar las propiedades de los logaritmos, se obtiene:

$$\ln y = \ln(\sin x)^{3x-4}$$

$$\ln y = (3x - 4) \ln(\sin x)$$

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}[(3x - 4) \text{ in } (\sin x)]$$

$$\frac{y'}{y} 3\ln(\sin x) - (3x - 4)\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$y' = 3y\left[3\ln(\sin x) - (3x - 4)\frac{\cos x}{\sin x}\right]$$

$$y' = 3\,((\sin x)^{3x-4})\,[3 \ln (\sin x) - (3x - 4)\,\frac{\cos x}{\sin x}]$$

Ejemplo 9

Halle la derivada de $f(x) = (x^2 + x + 1)^x$

$$\ln (f(x)) = x\ln |x^2+x+1|$$

$$\frac{d}{dx} \ln [f(x)] = \frac{d}{dx}\,[x \ln/x^2 + x + 1/]$$

$$\frac{f(x)'}{f(x)} = \ln /x^2 + x + 1/ +x\,[\frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}]$$

$$f(x)' = (x^2 + x + 1)^x\,[in/x^2 + x + 1/ + x\,[\frac{2x^2 + 1}{x^2 + x + 1}]]$$

$$f(x)' = (x^2 + x + 1)x\,[\ln /x^2 + x + 1] + [\frac{2x^2 + x}{x^2 + x + 1}]]$$

Actividades de apropiación

1. Aplique las reglas de derivadas para hallar la derivada $\frac{d}{dx}$ de las siguientes funciones:

a. $y = (\frac{3 - 4X^2}{3 + 4X^2})^4 =$

b. $v = \frac{10}{(t+1)^2} \cos (\frac{t+3}{t+4}) \tan (\frac{t+3}{t+4}) =$

c. $f(x) = \sqrt{\frac{5-x}{2x}} =$

d. $y = \sqrt{(x + 5)^3} + \sqrt[3]{2x-3} =$

e. $y = (4x^2 - 1)^{1/2}\,(5x^2 + 3)^{1/3} =$

f. $z= (t + \frac{1}{t})^{12} =$

g. $g(x) = \ln [\csc x^2] + \sin [\ln(2x + .3)] =$

h. si $f(w) = \frac{\sqrt[3]{w - 1 + 5}}{(4w^2 - 2)^3}$, encuentre $f'(1), f'(\frac{2}{3}), f'(\sqrt{2}) =$

i. si $m(x) = \sqrt{1-h(x)}$, $h(-2) =3$, calcule $m'(-2) =$

j. $f(x) = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} =$

k. $y = \sin^{-1} (x^3 + 3x + 2)$

2. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $y=2x^2-3x-1$ en el punto donde la abscisa es 9.

3. Encuentre la ecuación de la recta que tiene pendiente $\frac{1}{2}$ y es tangente a la curva asociada a la función $y=x^2+x+1$.

4. Determine los puntos en la que la función definida $y = \frac{7 - x^4}{x + 3}$ tiene pendiente horizontal.

5. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $y=3x^2+5x+2$ y es perpendicular a la recta $y=-5x+2$.

6. Hallar la derivada implícita:

a. $\sin x3 + \sec y3 = \frac{1}{2}x$

b. $y = \cos (2x + 2y)$

c. $7x^2 - \frac{1}{3} xy + 18x + 7y^2 + 32y - 6 = 0$

d. $-3y = \tan (5x - 3y^2)$

7. El volumen V de un globo esférico de radio R está dado por:

$V= \frac{4}{3} \pi R^3$ donde V y R son funciones del tiempo durante el inflado del globo.

Encuentre la velocidad con la que varía el radio cuando este mida $0{,}5$ (ft).

4.5 Aplicaciones de la derivada

3.5.1 Tazón de cambio

Cuando se mide la forma en la que una variable cambia en función de la otra presente en la función, se habla de razón de cambio. La razón de cambio más común es la velocidad, la cual se define como el cambio de posición de un cuerpo en función de las variaciones en el tiempo:

$$\frac{\text{variación de la posición}}{\text{variación del tiempo transcurrido}}$$

Ejemplo 7:

Suponga que tiene un globo en forma de esfera, si le inyecta aire a razón de $450\ cm^3/min$, ¿con qué rapidez crecería el diámetro del globo cuando su radio es de 10 cm?

Para resolver este problema, es importante identificar la información dada:

$$\frac{dv}{dt} = 450cm^3/min$$

$$r = 10cm$$

La pregunta: $\frac{dv}{dt}$

Se sabe que el volumen de una esfera está dado por la ecuación:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{4}{3}\pi\frac{d^3}{8} = \frac{1}{6}\pi d^3$$

Derivando con respecto al tiempo, aplicando la regla de la cadena, se tiene:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dd}{dt} = \frac{1}{2}\pi d^2\frac{dd}{dt}$$

Reemplazando se tiene: $450^{cm3/min} = \frac{1}{2}\pi\,(20cm)^2\frac{dd}{dt}$

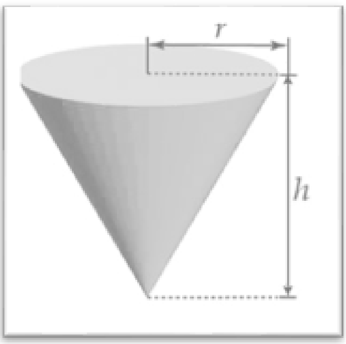
Despejando: $\frac{450^{cm3/min}}{200\,\pi\,cm^2} = \frac{dd}{dt}$

Por tanto $\frac{dd}{dt} = 0{,}7162\ cm/min$

Ejemplo 8:

Un tanque que contiene aceite tiene la forma de un cono circular invertido. Si la base tiene un radio de 4 m y la altura del tanque es de 6 m, si el tanque está lleno y empezamos a extraer agua a razón de $2^{m^3}/\ min$, encuentre la razón a la cual baja el nivel de agua cuando tiene una profundidad de llenado de 4 m.

Figura 42.

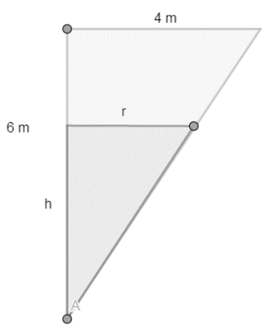


Primero, asignamos valores a las variables presentes en el grafico: V, volumen del cono; r, radio de la base del cono; y h, altura del cono.

La ecuación con la que se debe desarrollar este problema es la de volumen del cono: $V = \frac{1}{2}\pi r^2 h$.

Esta ecuación contine dos variables, esto hace necesario encontrar una estrategia para escribir una variable en función de la otra. En este caso, es útil usar los conceptos relacionados con la semejanza de triángulos.

Figura 43.



$$\frac{4m}{r} = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{2}{3}h$$

Esta relación se reemplaza en la fórmula de volumen del cono:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{3}h\right)^2 h = \frac{1}{3}\pi\frac{4}{9}h^2 h = \frac{4}{27}\pi h^3$$

A continuacíon se deriva:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4}{27}\pi 3h^2 \frac{dh}{dt} = \frac{4}{9}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

Reemplazando los valores que se tienen:

$$-2^{m^3}/min = \frac{4}{9}\pi\,(4m)^2\,\frac{dh}{dt}$$

$$-\frac{2^{m^3}/min}{\frac{64}{9}\pi m^2} = \frac{dh}{dt}$$

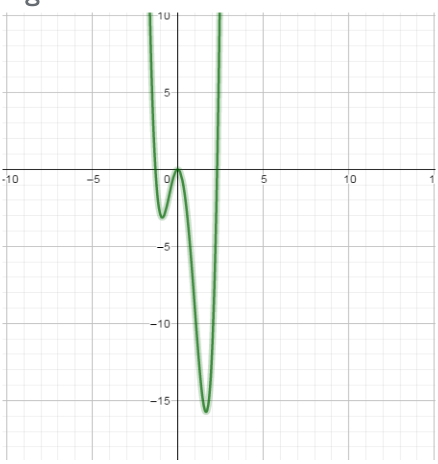
$$\frac{dh}{dt} = -0.08952^{m}/min$$

3.5.6 Trazado de gráficas

El estudio de las funciones reales incluye el trazado y forma de sus curvas. Para determinar las características principales de una función, las derivadas ofrecen información suficiente para realizar el trazado de cualquier función real.

En la figura, se muestra la gráfica de una función en la que se evidencian dos puntos bajos (puntos mínimos) y uno alto (punto máximo), estos puntos se denominan puntos críticos.

Figura 44.



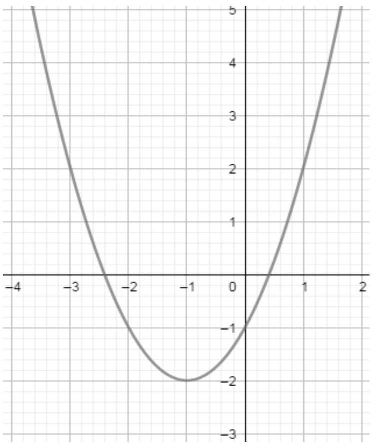
Una función tiene un punto crítico en un valor *"c"* si se cumple que $f'(c) = 0$.

Será un máximo absoluto, si cumple que $f(c) \leq f(x)$ para todo ***x*** que pertenezca al dominio de la función, y será un mínimo absoluto si $f(c) \geq f(x)$ para todo ***x*** que pertenezca al dominio de la función.

Ejemplo 9:

Sea, $f(x) = x^2 + 2x - 1$ definir los puntos críticos de la función.

Figura 45



El procedimiento para definir esta información es sencillo. Se debe hallar la primera derivada de la función, igualarla a cero y resolver esta ecuación.

$$f'(x) = 2x + 2 = 0$$

$$2x = -2$$

$$x = -1$$

Este resultado implica que en $x = -1$ hay un punto crítico, la gráfica evidencia que es un mínimo. Sin embargo, y a efectos de análisis, es necesario determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Este procedimiento considera que los puntos críticos determinan el principio o final de los intervalos de crecimiento. Para el caso del ejemplo en cuestión, el valor $x=-1$ divide el dominio en dos intervalos $(-\infty,-1)$ y $(-1,\infty)$. Para determinar si los intervalos son de crecimiento o de decrecimiento, el procedimiento a seguir es:

- Se toma un valor que pertenezca al intervalo
- Se evalúa en la derivada ese valor
- Si el resultado es mayor que cero, la función es creciente en ese intervalo
- Si el resultado es menor que cero, la función es decreciente en ese intervalo

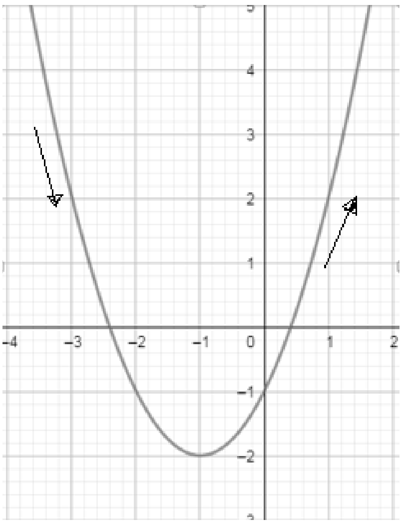
Para el primer intervalo $(-\infty,-1)$, tomamos $x=-2$:

$f'(-2) = 2(-2) + 2 = -2$ Como el resultado es negativo, en este intervalo la función decrece.

Para el segundo intervalo $(-1, \infty)$, tomamos $x = 0$.

$f'(0) = 2\ (0) + 2 = 2$ Como el resultado es positivo, en este intervalo la función crece.

Figura 46.



Otro aspecto a definir usando las derivadas son los puntos de inflexión y las concavidades. Los puntos de inflexión se definen como aquellos puntos en los que la función cambia de cóncava hacia arriba o cóncava hacia abaja, o viceversa.

Los puntos de inflexión se encuentran con la segunda derivada de la función, se iguala a cero y se resuelve la ecuación. Los valores que resuelven esta ecuación se definen como los puntos de inflexión. Para definir las concavidades, se escoge un valor que pertenezca a cada intervalo definido por los puntos de inflexión y se evalúa en la segunda derivada; si el resultado es positivo, la función será cóncava hacia arriba en ese intervalo; pero, si es negativo, será cóncava hacia abajo.

Ejemplo 10:

Para la función $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x2 - 3x + 1$, hallar:

- Puntos críticos
- Intervalos de crecimiento
- Puntos de inflexión
- Concavidades
- Puntos críticos: $f'(x) = 2x2 + x - 3$

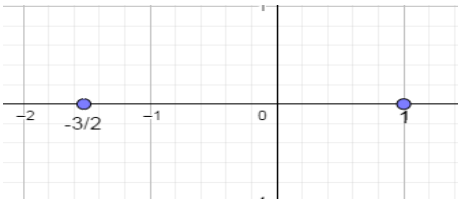
Igualamos a cero y obtenemos: $(x - 1)(2x + 3) = 0$

Y así encontramos los puntos críticos: $x = 1$ y $x = -\frac{3}{2}$

En estos puntos encontraremos valores máximos o mínimos.

Intervalos de crecimiento:

Figura 47



Los puntos críticos definen tres intervalos: $(-\infty, -\frac{3}{2})$, $(-\frac{3}{2}, 1)$ y $(1, \infty)$

Para definir el crecimiento o decrecimiento de la función, evaluamos en un valor aleatorio que pertenezca a cada intervalo así:

Para $(-\infty, -\frac{3}{2})$ podemos escoger $x = -2$, por ejemplo y obtenemos:

$f'(-2) = 2(-2)^2 + (-2) - 3 = 3$ esto es positivo, por tanto, en el intervalo $(-\infty, -\frac{3}{2})$ la función crece.

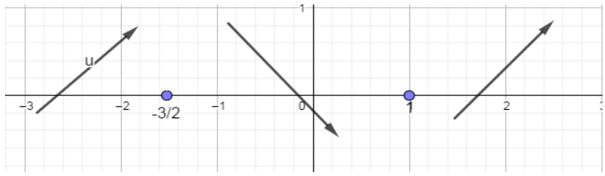
Para $(-\frac{3}{2}, 1)$ podemos escoger $x = 0$, por ejemplo y obtenemos:

$f'(0) = 2(0)2 + (0) - 3 = -3$ esto es, negativo, por tanto, en el intervalo $(-\frac{3}{2}, 1)$ la función decrece.

Para $(1, \infty)$, podemos escoger $x = 2$, por ejemplo, y obtenemos:

$f'(2) = 2(2)^2 + (2) - 3 = 7$ esto es, positivo, por tanto, en el intervalo $(1, \infty)$ la función crece.

Figura 48.



- Puntos de inflexión: $f''(x) = 4x + 1$

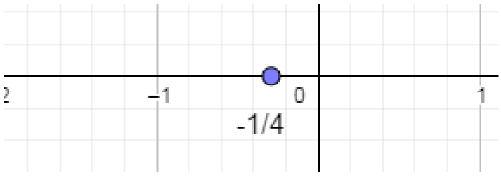
Igualamos a cero y obtenemos: $x = -\frac{1}{4}$

Este es el punto de inflexión de la función.

- *Concavidades:*

El punto de inflexión define dos intervalos.

Figura 49.



Intervalos de concavidad: $(-\infty, -\frac{1}{4})$ y $(-\frac{1}{4}, \infty)$

Para definir la concavidad de la función, evaluamos en un valor aleatorio que pertenezca a cada intervalo así:

Para $(-\frac{1}{4}, \infty)$ podemos escoger $x = -1$ y obtenemos:

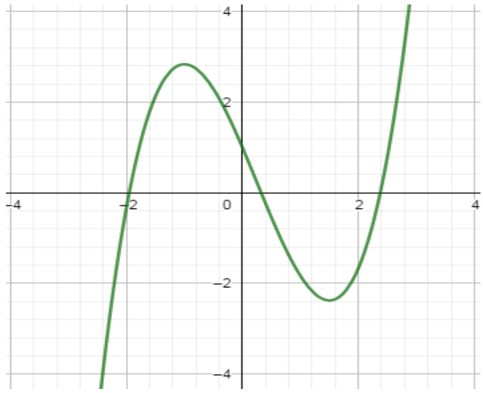
$f''(-1) = 4(-1) + 1 = -3$, por tanto, la función es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\frac{1}{4}, \infty)$

Para $(-\frac{1}{4}, \infty)$ podemos escoger $x = 0$ y obtenemos:

$f''(0) = 4(0) + 1 = 1$, por tanto, la función es cóncava hacia arriba en el intervalo. $(-\frac{1}{4}, \infty)$

Con esta información y evaluando los puntos críticos y los puntos de inflexión en la función original, se obtiene:

Figura 50.



3.5.3 Optimización

La solución de problemas de optimización es una de las aplicaciones más importantes del cálculo diferencial, puesto que existe una diversidad de situaciones problema en las que es necesario minimizar (por ejemplo, costos, materiales, tiempos, entre otros) o maximizar (por ejemplo, ganancias, volúmenes, áreas, entre otros).

El reto más grande de estos problemas consiste en convertir su enunciado en la función a optimizar y definir la ecuación de enlace que permitan relacionar todas las variables necesarias y pertinentes para la solución de este.

Proceso de resolución de problemas de optimización.

1. Lea y comprenda el problema: Es importante entender con claridad el problema para poder definir las variables que deben ser incluidas, cuáles están dadas y cuáles deben ser encontradas.

2. Grafique: La mayoría de veces resulta muy útil, permite identificar las variables.

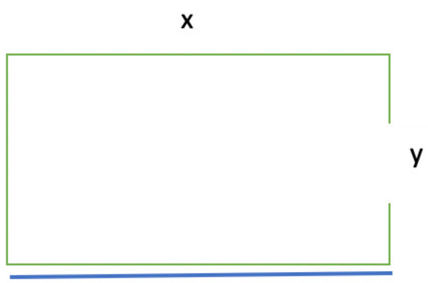
3. Asignar notación: Determine un símbolo a la cantidad que se debe optimizar y otros a las variables que deben ser incluidas, tanto en la función como en la ecuación de enlace. Determine la función a optimizar y reemplace la variable pertinente despejada de la ecuación de enlace en esta función.

4. Derivar: Se debe aplicar el método usado en el trazado de gráficas para hallar puntos críticos.

Ejemplo 11:

Es necesario colocar cerca alrededor de un terreno rectangular que colinda con un río recto, si se quiere que el área del terreno sea la mayor posible y se dispone de 120 m de alambre de cerca, no se pide colocar cerca a lo largo del río. ¿Cuáles serían las dimensiones de este terreno?

Figura 54.



La gráfica muestra una idea del terreno, en consideración a que el lado inferior sería el río.

El problema plantea que lo que se desea optimizar es el área, la función en este caso es la que corresponde al área de un rectángulo $A = xy$. Ahora bien, la ecuación de enlace, en este caso, es la que incluye la cantidad de alambre disponible, como el alambre va a rodear tres lados del rectángulo, por tanto, se plantea $x+2y=120\ m$.

En este punto es claro que ya se han definido las variables, la función y la ecuación de enlace, ahora debemos reemplazar una variable de la ecuación en la función. Entonces, despejaremos, por ejemplo, x para este caso: $x=120m-2y$, y reemplazamos en la función área.

$$A = (120 - 2y)\, y = 120y - 2y^2$$

Esta es la ecuación a derivar aplicando el método usado en el trazado de gráficas para hallar los puntos críticos.

$$A'(y) = 120 - 4y = 0$$

$$y = 30m$$

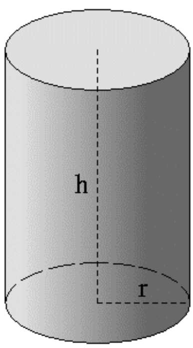
Con este dato reemplazamos en el despeje y hallamos: $x=120m-2(30m)=60m$

De tal manera que las dimensiones del terreno rectangular más grande que puede ser cercado con 120 m de alambre es largo 60 m y ancho 30 m.

Ejemplo 12:

Se quiere producir una lata cilíndrica que pueda contener 2 L de combustible, como la producción será en serie, es necesario disminuir los costos del material a utilizar en dicha fabricación.

Figura 55.



Lo que el problema está pidiendo es una minimización del costo del material, que implicaría una optimización en el material a usar en la fabricación. Por tanto, se espera que el área del material a usar sea la menor posible. Así determinamos que la función a optimizar la función área superficial de un cilindro: $A=2\pi r^2+2\pi rh$, también es importante observar que nos delimitan el volumen de la lata a 2 L, $(1L = 1000\ cm^3)$.

En este caso el volumen será la ecuación de enlace:

$$V = \pi r^2 h = 2000cm^3.$$

De aquí despejamos h y obtenemos $h = \frac{2000}{\pi r^2}$ y reemplazamos en la función a optimizar:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{2000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{4000}{r^2} \text{ Entonces, } A'(r) = 4\pi r - \frac{4000}{r^2} = 0$$

Así: $4\pi r = \frac{4000}{r^2}$

$$r^3 = \frac{1000}{\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}$$

Para hallar la altura, se reemplaza en la ecuación de enlace así:

$$h = \frac{2000}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}} \right)^2} = 2\sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}$$

Por tanto, las dimensiones que debe tener la lata que contenga 2 l de combustible, con el menor costo en sus materiales, son:

$\sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}$ y $2\sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}$

Actividades de apropiación. Problemas.

1. Encuentre el punto sobre la parábola $y = x^2 - 6x + 3$ más cercano al punto (3,5).

2. Un corredor inicia su recorrido en línea recta hacia el norte con una velocidad de 5 m/s, simultáneamente otro corredor inicia su recorrido pero con dirección oeste con una velocidad de 6,5 m/s. Al transcurrir 15 minutos con qué razón se aleja uno del otro en ese momento.

3. Encuentre el área del rectángulo más grande que puede ser inscrito en el interior de un semicírculo de radio ***a***.

4. Graficar la función $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$ usando los criterios de primera y segunda derivada.

5. Determine el volumen de la caja de base cuadrada, sin tapa, más grande que se puede fabricar con 1500 cm^2 de cartón.

6. La altura de un triángulo decrece a razón de 0,5 cm/min, si su base se incrementa a razón de 1 cm/min, ¿cuál es la razón con la que varía el área cuando la altura es de 5 cm y el área es de 50 cm^2?

7. Se quiere fabricar un acuario de base rectangular, los materiales a usar tienen un costo de: $1200 el material de las paredes laterales y $1800 el material de la base. Si el acuario debe contener 15 L de agua, halle las dimensiones que debe tener, para que su costo sea el menor posible.

8. Graficar la función $f(x) = 2 - x + 2x^2 - 3x^3$ usando los criterios de primera y segunda derivada.

Preguntas tipo Saber Pro

Un investigador está probando el efecto de un producto farmacéutico sobre una bacteria. Ha definido que el número de bacterias varía con el tiempo en horas una vez suministrado el fármaco según la función: $N(t) = 10t^3 - 255t^2\ 1800t + 1000.$

1. Se quiere determinar el momento en el que el producto farmacéutico tiene su mayor efectividad (es decir, cuando el producto hace que disminuya con mayor rapidez el número de bacterias). Para obtener esta información se debe encontrar:

a. el punto mínimo, es decir, el que no anule la segunda derivada.
b. el punto mínimo, es decir, el que anule la segunda derivada.
c. los puntos críticos hallando la primera derivada y los intervalos de crecimiento.
d. el intervalo para el cual la primera derivada es negativa.

2. El estudio debe definir la rapidez con la que actúa el producto farmacéutico, esta información se consigue determinando en qué momento la función:

a. pasa de creciente a decreciente, y en ese momento tendrá un máximo.
b. pasa de decreciente a creciente, y en ese momento tendrá un mínimo.
c. pasa de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo.
d. pasa o es mayor a cero.

3. Es importante determinar cuánto es el tiempo de exposición al producto farmacéutico antes de que empiece a perder su efecto el medicamento, para obtener esta información se debe determinar:

a. los valores para los cuales la primera derivada de la función es cero.
b. el momento en el que la función original es igual a cero.
c. el momento en el que la función decrece, después de haber logrado su mayor efectividad.
d. el momento en el que la función crece, después de haber logrado su mayor efectividad.

Se está vaciando arena sobre un montón de forma cónica a razón de 20 m cúbicos por minuto.

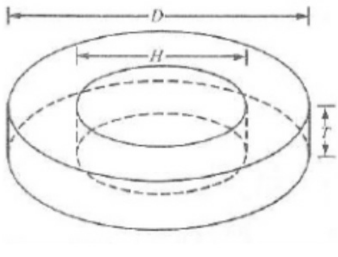
4. Se requiere saber cuál es la rapidez con la que se incrementa su altura, para este cálculo es necesario saber adicionalmente que:

a. la rapidez con la que el área superficial se incrementa.
b. la ecuación de área superficial de un cono.
c. la relación entre el radio y la base del montón.
d. la altura del cono en el momento a evaluar.

5. Si la altura es siempre igual al radio del montón de arena, para hallar la rapidez con la que se incrementa la altura del montón, es acertado afirmar que lo más conveniente es reemplazar la altura h por el radio r y derivar el volumen del cono:

a. derivar el volumen del cono y reemplazar el radio r por la altura h.
b. derivar el volumen del cono y reemplazar la altura h por el radio r.
c. es reemplazar el radio r por la altura h y derivar el volumen del cono.

Figura 56.



6. Considere una arandela de caucho que está siendo comprimida. En un determinado momento, se tienen datos numéricos de los diámetros interno y externo, y las razones de cambio de estos. Considerando la gráfica de la arandela en la que el volumen V, el grosor G, el diámetro interno H y el diámetro externo D de la arandela están relacionados por la ecuación, la ecuación que modela la variación del Volumen respecto del tiempo es necesario:

a. Derivar $V= {}^{\pi}/_{4}\, G(D^2-H^2)$ como un producto de dos funciones con respecto al tiempo.
b. Reemplazar G por su equivalente en función del radio externo y derivar con respecto al tiempo.
c. Derivar $V= {}^{\pi}/_{4}\, G(D^2-H^2)$ en consideración a G como una constante.
d. Reemplazar G por su equivalente en función de la diferencia de los R y derivar con respecto al tiempo.

7. Si se estima que la población P de un país cualquiera en t años será $P(t)\ =\ de\ \frac{80}{8+12e^{-0.06t}}$ millones de habitantes, para determinar qué le sucederá a la población a largo plazo es necesario hallar:

a. el límite cuando t tiende a 100, puesto que un siglo presenta una representación de largo plazo válida.
b. el límite cuando t tiende a infinito, puesto que el largo plazo no es una cantidad numérica.
c. el límite cuando t tiene a a, puesto que nos permite hacer análisis de la tendencia en cualquier momento.
d. la variación de la población en un intervalo de tiempo definido para predecir el comportamiento futuro.

Un analista de juegos al azar ha comprobado empíricamente que las ganancias que proporciona un juego de azar dependen del tiempo que se esté jugando, según la función $G\ (t) = \frac{1000t}{t^2+400}$.

8. Para determinar en qué momento un jugador obtiene la mayor ganancia y cuánto es esta ganancia, se debe hallar los puntos:

a. de inflexión y evaluar el mayor en la función.
b. puntos críticos y evaluar el menor en la función.
c. críticos y evaluar el mayor en la función.
d. de inflexión y evaluar el menor en la función.

9. ¿Puede ocurrir después de un tiempo el juego de pérdidas?

a. No, porque la función tiene como asíntota el eje x.
b. No, porque la función tiene una asíntota en el eje y.
c. Sí, porque la curva tiene un máximo absoluto.
d. Sí, porque hay un único punto crítico en $t = 20$.

10. ¿Cuánto mayor sea el tiempo de juego es mayor la ganancia?

a. No, porque la función crece después de los 20 minutos.
b. No, porque la función decrece después de los 20 minutos.
c. Sí, porque hay un único punto crítico en $t = 20$.
d. Sí, porque hay un único punto crítico en $t = 20$.

5. Referencias

Apostol, T. (1984). Calculus. Barcelona, España: Reverte.

Arriola, E. (2015) Lo que nos dio y nos dio Bourbaki. Revista de Teoría, Historia y Fundamentos de la Ciencia, Vol 32, núm 1, pág 25 -40.

Escobar Acosta, J. (2012). Elementos de geometría. Medellín, Colombia: Universidad de Antioquia.

González, C. Z. y Caraballo, H. (2013). Matemática básica para ingeniería agronómica e ingeniería forestal. La Plata, Argetina: Universidad Nacional de La Plata. Recuperado de http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/32437

Haeussler, J., Richard, P. y Wood, R. (2008). Matemáticas para administración y economía. Ciudad de México: Pearson Educación.

Leithold, L. (1998). El cálculo. Ciudad de México, México: Oxford University Press.

Pérez, F. (2008). Cálculo diferencial e integral de una variable. Granada, España: Universidad de Granada.

Ruting, D. (1984). Some definitions of the concept of Function from John Bernoulli to N. Bourbaki. The Mathematical Intelligencer. Vol 6, No 4.

Stewart, J. (2012). Cálculo de una variable. Ciudad de México, México: Cengage Learning.

Youschkevitch, A. (1976). The concept of function up to the middle of the 19 century. Arch. Hist. Ex. Sci, 16, pág 37 – 85.

Guía didáctica de algoritmia

Ariel Fabricio Guerrero Rodríguez
Carlos Mauricio Barriga Ríos
Víctor Enrique Rodríguez Pabón

UNIVERSIDAD
La Gran Colombia

1.Introducción

El término Algoritmo: Es la forma, los pasos, el lenguaje utilizado para solucionar un problema de cualquier índole. Para definir un algoritmo se deben describir tres partes: Entrada, Proceso y Salida.

Es así que los pasos para la resolución de un problema son:

Diseño del algoritmo, que es en donde se describe la secuencia ordenada de pasos, los cuales conducen a la solución de un problema planteado.

Expresar el algoritmo como un programa utilizando lenguaje en forma de Pseudocódigo.

Ejecución y validez del mismo[1].

¿De qué trata la cartilla?

Diseñar diferentes alternativas de solución a problemas matemáticos planteados, que aunque pueden expresarse de diferentes formas, logrará que los resultados sean los mismos. Se usa para definir un método de solución propuesto, ordenado, y finito de pasos que permiten facilitar la solución de un problema.

¿Por qué es importante formarse en este tema?

En la vida cotidiana, se emplean algoritmos frecuentemente para resolver problemas, un algoritmo es una secuencia de pasos lógicos que permiten solucionar un problema.

Los algoritmos conllevan un proceso y un orden de ideas en todos los aspectos, pues cada actividad por mínima que sea requiere un orden que se da por medio de los algoritmos que creamos así sean mentales.

1 Recuperado de: Fundamentos de programación algoritmos, estructura de datos y objetos.

¿Cuál será el principal logro de aprendizaje que se alcance al resolver las secciones de la cartilla?

Los algoritmos se pueden expresar a través de lenguajes de programación, pseudocódigo, el lenguaje natural y también a través de los diagramas de flujo, además cabe mencionar que los algoritmos son muy importantes en la informática ya que permiten representar datos. Un programa es un algoritmo que indica a la computadora los pasos específicos que se debe seguir para desarrollar una tarea.

2. Objetivo general del aprendizaje

El objeto fundamental de los algoritmos es diseñar estrategias de solución, las cuales se disponen de una forma secuencial y lógica (pseudocódigo) con el fin de facilitar el proceso de la escritura de un código fuente.

Plantear, examinar y resolver diferentes situaciones donde el uso de los algoritmos es completamente necesario en asocio con la implementación de modelos matemáticos y físicos, para una posterior escritura de un código fuente en un lenguaje de programación en particular.

3. Competencias a desarrollar

Competencias del SABER.

Comprender el problema desde distintos puntos de vista, aplicando diferentes estrategias, llegando a soluciones algorítmicas distintas.

Competencias del SABER HACER.

Manipular la información que incluye los diferentes tipos de datos (numéricos, texto o carácter, booleano o lógico.)

Aplicar estratégicamente estructuras selectivas (IF-ELSE, SELECT-CASE) IF-ELSE: Estructura de toma de decisiones.

SELECT-CASE: Menú de opciones.

Competencias del SABER SER.

- Valorar el análisis de los algoritmos como estrategia de solución de problemas.
- Decidir por una solución algorítmica eficaz para abordar problemas más grandes.
- Valorar la complejidad o simplicidad en la solución de un algoritmo que permita escoger el más adecuado en la solución de un problema propuesto.

4. ¿Qué es un algoritmo?

Son pasos lógicos y ordenados secuencialmente para dar solución a un problema o para describir un proceso o situación. Los algoritmos pueden tomar decisiones o ser lineales en su proceso de solución.

Etapas en la solución de un algoritmo

Para la adecuada solución de un algoritmo se establecen unas fases en la construcción y ejecución, las cuales es importante tener presente.

1. Lectura y comprensión del problema.
2. Análisis del problema, donde se definen, variables, datos de entrada, delimitación, procesos y resultados requeridos.
3. Diseño del algoritmo, mediante diagramas de flujo y/o pseudocódigo.
4. Prueba de escritorio, hacer seguimiento manual al algoritmo realizado con diversos valores y así encontrar errores.
5. Ejecución, validar el algoritmo, ponerlo a prueba.
6. Evaluación de resultados, verificar que los resultados obtenidos son correctos.

4.1 Algoritmos cualitativos

Son algoritmos que no requieren el uso de fórmulas matemáticas, ecuaciones u operaciones matemáticas, son pasos que describen un proceso o una serie de tareas para lograr un objetivo.

Los primeros ejemplos no son con problemas matemáticos, son ejemplos para describir actividades de la vida cotidiana para que inicien a apropiarse de la metodología de enumerar los pasos de un proceso.

Ejemplo: Enumere los pasos necesarios que requiere para ir de la casa a la universidad, el número de pasos no está determinado siempre que se logre el objetivo en este caso llegar a la Universidad, cada estudiante describe su propio proceso de manera individual y luego se buscan similitudes y se descartan los pasos innecesarios.

Ejemplo de respuesta:

1. Despertar
2. Levantarse
3. Bañarse
4. Vestirse
5. Desayunar
6. Alistar la maleta
7. Salir de la casa
8. Tomar el transporte
9. Viajar a la universidad
10. Bajar del transporte y caminar a la universidad
11. Llegar a la universidad.

En estos ejemplos básicos el estudiante asimila la importancia de la secuencia lógica en el proceso de solución de un problema, comprende que hay pasos que no se pueden realizar sin un paso previo como requisito, en el caso anterior por ejemplo no puede tomar el transporte sin haber salido de la casa.

4.2 Algoritmos cuantitativos

En estos algoritmos, aunque se conserva la estructura de los pasos lógicos y organizados se incluyen operaciones matemáticas, fórmulas, ecuaciones y teoremas, estos algoritmos tienen como respuesta un valor numérico.

Pueden ser lineales o pueden tomar decisiones usando los condicionales.

Existen los algoritmos determinísticos y no determinísticos. Los determinísticos son aquellos en que los pasos son seguidos; es decir se desarrollan en forma secuencial; mientras que los no determinísticos son aquellos en que pueden aparecer bifurcaciones, es decir que el algoritmo elabore otras acciones al momento de ejecutarse una condición.

4.3 Algoritmo determinístico o secuencial

Es aquel en que una acción sigue a otra, las tareas se suceden una tras de otra, donde la salida de una acción se convierte en la entrada de otra. La estructura secuencial hace referencia al orden de ejecución de las instrucciones.

Tenga en cuenta que la solución presentada en los ejercicios siguientes es una alternativa de solución, usted podría solucionar el problema diseñando un algoritmo diferente al aquí presentado.

4.4 Algoritmos no determinísticos o condicionales

Es aquel que permite comparar una variable con otra variable o con un valor ya sea numérico, de texto o booleano. Los algoritmos condicionales pueden.

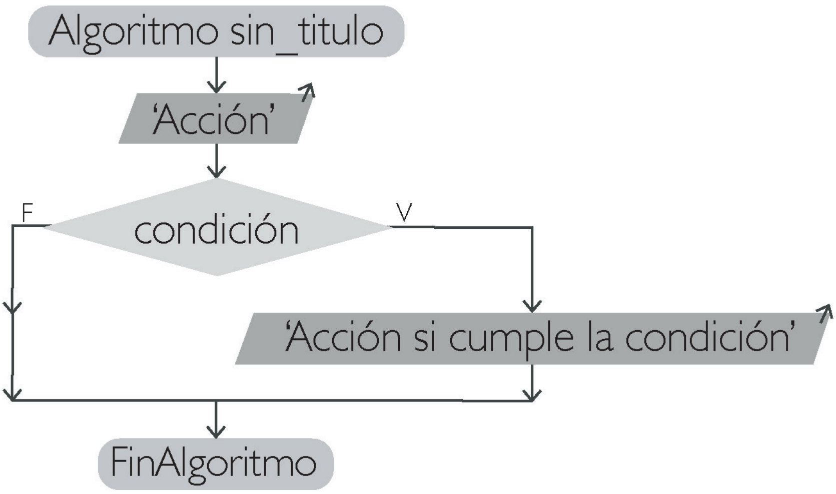
4.5 Algoritmo de decisión simple

Si al evaluar una condición solo existe una solución por la opción de SI, si se cumple dicha condición. La siguiente estructura corresponde a una condicional simple:

Video tutorial Condicional simple con pseint

https://youtu.be/k1FEDljTmEE?list=PLmVHDfBGc6yBrfyiMDwjA576rGTYypMn7

Figura. 1 Condicional.



Fuente: Autoría propia

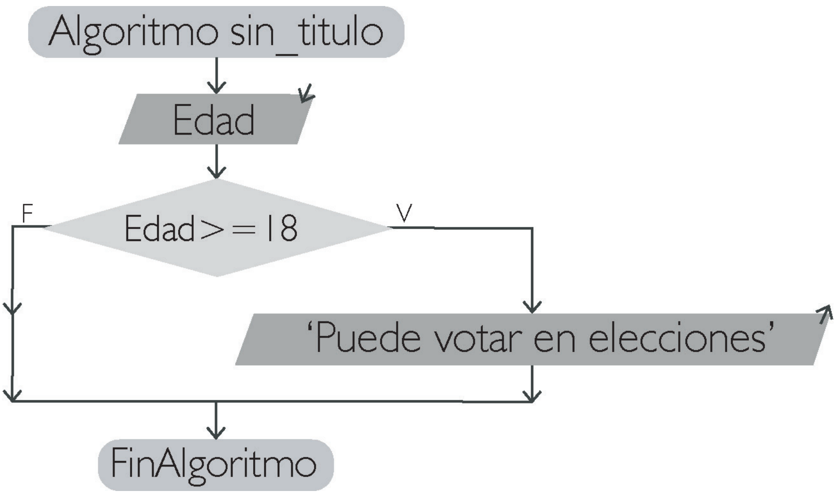
Si condición es verdadera Entonces
    Instrucción o instrucciones

Fin Si

Actividades de apropiación.

Elaborar un algoritmo que solicite la edad de una persona; si una persona es mayor de edad entonces puede participar en las elecciones presidenciales indicándose con un mensaje.

Figura. 2 Ejemplo de condicional.



Fuente: Autoría propia

INICIO

LEER edad
Si edad >= 18 entonces
Escriba "Puede votar en elecciones"

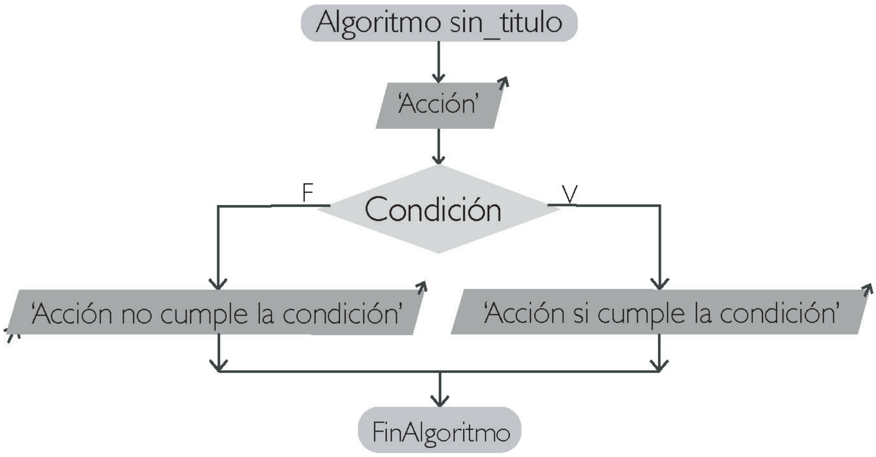
Fin si

FIN

4.6 Algoritmo de decisión doble

Cuando al evaluar una condición se pueden presentar dos soluciones, tanto por la opción SI se cumple, como por la opción NO se cumple. La siguiente estructura corresponde a un condicional doble:

Figura. 3 Condicional con dos opciones.



Fuente: Autoría propia

Si condición se cumple
  Entonces
    Instrucción o instrucciones
  Sino se cumple la condición
    Instrucción o instrucciones
Fin Si
Ejemplos algoritmos condicionales dobles

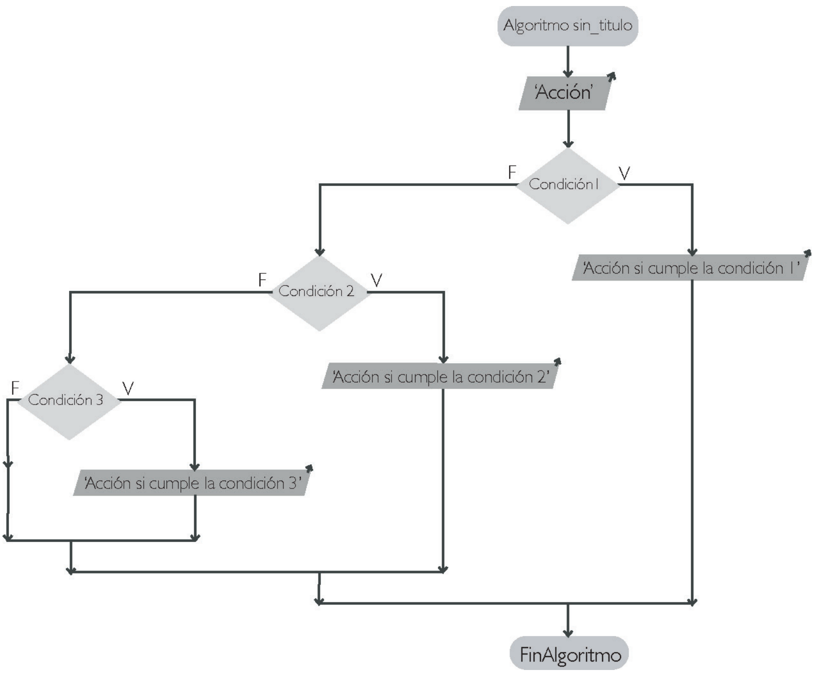
Realizar un algoritmo que permita calcular el promedio final de la nota de un estudiante que después de realizar tres evaluaciones su promedio es igual o superior a 3.0. En caso de que supere el promedio; aprobará el curso, si el promedio no supera 3.0 el curso se da como reprobado.

4.7 Algoritmo con condicional anidada

Se presenta cuando al evaluar una condición se pueden presentar más condiciones y en cada condición existen soluciones diversas. La siguiente estructura corresponde a una condicional múltiple:

```
Si condición 1 Entonces
   Instrucción o instrucciones
Sino
   Si >condición 2> Entonces
      Instrucción o instrucciones
Sino
   Si >condición 3> Entonces
      Instrucción o instrucciones
   Sino
        <Pueden existir más condiciones>
      Fin Si
   Fin Si
Fin Si
```

Figura. 4 Condicional anidado.



Fuente: Autoría propia

Ejemplos algoritmos condicionales múltiples

Video tutorial Condicionales anidados con pseint

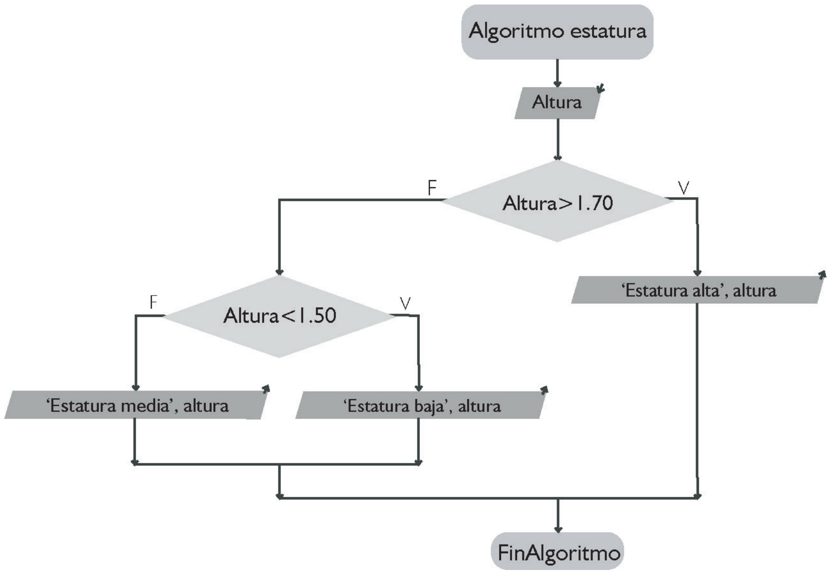
https://youtu.be/tDvu2OLUixs

Actividades de apropiación.

Elaborar un algoritmo que clasifique las estaturas de las personas de acuerdo a la siguientes escala: estatura inferior a 1.50 (baja estatura), estatura superior a 1.70 (alta estatura), otro caso (estatura media).

```
INICIO
LEER altura
      Si altura > 1.70 Entonces      MOSTRAR ‘Estatura Alta ‘,altura
      Sino
      Si altura < 1.50 entonces      MOSTRAR ‘Estatura Baja ‘,altura
      Sino
            MOSTRAR ‘Estatura Media ‘,altura
      FinSi
    FinSi
FIN
```

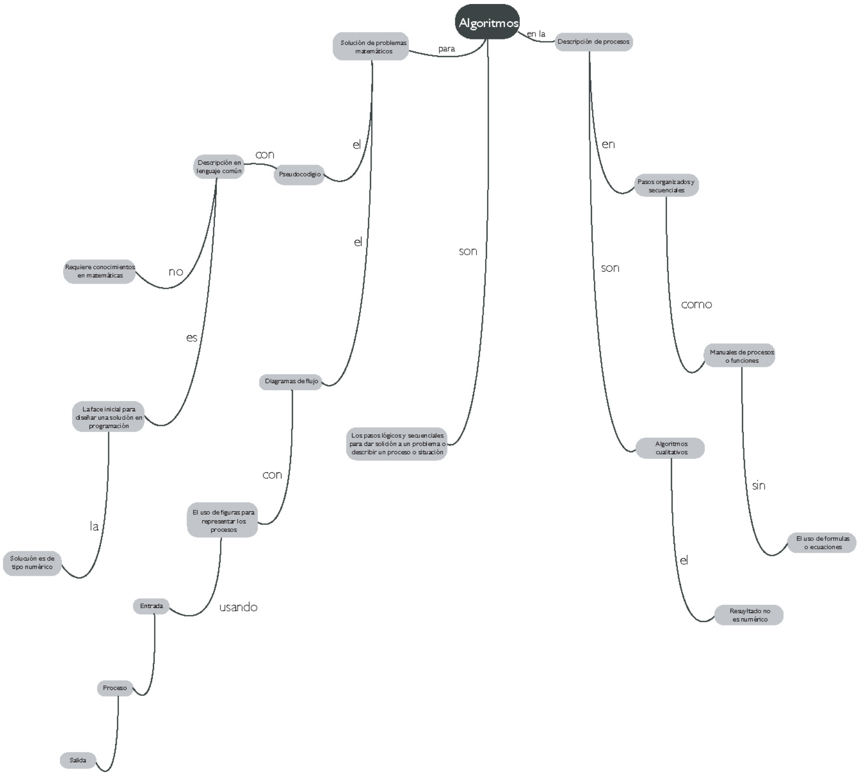
Figura. 5 Ejemplo de condicional anidado.



5. Resumen

Gráfico: Mapa conceptual.

Figura. 6 Mapa conceptual de un algoritmo.



Fuente: Autoría propia

6. Jerarquía de operadores

La jerarquía de operadores determina el orden en el que se resuelven las expresiones matemáticas como la suma, resta, multiplicación, división, potencia, raíz cuadrada y módulo o resto de una división.

Este orden permite que una expresión matemática siempre tenga la misma solución en forma manual (papel), en la calculadora o en el computador (ejemplo en el programa Microsoft Excel).

Video tutorial Operadores matemático - lógico - relacionales.

https://youtu.be/L4jWJjJ0sIA

En la siguiente figura se muestran los operadores básicos y su jerarquía:

Figura 7. Jerarquía de operadores.

Fuente: Autoría propia.6.1 Operadores matemáticos

Si se desea asignar un orden específico en una expresión matemática, se deben utilizar los paréntesis ( ), corchetes [ ] o llaves { }, para agrupar, y así, las operaciones que se encuentren dentro de ellos serán las primeras en realizarse.

Evaluación de expresiones y jerarquía de los operadores aritméticos.

La jerarquía o precedencia de operadores es simplemente un conjunto de reglas que indica cuál de todos los operadores aritméticos debe realizarse primero.

Para obtener el resultado de una expresión aritmética (o evaluar una expresión) se deben considerar las reglas de precedencia de operadores, las cuales son las siguientes:

Los operadores se evalúan de izquierda a derecha, y respetando la jerarquía de estos.

Los únicos operadores que pueden alterar estas reglas son los paréntesis ( ), los corchetes [ ] y/o las llaves { }.

Las operaciones que se encuentran dentro de paréntesis ( ), los corchetes [ ] y/o las llaves { }, siguen respetando la regla de precedencia de operadores, por eso en la siguiente operación: 8 - 3 * 3 primero se realiza 3*3 (la multiplicación tiene mayor precedencia que la resta) y después el resultado, 9, se integra a la operación de resta: 8-9, da como resultado -1.

En el caso de encontrarse dos operadores con el mismo nivel de jerarquía, como por ejemplo 3 * 3 / -1, en donde la multiplicación y la división tienen el mismo nivel de precedencia, se realiza primero el operador que se encuentre más hacia la izquierda. Por ello se realiza la multiplicación de 3*3 y este resultado se divide entre -1, dando como resultado -9.

Ejemplos:

(7+8) / 3-1 = ?

Primero se soluciona el paréntesis es decir resultado 15

A continuación este resultado se divide entre 3 por la jerarquía de la división, por lo tanto el resultado aquí será 5.

Finalmente se realiza la operación de la resta, para así obtener el valor final de 4.

2 ^ 3 / (6 - 2) * 3 = ?

Para este ejemplo lo primero a realizar es lo que se encuentra entre paréntesis (4)

Luego se continúa con la potenciación 2 ^ 3 (8)

A continuación se realiza la división entre 8 y 4, para obtener como valor numérico el 2.

Finalmente se multiplica por 3, y el resultado final será 6.

(7 + 8) MOD (3 - 1) = ?

Inicialmente se resuelven los paréntesis, obteniendo como resultado 15 y 2 respectivamente, a continuación el operador MOD indica que se dividirán estos valores y el residuo es el resultado final, por lo tanto la respuesta es 1.

Ejercicios propuestos

A continuación solucione las siguientes operaciones teniendo presente la jerarquía de operadores:

9 - 7 + 5 + 2 -6 + 8 -4 =

3 * 2 - 5 + 4 * 3 - 8 + 5 * 2 =

10 / 2 + 5 * 3 + 4 - 5 * 2 - 8 + 4 * 2 - 16 / 4 =

(2 ^ 3) MOD (10 / 4) + 5 * 3 + 4 - 5 * 2 - 8 + 4 * (2 ^ 2) - 16 / 4 =

(15 - 4) + 3 - (12 - 5 * 2) + (5 + 16 / 4) -5 + (10 – 2 ^ 3)=

[15 - (2 ^ 3 - 10 / 2)] · [5 + (3 *2 - 4)] - 3 MOD (8 - 2 * 3) =

6.1 Operadores relacionales.

Los operadores relacionales son símbolos que se usan para comparar dos valores numéricos. Una vez evaluada la comparación, si el resultado es correcto la expresión se considera verdadera (V), pero en caso de no cumplirse el resultado es falso (F).

A continuación se muestran los operadores relacionales

Tabla. 1 Operadores relacionales.

Expresión	Símbolo
Mayor que	>
Menor que	<
Mayor o igual que	>=
Menor o igual que	<=
Igual que	=
No igual o diferente	<>

Fuente: Autoría propia

Ejemplo.

Si se desea evaluar la expresión 8 > 4, el resultado es verdadero, pero si la expresión es 8 <= 4, su resultado es falso.

6.2 Operadores lógicos.

Estos operadores permiten obtener solo dos resultados, se conocen también como operadores booleanos, ya que hacen uso de los principios del álgebra de Boole. Los resultados obtenidos son Verdadero o Falso.

Estos operadores son muy utilizados en Informática, y en la Lógica proposicional. Proporcionan un resultado a partir de que se cumpla o no una condición, para evaluar el resultado con un operador lógico se hace indispensable que existan en dicha expresión un operador relacional, y su resultado, una vez finalizado el desarrollo de dicha expresión arroja los valores lógicos (verdadero o falso). La combinación de dos o más operadores lógicos conforma una función lógica, que se llama condicional simple o compuesto, como se verá más adelante en esta cartilla.

Los operadores lógicos son tres:

¬, NOT
Y, AND
O, OR

Las expresiones con los operadores AND, OR se evalúan de izquierda a derecha, y el resultado obtenido es verdadero o falso.

¬ o NOT

Evalúa un dato ingresado, y cambia su valor de veracidad, es decir; en caso de que el valor sea verdadero retorna un valor falso, y si el valor es falso retorna un valor verdadero.

Ejemplos:

Suponga que la variable A tiene como valor numérico el 8, y que la variable B tiene el valor numérico 10.

Evaluar:

A < B, el resultado es Verdadero, puesto que el valor numérico de la variable A que es 8 es menor que el valor numérico de la variable B que es 10. Pero si denotamos esta expresión como NOT (A < B) el resultado es Falso, puesto que el operador lógico NOT cambiará el resultado que se obtenga al evaluar la expresión encerrada en paréntesis.

NOT (A + B >= 18) el resultado obtenido será falso, puesto que; la expresión encerrada en paréntesis es verdadera (A + B = 18), y la expresión enunciada mayor o igual se cumple, por que la suma es igual al valor 18, y al negar este resultado, la respuesta final es falso.

Y, AND

En una condición se puede evaluar más de un parámetro, una vez realizada la operación; si todos las operaciones son correctas el resultado es verdadero (V), y si uno de ellos falla es decir es falso, el resultado también lo es (F).

Ejemplo:

Evaluar las siguientes expresiones:

(30 > 20) AND (15 >= 10)

El resultado del primer paréntesis es Verdadero, el resultado del segundo paréntesis es Verdadero, por lo tanto al evaluar Verdadero AND Verdadero el resultado final es Verdadero.

(30 < 20) AND (15 >= 10)

El resultado del primer paréntesis es Falso, el resultado del segundo paréntesis es Verdadero, por lo tanto al evaluar Falso AND Verdadero el resultado final es Falso.

(30 < 20) AND (15 <= 10)

El resultado del primer paréntesis es Falso, el resultado del segundo paréntesis es Falso, por lo tanto al evaluar Falso AND Falso el resultado final es Falso.

O, OR

En una condición se puede evaluar más de un parámetro, una vez realizada la operación; si todas las operaciones son incorrectas el resultado es falso (F), y si uno o más de una operación es correcta, el resultado es verdadero (V).

Ejemplo:

Suponga que la variable A tiene como valor numérico el 8, y que la variable B tiene el valor numérico 10.

(A + B >= 18) OR (30 = 20)

El resultado de evaluar el primer paréntesis es Verdadero, el resultado del segundo paréntesis es Falso, entonces; al evaluar Verdadero OR Falso el resultado final es Verdadero.

(A + B > 18) OR (30 > 20)

El resultado de evaluar el primer paréntesis es Falso, el resultado del segundo paréntesis es Verdadero, entonces; al evaluar Falso OR Verdadero el resultado final es Verdadero.

(A + B < 18) OR (30 < 20)

El resultado de evaluar el primer paréntesis es Falso, el resultado del segundo paréntesis es Falso, entonces; al evaluar Falso OR Falso el resultado final es Falso.

Ejercicios propuestos de operadores lógicos y relacionales

Siendo el valor de las variables: a = 10, b = 12, c = 13, d =10. Encontrar el valor de verdad de cada una de las siguientes expresiones:

((a > b) OR (a < c)) AND ((a = c) OR (a >= b))

((a >= b) OR (a < d))AND ((a >= d) AND (c > d))

NOT (a = c) AND (c > b)

Expresiones combinadas

Una vez vistos los diferentes operadores, también se pueden realizar operaciones combinando los diferentes operadores expuestos. Importante siempre tener presente que las primeras expresiones a realizar son las encerradas en paréntesis. A continuación enunciamos unos ejemplos:

Se sabe que: x = 9, y = 8, evaluar la siguiente expresión:

((3 * x) > (10 - y) AND ((20 + 4) = 10 - (y ^ 2))

Como se comentó anteriormente, se evalúa la primera parte ((3*x)>(10- y) el resultado es Verdadero, puesto que 27 es mayor a 2.

La segunda parte tiene dos operaciones encerradas en paréntesis y estas a su vez encerradas en otro paréntesis que las contiene, por lo tanto se soluciona primero los paréntesis más internos y luego se resuelve el resultado de ambos. Es decir; (20+4) se obtiene como resultado 24, a continuación se resuelve (y ^ 2) este exponente arroja como resultado el valor 64, a continuación se efectúa 10 - 64, cuyo resultado es el número -54. Luego se comparan ambos valores 24 = -54, es Falso.

Finalmente se establece el valor de verdad final entre Verdadero de la primera parte, y Falso de la segunda parte por medio del operador lógico AND, cuyo resultado final es Falso.

Si se realizara la siguiente operación:

((3 * x) > (10 - y) OR ((20 + 4) = 10 - (y ^ 2))

El proceso será el mismo que el anterior, solo que ahora el operador lógico es OR, lo que implica los siguientes resultados Verdadero de la primera parte, Falso de la segunda parte, nos entregaría un valor lógico final de Verdadero.

Según la jerarquía de operaciones realice los pasos correspondientes que den solución a las siguientes expresiones algorítmicas:

7 Mod 10 - 15 Mod 3 * 4 + 9

4 * (3 + 6) ^ 1 / 2 > 7 + 2 ^ 2

Dados los siguientes valores: a = redon(2.8,0) , b = 15 \ 7, c = 3*8 \ 9, d = trunc (7 ^ (1/2)).

Evalúe el resultado final de:

((a > = b) or (a < d)) and ((a > = d) and (c > d))

Dados los siguientes valores M = 3, N = 2, R = 9, T = rc(R), V = 2 + T

* N ; calcule el resultado de la siguiente expresión:

Not ((M > N and R > 5)) OR (Not (T > V) and N > M)

Solucione y seleccione la respuesta correcta de las operaciones que aparecen a continuación teniendo presente la jerarquía de operadores:

La respuesta a la ecuación (8+(2*5))/3

A. 16.66
B. 13.33
C. 6
D. 11.33

Si P=7 Q=88 R=8 S=16 T=1

Diga el valor de verdad de:

(P < R) ^ (Q > S) v (T < R) =

¬ ((P < R) ^ (Q > S) v (T < R)) =

Variables: dato con nombre cuyo valor puede cambiar durante el curso de la ejecución de un algoritmo. Una variable se representa como uno de estos tres tipos de datos básicos:

Entero: Tipo de datos cuyo valor siempre será un valor numérico entero positivo o negativo.

Real: Valor numérico con punto decimal, seguido de 1 o más dígitos.

Carácter: Cualquier cadena de caracteres (letra, símbolo o número) válida especificada entre comillas.

Ejemplos de variables.

En la siguiente tabla se enuncian algunos nombres de variables y el tipo de variable que aplica según el caso:

Tabla 2 Tipos de variables.

	Entero	Real	Carácter
Edad	X	-	-
Estatura	-	X	-
Nombre	-	-	X
Nota Parcial	-	X	-
Documento	-	-	X
Correo	-	-	X
Salario	X	-	-
Área triángulo	-	X	-

Fuente: Autoría propia

7. Usos prácticos de los algoritmos

7.1 Algoritmos para solución de problemas de geometría

Cálculo de área de figuras regulares.

Para el cálculo de estas áreas vamos a usar los dos métodos que hemos definido para la solución de algoritmos, el pseudocódigo y el diagrama de flujo.

Usando los operadores matemáticos podemos solucionar los problemas básicos de cálculo de áreas.

Actividades de apropiación.

1. Área del cuadrado.

Inicialmente vamos a calcular el área de un cuadrado, para esto necesitamos conocer la longitud de uno de los lados, y con la fórmula lado * lado se calcula el área del cuadrado, en esta fórmula se utiliza el operador matemático multiplicación (*), y para el cálculo del perímetro se usa la fórmula lado + lado + lado + lado se utiliza el operador matemático suma (+). Área = lado * lado

Figura. 8 Cuadrado.

Fuente: Autoría propia.

Pseudocódigo:

1. Conocer la longitud de un lado (como es un cuadrado todos sus lados son iguales)

2. Guardamos o asignamos ese valor a una variable L (por convención siempre se trata de asignar a las variables letras que relacionadas con el valor que se está almacenando, en este caso usamos la letra L de Lado).

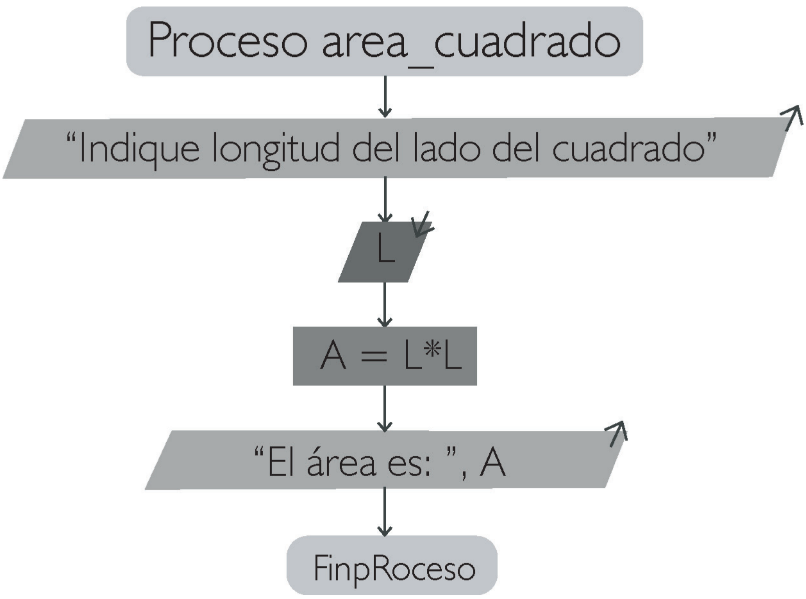
3. Usamos la fórmula del cálculo del área de un cuadrado Área (A) es igual a lado multiplicado por lado, $A = L * L$.

4. Reemplazamos el valor de L en la fórmula y ese será el valor del área.

5. Finalmente mostramos el valor de la variable A

Diagrama de flujo:

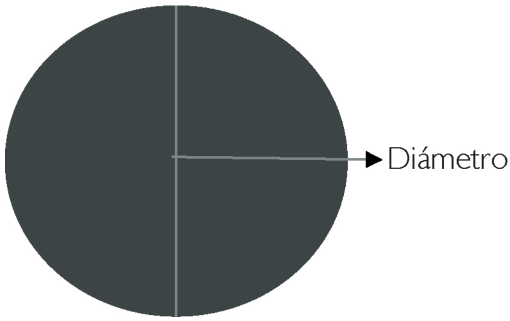
Figura. 9 Área del cuadrado



Fuente: Autoría propia

Figura. 10. Círculo.

2. Área del círculo.



Fuente: Autoría propia.

El siguiente ejemplo es el círculo, en este caso la fórmula de cálculo del área incluye la constante PI (3.1416), y la fórmula es:

$$Área = pi * r^2$$

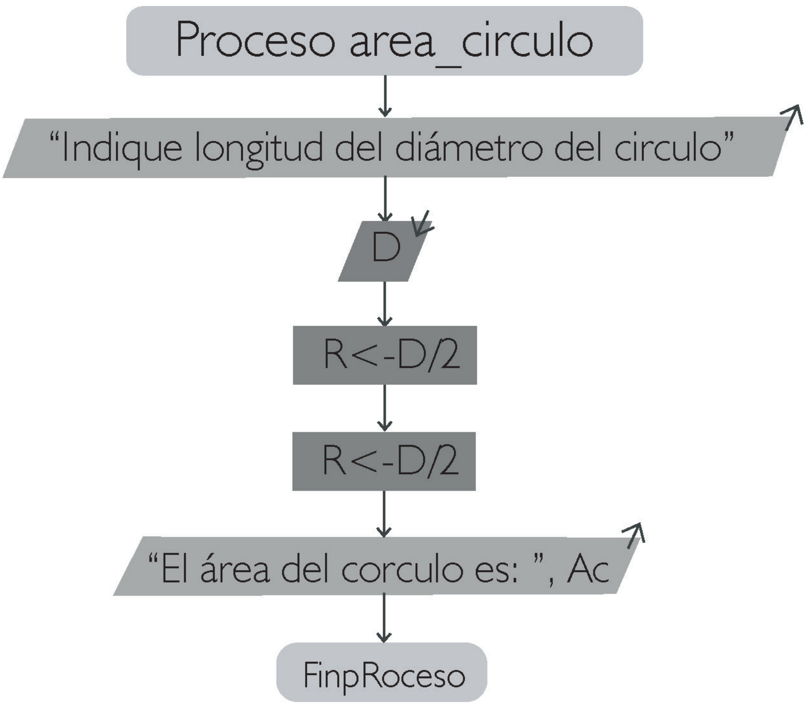
Debemos tener en cuenta que el radio de un círculo es la mitad de su diámetro, en este caso la información que nos ofrece la imagen es la del diámetro, por lo tanto antes de iniciar la fórmula del área debemos calcular el radio del círculo.

Pseudocódigo:

1. Conocer la longitud del diámetro (D) y calcular la longitud del radio (R) así; R = D/2.
2. Usamos la fórmula del cálculo del área (Ac) de un círculo Ac = pi * r^2
3. Reemplazamos el valor de R en la fórmula y ese será el valor del área. (nótese que usamos la letra R mayúscula, y en la fórmula tenemos la r minúscula, en el caso de pseint es indiferente usar mayúsculas o minúsculas la variable es la misma.
4. Finalmente mostramos el valor de la variable Ac.

Diagrama de flujo.

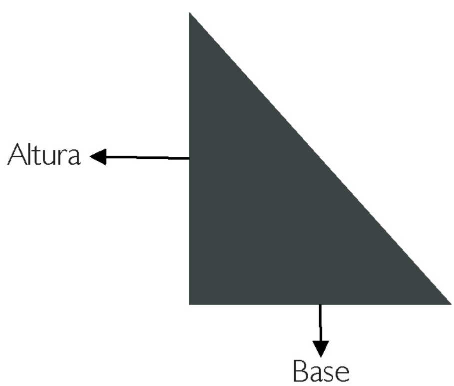
Figura 11 Área de un círculo.



Fuente: Autoría propia

3. Área del Triángulo Rectángulo.

Figura. 12. Triángulo Rectángulo



Fuente: Autoría propia.

Video tutorial Triángulo rectángulo con pseint

https://youtu.be/qc4cmcP8CVc?list=PLmVHDfBGc6yBrfyiMDwjA576rGTYypMn7

El área de un triángulo rectángulo está definida por la fórmula:

Área = Base * Altura / 2

A partir de este ejercicio vamos a reemplazar la palabra conocer por leer, calcular por hacer y la salida la determinaremos por la palabra mostrar.

De esta forma las partes del algoritmo serán:

LEER ➡ Entrada de datos

HACER ➡ Calcular o de desarrollar una fórmula o ecuación

MOSTRAR ➡ Para dar la salida al resultado de la operación.

Pseudocódigo:

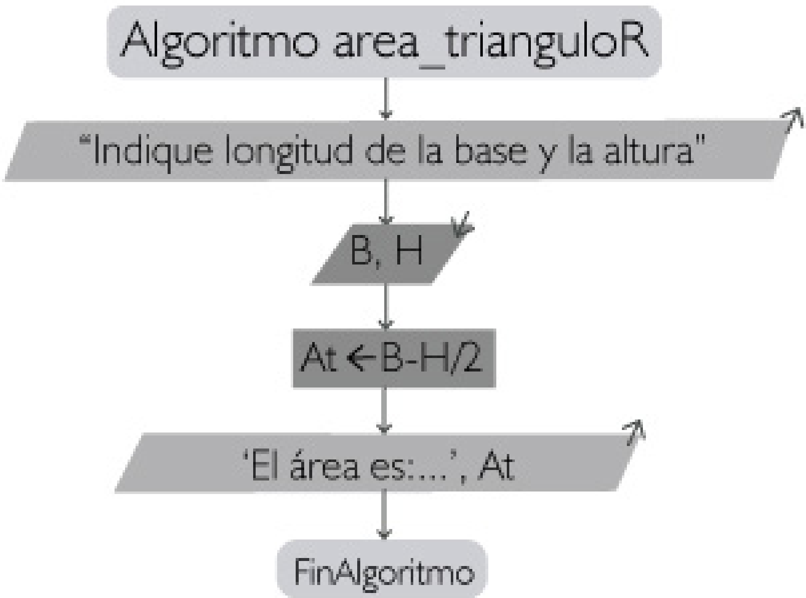
1. Una de la opciones para hallar el área del triángulo es usar la fórmula; Área = Base * Altura / 2, para esto debemos conocer la longitud de la base y la altura.

2. Leer la base (B) y la altura (H)

3. Hacer At = B * H / 2

4. Mostrar el valor de la variable At que corresponde al área del triángulo rectángulo.

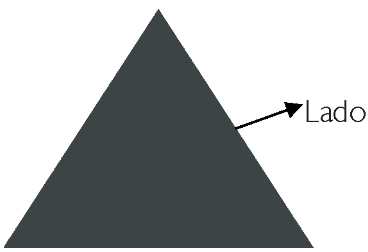
Figura. 13 Área del triángulo rectángulo.



Fuente: Autoría propia

Figura. 14. Triángulo equilátero

4. Área del triángulo equilátero.



Fuente: Autoría propia.

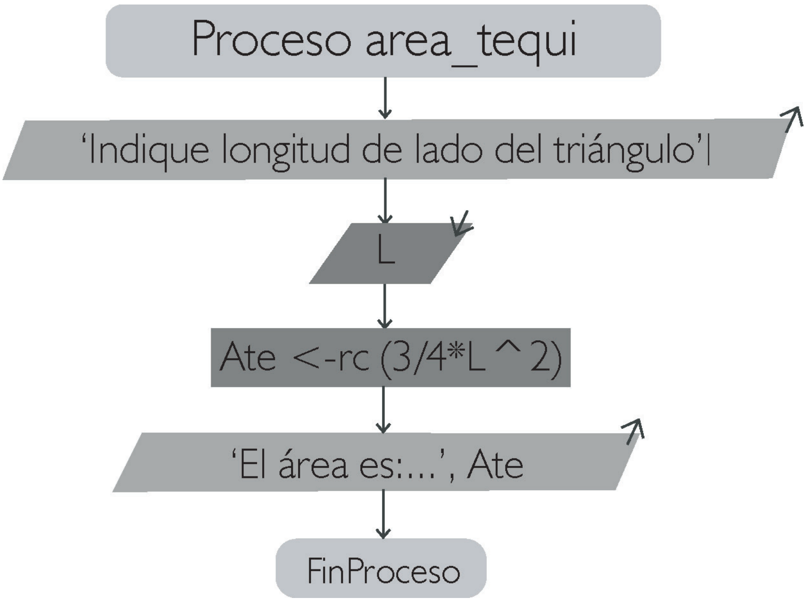
El triángulo equilátero se caracteriza por tener sus lados iguales, y sus ángulos iguales.

Pseudocódigo.

1. Leer la longitud de un lado del triángulo.
2. Hacer la fórmula Ate = $\sqrt{3} \div 4 * L^2$
3. Mostrar el resultado de Ate.

Diagrama de flujo

Figura. 15. Área del triángulo equilátero



Fuente: Autoría propia.

5. Área del triángulo escaleno

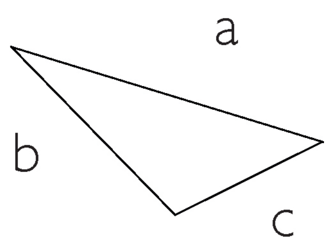
El triángulo escaleno tiene todos sus lados diferentes y todos sus ángulos diferentes y antes de calcular el área del triángulo debemos asegurarnos que el triángulo existe, es decir si le damos valores arbitrarios a los lados del triángulo es posible que este triángulo no se pueda cerrar.

La ley de desigualdad triangular nos permite validar si el triángulo existe, esta ley tiene 3 reglas que se deben cumplir, para asegurar que se cumplan usamos el operador lógico AND, se aplicaría de la siguiente forma:

(a + b > c) AND (b + c > a) AND (
c + a > b)

Como el operador AND da como resultado V (verdadero) / F (falso), en este caso obliga a que las 3 ecuaciones sean V, recordemos que el operador AND solo es V cuando todas sus partes son V.

Figura. 16. Triángulo Escaleno



$$a+b>c$$
$$b+c>a$$
$$c+a>b$$

Fuente: Autoría propia.

Pseudocódigo.

Leer a, b y c (los lados del triángulo)

Hacer las ecuaciones de la ley de desigualdad triangular:

(a+b>c) AND (b+c>a) AND (c+a>b)

Si el resultado de la anterior ecuación es V, entonces calculamos el área (Ates), de lo contrario no.

Hacer la ecuación de Herón o del semi producto (S).

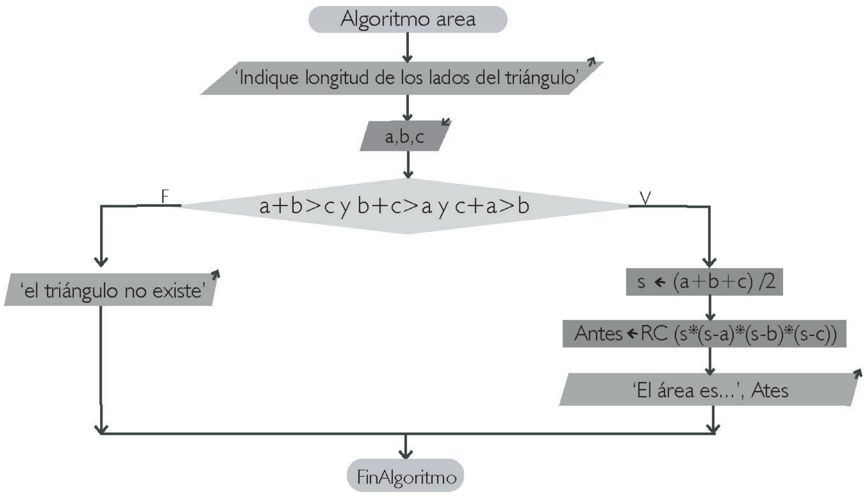
$$S = \frac{a+b+c}{2}$$

$$Antes = \sqrt{s * (s\text{-}a) * (s\text{-}b) * (s\text{-}c)}$$

Mostrar el valor de Ates.

Figura. 17. Área del triángulo escaleno.

Diagrama de Flujo



Fuente: Autoría propia.

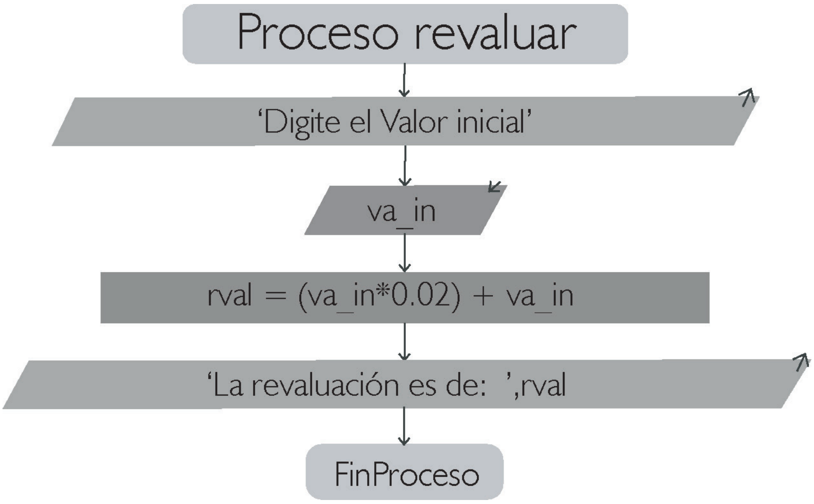
7.2 Ejemplos de algoritmos secuenciales para conceptos básicos de costos de obra

Suponga que un ingeniero desea saber el valor de revalorización de la obra civil al año de construida, que sería a razón del 2% del valor comercial de la obra inicialmente.

Valor inicial = va_in

Revaluación = rval

Figura 18. Revalorización.



Fuente: Autoría propia.

INICIO

LEER va_in
HACER rval = (va_in * 0.02) + va_in
MOSTRAR rval

FIN

Un capataz recibe un sueldo base más un 10% extra por superar la meta mensual del rendimiento de su cuadrilla, el capataz desea saber cuánto dinero obtendrá por concepto de comisiones por los tres meses que superó las metas y el total que recibirá en estos tres meses tomando en cuenta su sueldo base y las comisiones.

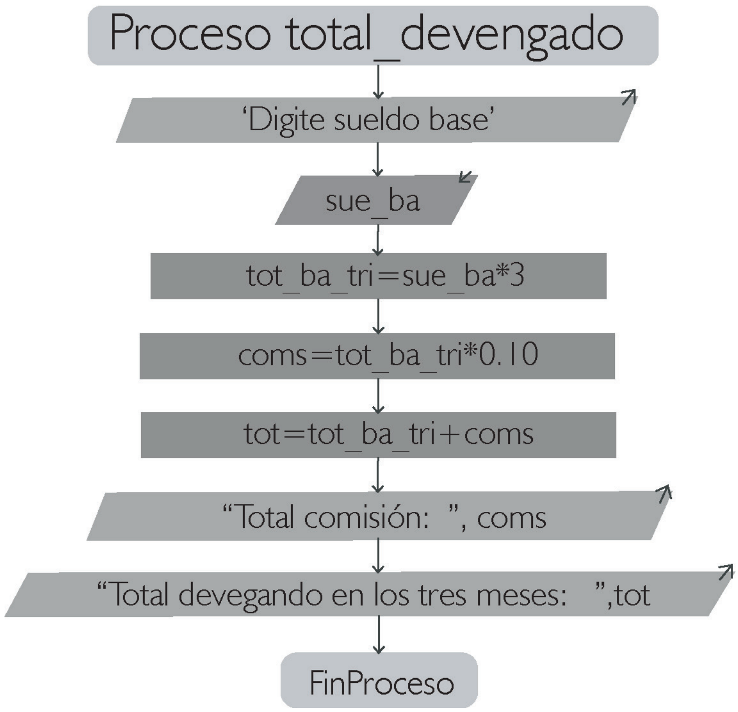
Sueldo base = sue_ba

Total del sueldo básico en tres meses = tot_ba_tri

Total de comisión en los tres meses = coms

Total en los tres meses de sueldos y comisiones = tot

Figura. 19. Calculo de salario.



Fuente: Autoría propia.

INICIO

MOSTRAR "Digite sueldo base"
LEER sue_ba
HACER

tot_ba_tri = sue_ba*3
coms = tot_ba_tri * 0.10
tot = tot_ba_tri + coms
MOSTRAR " Total comisión", coms

MOSTRAR " Total devengado en los tres meses ", tot

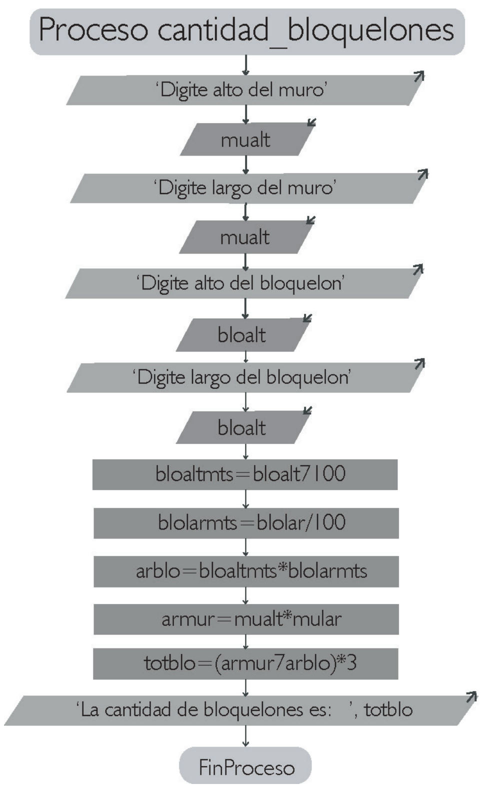
FIN

El bloquelon es una pieza de arcilla resistente, elemento aligerante, aislante térmico y acústico cuyas dimensiones son 80 cm de largo, 23 cm de ancho y 8 cm de alto; le piden a un ingeniero civil, levantar tres muros de 8mts de alto por 80m de largo cada uno, para construir un nuevo hangar en el aeropuerto, deben estos tres muros ser construidos con bloquelon. ¿Cuántos bloquelones son necesarios para culminar este trabajo?

Definición de variables:

Alto del muro = mualt	Largo del muro = mular
Alto del bloquelon = bloalt	Largo del bloquelon = blolar
Alto del bloquelon en metros = bloaltmts	Largo del bloquelon en metros = blolarmts
Área del bloquelon en metros = arblo	Área del muro en metros = armur
Número total de bloquelones = totblo	

Figura. 20. Calculo del número de bloquelones.



Fuente: Autoría propia.

```
INICIO

          LEER mualt, mular, bloalt, blolar
           HACER
                    bloaltmts =bloalt/100
                    blolarmts=blolar/100
                    arblo=bloaltmts*blolarmts
                    armur=mualt*mular
                    totblo=(armur/arblo)*3

MOSTRAR "La cantidad de bloquelones es: ", totblo

FIN
```

7.3 Ejercicios propuestos algoritmos no determinísticos secuenciales

- Para obtener un metro cúbico de mezcla es necesario un bulto de cemento, 20 kg de arena y 15 litros de agua. ¿Cuántos bultos de cemento, cuántos kg de arena y cuántos litros de agua son necesarios para producir $16m^3$ de mezcla?

- La presión, el volumen y la temperatura de una masa de aire se relacionan por la ecuación: masa = (presión * volumen) /(0.37 * (temperatura + 460)). Si se tienen los valores de la masa, temperatura y presión, calcular el volumen de la masa de aire.

- Si con dos galones de pintura se pintan 12 m cuadrados de superficie, ¿cuántos galones son necesarios para pintar 43 m cuadrados de superficie?

- La aceleración de una retroexcavadora es 25% más que la de la gravedad. ¿Cuál es el valor de la aceleración de la retroexcavadora? Expresarla en metros sobre segundos al cuadrado.

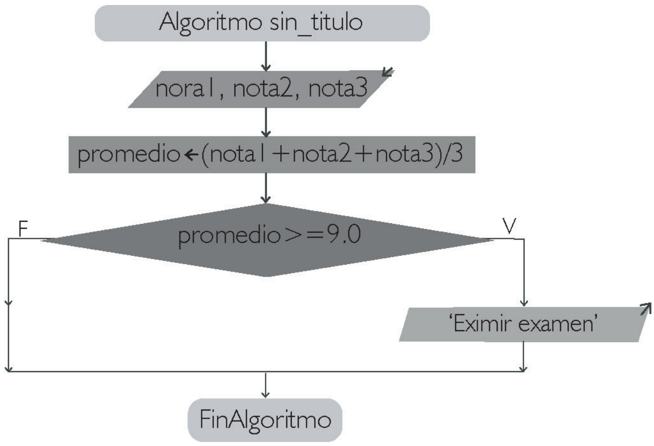
- Ingrese la velocidad de un móvil expresada en metros por segundo e imprima en la salida la velocidad en kilómetros por hora.

- Un constructor sabe que necesita 0,5 metros cúbicos de arena por metro cuadrado de revoque a realizar. Hacer un algoritmo donde ingrese las medidas de una pared (largo y alto) expresada en metros y obtenga la cantidad de arena necesaria para revocar.

Algoritmos con condicional

Elaborar un algoritmo en el que se ingresan tres notas de un estudiante, si el promedio de las tres notas es superior o igual a 9.0 mostrar un mensaje que diga "Eximir examen"

Figura. 21. Calculo de nota promedio.

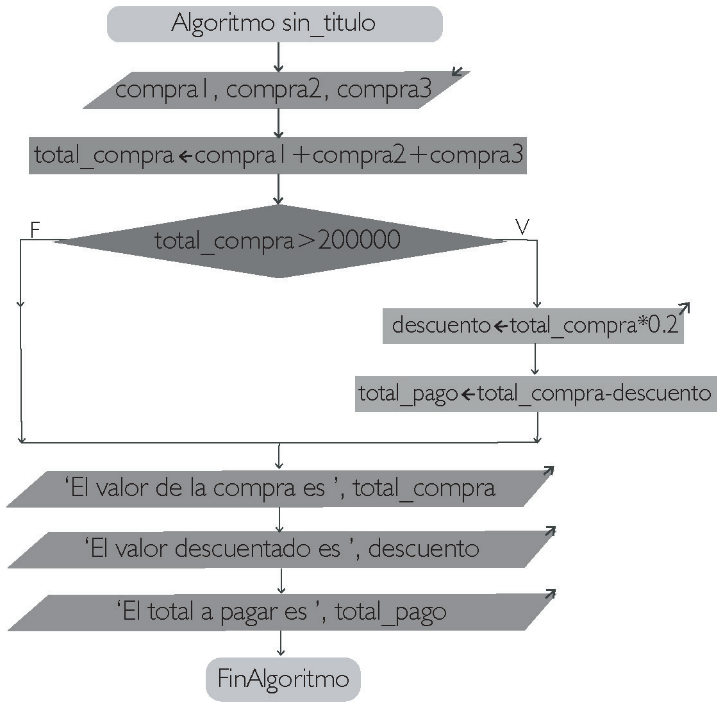


Fuente: Autoría propia.

INICIO
LEER nota1, nota2, nota3
HACER
promedio = (nota1 + nota2 + nota3) / 3
Si promedio >= 9.0 entonces
MOSTRAR "Eximir examen"
Fin si
FIN

En una ferretería se realiza un descuento del 20% por la compra de tres productos si el valor total de la compra es superior a $200.000. Se solicita mostrar el total de la compra de los tres productos, el valor descontado y el total de la compra con el descuento.

Figura. 22. Calculo de compra con descuento.

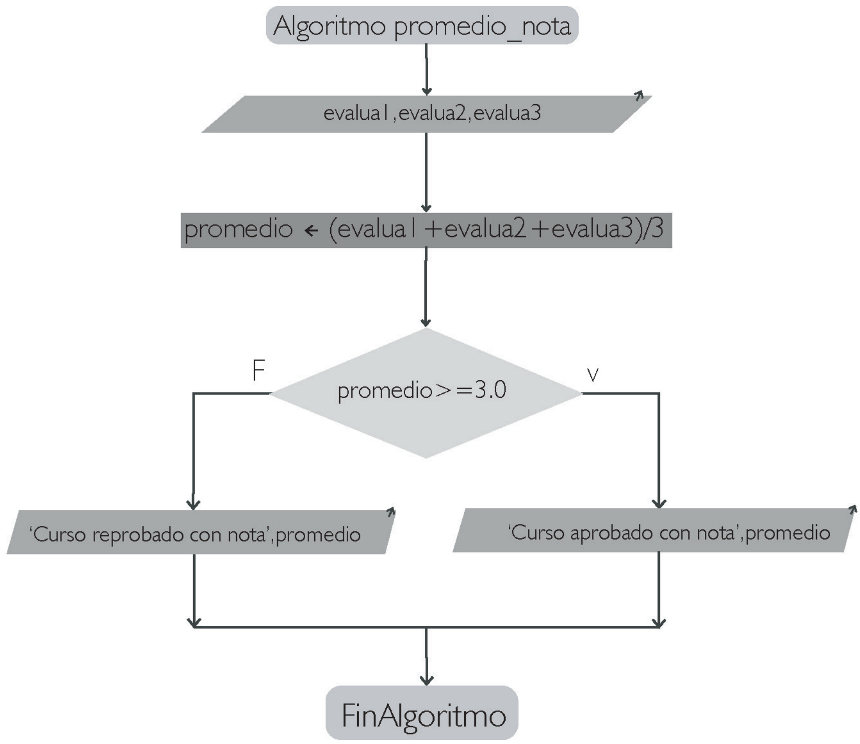


Fuente: Autoría propia.

INICIO
LEER compra1, compra2, compra3
HACER
total_compra = compra1 + compra2 + compra3
Si total_compra > 200000 entonces
descuento = total_compra * 0.2
total_pago = total_compra - descuento
Fin Si
MOSTRAR "El valor de la compra es ", total_compra
MOSTRAR "El valor descontado es ", descuento
MOSTRAR "El total a pagar es ", total_pago
FIN

Un estudiante conoce las tres notas de sus evaluaciones, debe calcular el promedio de las mismas para saber si aprobó el curso o no. Diseña un algoritmo que le permite calcular el promedio e imprimirlo junto con el mensaje curso reprobado o curso aprobado según sea el caso.

Figura. 23. Condicional de aprobación de curso.



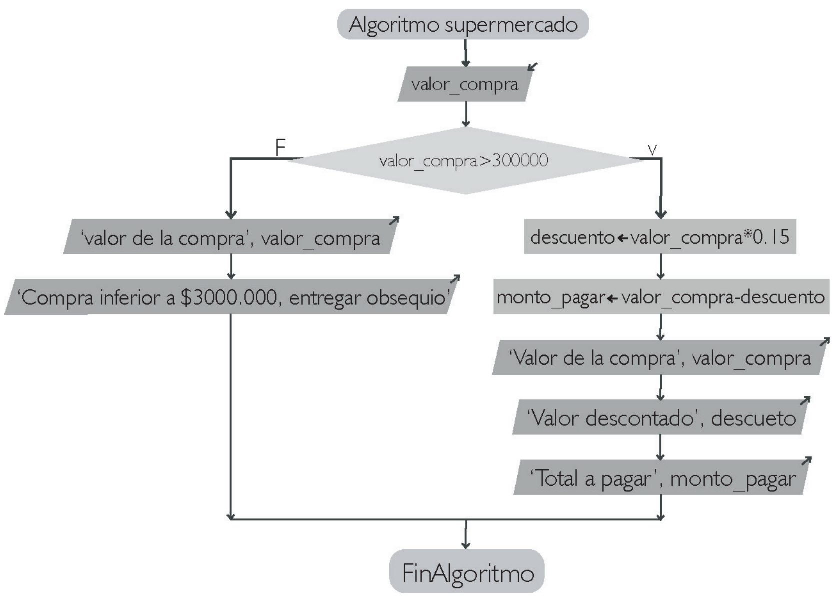
NICIO

LEER evalua1, evalua2, evalua3
HACER promedio = (evalua1 +evalua2 + evalua3)/3
Si promedio >= 3.0 entonces
Escriba " Curso aprobado con nota ", promedio
Sino
Escriba "Curso reprobado con nota ", promedio
Fin Si
FIN

Un supermercado ha puesto en oferta la venta de cierto producto, ofreciendo un descuento del 15% si el valor de la compra es superior a $300.000, en caso contrario se ofrece un obsequio. Diseñe un algoritmo que determine el monto de la compra, el monto del descuento, el monto a pagar y el obsequio.

INICIO
LEER valor_compra
HACER
Si valor_compra >300000 entonces
descuento = valor_compra * 0.15
monto_pagar = valor_compra - descuento
MOSTRAR "Valor de la compra ", valor_compra
MOSTRAR " Valor descontado ", descuento
MOSTRAR "Total a pagar ", monto_pagar
Sino
MOSTRAR "Valor de la compra ", valor_compra
MOSTRAR "Compra inferior a $300.000, entregar obsequio"
Fin Si
FIN

Figura. 24. Calculo de salario.



Fuente: Autoría propia.

Representación global del núcleo de la cartilla

Este segmento debe articular las representaciones gráficas expuestas en los segmentos "resumen gráfico" de las secciones que conforman la cartilla.

8. Test de evaluación por competencias

En el estudio de los algoritmos los problemas propuestos no son del tipo selección múltiple, se propone el enunciado y el estudiante tiene la libertad de usar su lógica de solución de los problemas, recordemos que un algoritmo son los pasos secuenciales para lograr un objetivo, es decir un problema puede tener múltiples opciones de solución, y ser todas correctas, pueden tener más o menos pasos, usar fórmulas diferentes, pero siempre deben llevar a la misma solución por diferentes caminos, de esta forma cada estudiante puede presentar una solución diferente al mismo problema, y de eso se trata el uso de los algoritmos, potenciar el desarrollo de la lógica de solución de problemas, observando cierta normatividad a la hora de programar los pasos.

Actividades de resolución de problemas.

Ejercicios propuestos

1. Diseñe un algoritmo que permita calcular la nota mínima en el corte 3 para aprobar el curso.

Corte 1 30%
Corte 2 30%
Corte 3 40%

Ya conoce las notas de corte 1 y corte 2

Indicar si el estudiante tiene o no oportunidad de aprobar el curso.

1. Se requiere pintar una pared de L m de largo por A m de alto

La pintura viene en galones de R m² de rendimiento, y el costo es de C $.

Diseñe un algoritmo que permita calcular el número de galones necesarios y el costo del trabajo.

Figura. 25. Ejemplo de cálculo de números enteros.

Fuente: Autoría propia.

Nota: No le venden galones por fracción, ejemplo si el número de galones es 8.75 galones, tendrá que comprar 9 galones para garantizar que pintará la pared en su totalidad

3. Usando la técnica del menú de opciones, realizar un algoritmo en pseint que permita hallar el equivalente de las escalas de temperatura.

4. Realizar un convertidor de temperatura entre cinco escalas diferentes así:

Si la Temperatura está en Kelvin, debe mostrar el equivalente en las demás escalas.

Figura. 26. Tabla de conversión de temperatura.

100 Kelvin (K) ▼

Kelvin	100
Celsius	-173,15
Fahrenheit	-279,67
Reaumur	-138,52
Rankine	180

5. Demuestre matemáticamente cuándo un número entero N es par, usando la operación módulo o residuo.

6. Diseñe un algoritmo que permita calcular la raíz cuadrada de un número si este es positivo, en caso contrario mostrar un mensaje que indique que el número es negativo y su raíz es imaginaria.

7. Realice un algoritmo en el cual lo primero es solicitar los valores de 2 variables numéricas A y B. Si B es menor que A, asígnele a X el valor de calcular el área de un triángulo rectángulo, pero si B es mayor o igual que A, calcule el volumen de un cono. Al final muestre los valores de entrada y los resultados obtenidos.

8. Realizar una rutina que permita calcular las horas de estudio independiente DIARIAS en el sistema por créditos.

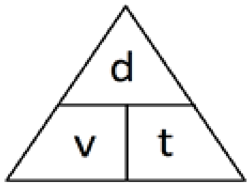
1 crédito = 48 horas de estudio al semestre

Variables: Número de semanas, Horas de clase presencial, Número de créditos inscritos

9. Diseñe una rutina que permita identificar si un número tiene decimales.

10. Observe la siguiente figura y analícela y realice un algoritmo que la haga útil.

Figura. 27. Triángulo de distancia, velocidad y tiempo



Fuente: Autoría propia.

Test de evaluación con preguntas tipo Saber Pro.

Una compañía fabrica los productos A y B. Los tiempos de ensamblado y acabados necesarios para cada producto se establecen de acuerdo a una tabla según la cantidad de trabajadores. La empresa puede vender todos los productos y obtener una utilidad de $ 200 por cada unidad de A y $ 160 por cada unidad de B.

De acuerdo al enunciado se puede advertir que no es una variable

A. la utilidad por unidad vendida
B. los productos fabricados
C. la cantidad de unidades de los productos
D. la cantidad de trabajadores
Clave: A

Se sabe que un algoritmo es una secuencia de operaciones realizables, no ambiguas, cuya ejecución da una solución a un problema. Se pueden considerar que las características fundamentales que debe cumplir todo algoritmo son:

A. Un algoritmo debe ser preciso e indicar el orden de realización de cada paso. • Un algoritmo debe estar definido. Si se sigue un algoritmo dos veces, se debe obtener el mismo resultado cada vez. • Un algoritmo debe ser finito. Si se sigue un algoritmo, se debe terminar en algún momento

B. Un algoritmo debe ser preciso e indicar el orden de realización de cada paso. • Un algoritmo debe estar definido. Si se sigue un algoritmo dos veces, se debe obtener el mismo resultado cada vez. • Un algoritmo debe ser finito. Si se sigue un algoritmo, no debe terminar es continuo.

C. Un algoritmo debe ser preciso e indicar el orden de realización de cada paso. • Un algoritmo debe estar definido. Si se sigue un algoritmo dos veces, se debe obtener el mismo resultado cada vez. • Un algoritmo debe ser infinito. Si se sigue un algoritmo, no debe terminar es continuo.

D. Un algoritmo debe ser Impreciso y no indicar el orden de cada paso. • Un algoritmo debe estar definido. Si se sigue un algoritmo dos veces, se debe obtener el mismo resultado cada vez. • Un algoritmo debe ser finito. Si se sigue un algoritmo, no debe terminar en algún momento.

Clave: A

Dentro de los diferentes enunciados para desarrollar algoritmos, uno de los aspectos primordiales es la entrada; la cual se refiere a:

A. aquellos datos necesarios que no se conocen
B. aquellos datos que almacena el resultado
C. las constantes del problema
D. las variables numéricas
Clave: A

En una distribuidora de productos, cada cliente devolvió exactamente la quinta parte de sus pedidos. Para llevar un control de los clientes en la distribuidora se está formando la siguiente tabla:

Cliente	Unidades vendidas	Unidades defectuosas	% de unidades defectuosas
1			
2		320	
3	1.520		
			Total 20%

Con los datos de la tabla anterior se puede concluir que:

A. no es posible completarla. Porque faltarían por lo menos dos datos más para el cliente 1 y un dato más para el cliente 2 y 3.

B. no se puede completar sin que estén los datos de las unidades vendidas de los clientes 1 y 2.

C. si se puede completar. Ya que se pueden buscar dos números que sumados con 1.520, den como resultado 4.520, por ejemplo 1.000 y 2.000

D. si es posible completarla. Porque se pueden hallar las unidades vendidas del cliente 2, luego, hallar las del cliente 1 y así deducir la quinta parte y el porcentaje.

Clave: D

9. Dilemas éticos

El diseño de algoritmos o modelos matemáticos para el cálculo estructural es un área de responsabilidad ingenieril y ética de gran importancia, debido a que los cálculos estructurales deben ser corroborados por más de una técnica, método o aplicación. Es común en los contratos de ingeniería civil, que se subcontrate con terceros para realizar o diseñar algunos componentes de una obra de infraestructura, en este proceso de subcontratación es posible la pérdida, o equivocación en la interpretación de datos.

Es por esto que la modelación requiere de la elaboración de algoritmos seguros, y confiables que garanticen la fiabilidad de los cálculos, para así lograr una eficiente toma de decisiones al momento de aplicarlo en la obra de infraestructura.

Un ejemplo representativo de este tema es el caso del edificio Space en Medellín, donde un error en el cálculo estructural generó el colapso de la estructura.

10. Referencias

Joyanes, L. (2008). Fundamentos de programación Algoritmos, estructura de datos y objetos. Cuarta Edición. Mc Graw Hill

ELEMENTOS DE ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

UNA VISIÓN GENERAL

Alix Sandra Corredor Patiño
Wilson E. Torres Sánchez

UNIVERSIDAD
La Gran Colombia

Objetivo

Brindar los conceptos básicos de la estadística descriptiva y algunas aplicaciones de uso de fórmulas con el programa Excel. Esta cartilla estará enfocada para todo tipo de estudiantes que tomen los cursos de estadística y que necesiten: clasificar, resumir e interpretar la información de cualquier tipo de datos respecto a una o dos variables, y así, estén en la capacidad de análisis y resolución de problemas desde esta área aplicados a su quehacer profesional.

Competencias

- Conocer los conceptos básicos de la estadística (población, muestra, variable, parámetro y estadístico) en la contextualización de situaciones.

- Manipular la información disponible en la distribución de frecuencias para el análisis de parámetros como: media, varianza, desviación estándar, cuartiles y percentiles.

- Aplicar los diferentes tipos de gráficos de acuerdo a los datos (cualitativos, cuantitativos) que se estén analizando.

- Resumir una muestra mediante los diferentes parámetros estadísticos (medidas de tendencia central, medidas de dispersión y medidas de posición) a través del programa Excel.

- Analizar datos de una y dos variables en diferentes situaciones contextualizadas.

- Determinar el comportamiento de los datos bivariados según su dispersión.

1. Introducción

La estadística ha evolucionado en los últimos años como una disciplina transversal, tal como lo dice Barreto (2012), esta se está proyectando como una de las disciplinas más influyentes para este siglo. Es tal su impacto, que las instituciones educativas han tenido que ajustar sus programas incluyendo el pensamiento aleatorio en las matemáticas. De igual forma, en la mayoría de carreras universitarias se ha hecho indispensable llevar a cabo cursos de estadística, básicamente la descriptiva. La estadística se divide principalmente en dos ramas: descriptiva e inferencial. Para la realización de esta cartilla solo se trabajará la estadística descriptiva. En ese sentido, Rendón, Villasis y Miranda (2016) agregan que: "la estadística descriptiva es la rama de la estadística que formula recomendaciones de cómo resumir, de forma clara y sencilla, los datos de una investigación en cuadros, tablas, figuras o gráficos". Pero, hasta esta parte no llega solo un curso de estadística descriptiva, también puede proveer las herramientas para que, a partir de esos gráficos, se puedan hacer análisis alrededor de estos.

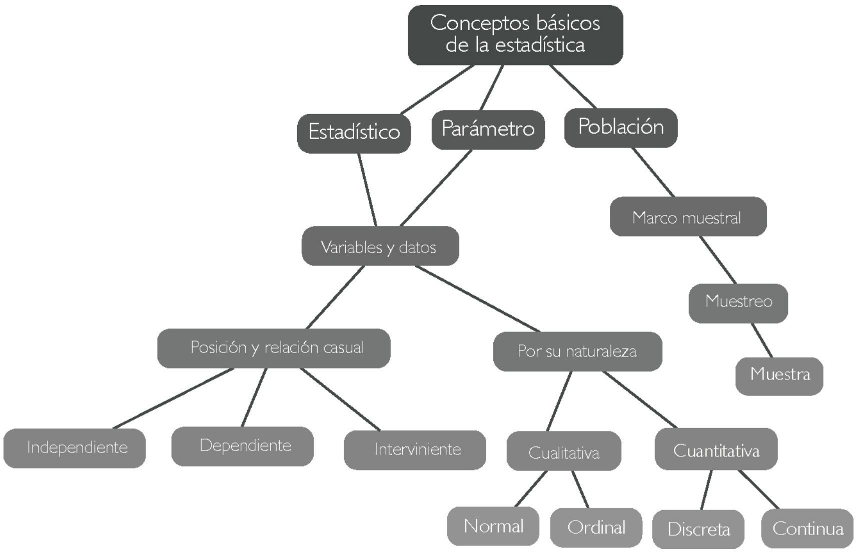
Otro aspecto importante en el impacto que está causando la estadística, es la inclusión de la misma en el avance de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), es así como acota Barreto (2012), refiriéndose a la Estadística, que: "el avance de las tecnologías de la información (TIC) y en general de la sociedad del conocimiento, le han dado un impulso que no había experimentado". Hoy en día se encuentran varios programas que permiten realizar procesos estadísticos de forma óptima y agilizando tiempo y recursos.

Desde estos aspectos es que se justifica la realización de esta cartilla, ya que permitirá al estudiante tener una herramienta sencilla y a la mano para poder hacer procesos estadísticos básicos y sencillos a nivel manual y desde el uso de un software, que le permitan hacer unos análisis adecuados para interpretar situaciones. Será un apoyo y un buen comienzo para, más adelante, poder realizar otra cartilla que aborde los aspectos básicos de la estadística inferencial.

Así pues, se presenta una cartilla que será un referente para los estudiantes de la universidad en sus cursos de estadística y, en general, otros cursos, en cuanto a procesos descriptivos que apoyen la toma de decisiones en situaciones problémicas en donde esta sea de gran utilidad.

2. Conceptos básicos

Figura 1. Conceptos básicos de estadística.

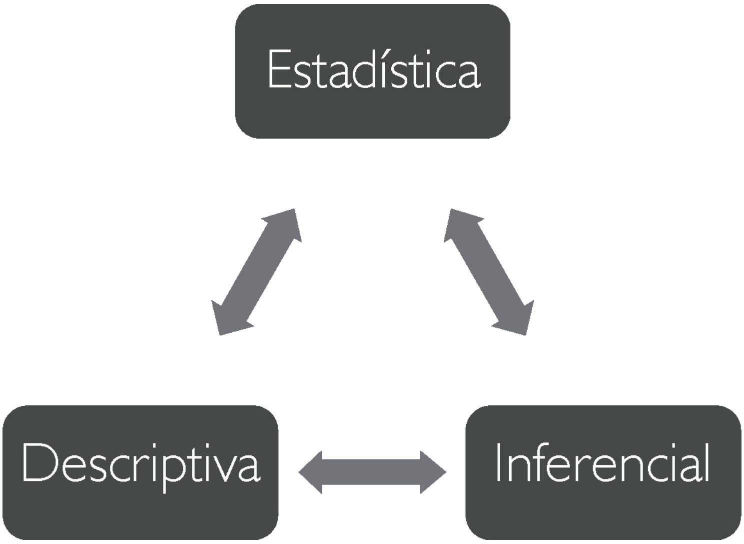


Fuente: elaboración propia de los autores.

¿Qué es la estadística?

La estadística es la que reúne un conjunto de técnicas para recolectar, manejar, describir y analizar una información determinada. En ese sentido, la estadística permite tener un nivel de aplicación específico, de acuerdo al entorno donde se esté aplicando. Esta se divide en dos partes: descriptiva e Inferencial. Para la presente cartilla se trabajará exclusivamente la estadística descriptiva.

Figura 2. División de la estadística.



Fuente: elaboración propia de los autores.

A partir de esta orientación, se definirán algunos conceptos básicos para poder realizar procesos de estadística descriptiva.

Población

Es un conjunto de individuos o elementos que presentan características comunes y que permite hacer el proceso estadístico. Algunos ejemplos son: las personas que sufren de alguna enfermedad en particular, los posibles votantes para las próximas elecciones para la alcaldía de una ciudad, o las personas que acuden a un restaurante en un intervalo de tiempo determinado.

Marco muestral

Es el listado de elementos de la población y de dónde se escogerá la futura muestra para realizar la estadística.

Muestra y muestreo

Va a ser la parte de la población que se tomará para hacer la estadística. Para seleccionar la muestra se debe realizar un muestreo, el cual se refiere a una serie de técnicas para recolectar la muestra esperada. Los tipos de muestreo se trabajarán más adelante.

Parámetro

Se define como un número que permite describir algún aspecto de la población. Por ejemplo, el decir que el 50% de los nacimientos en embarazos de niño o niña es niña, es un parámetro poblacional.

Estadístico

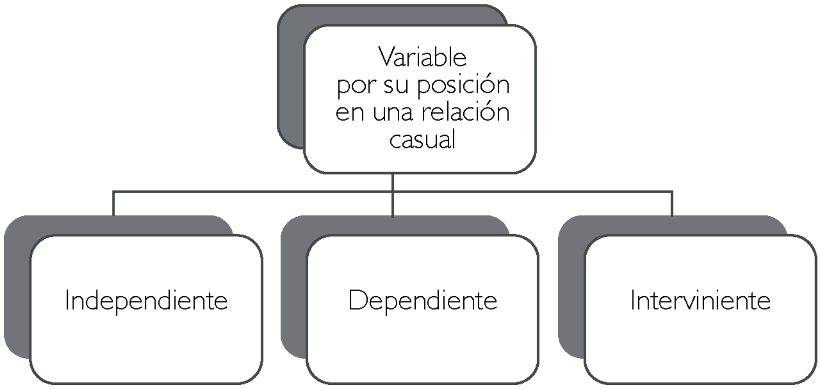
Se define como un número que permite describir algún aspecto de la muestra. Por ejemplo, si se encuestan 100 personas y el 70% dice que consume carne de res, sería el estadístico, ya que se basa en una muestra.

Variables y datos

La variable es aquella que cambia o varía, en ese sentido, puede tomar por lo menos dos características. Un ejemplo es el sexo de una persona, el cual puede ser masculino o femenino. Otro puede ser las caras de un dado, que pueden ser seis: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Hay dos clasificaciones para las variables: por su posición, o por su naturaleza. La primera tiene que ver si la variable es independiente, dependiente o interviniente. Una variable independiente es aquella que no depende de otra, la dependiente es aquella que depende de otra, y la interviniente es aquella que puede surgir de un momento a otro, de acuerdo al contexto o situación que se presente. Por ejemplo, se puede hacer un estudio estadístico sobre el tiempo de desplazamiento de la casa al colegio. En ese caso, la variable independiente es el tiempo, la dependiente puede ser el desplazamiento, y una interviniente puede ser si ese día en que se hizo la medición llovió o no.

Figura 3. División de la variable de acuerdo a su posición en una relación causal.



Fuente: elaboración propia de los autores.

La otra división de las variables es por su naturaleza, en este caso, se clasifican como cualitativas o cuantitativas. Una variable cualitativa es aquella que no está sujeta a medición, por ejemplo, el color de ojos o del pelo. La variable cuantitativa sí está sujeta a medición, por ejemplo, la cantidad de estudiantes por salón en un colegio, o la estatura de los jugadores de un equipo de baloncesto.

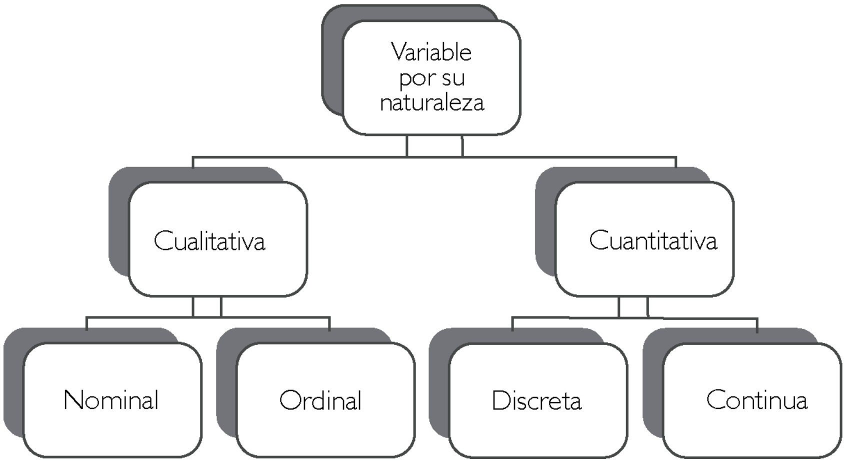
A su vez, las variables cualitativas (también se les llama categóricas) se dividen en nominales u ordinales. Una variable cualitativa nominal puede ser no numérica y que no admiten un criterio de orden; por ejemplo, el estado civil de las personas o el número de cédula. Este último es un número que no exige orden. Una variable cualitativa ordinal es aquella que admite orden, pero que no es medible; por ejemplo, el orden de llegada en una carrera atlética.

Figura 4. Personas en carrera atlética.

Fuente: http://www.radioipiales.co/wp-content/uploads/2018/04/carrera.jpg

Por otra parte, las variables cuantitativas (también se les llama numéricas) se dividen en: discretas y continuas. Una variable cuantitativa discreta es aquella que toma solo valores enteros, por ejemplo: los goles que anotan los jugadores en un torneo. La variable cuantitativa continua es aquella que admite valores enteros y decimales, por ejemplo, el peso de los boxeadores de una liga.

Figura 5. División de la variable, de acuerdo a sus características.

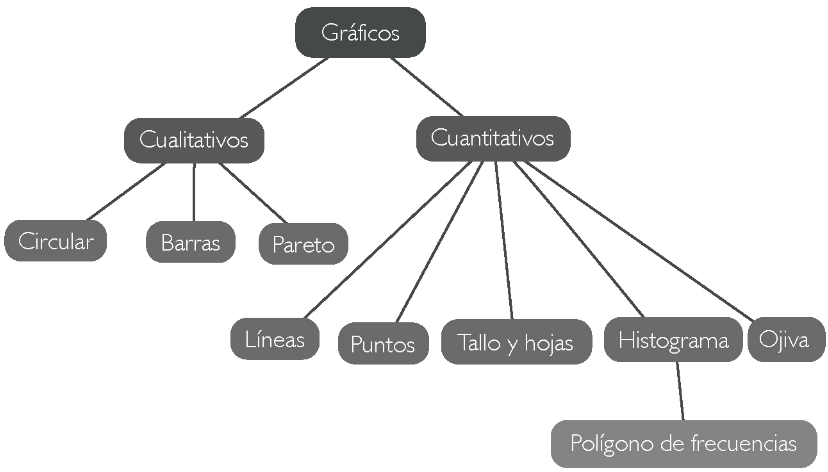


Fuente: elaboración propia de los autores.

Finalmente, un dato es un valor, ya sea cualitativo o cuantitativo. Por ejemplo, los pesos de los jugadores de un equipo de fútbol, es un conjunto de datos cuantitativos. El color de ojos de un grupo de animales de un zoológico, es un conjunto de datos cualitativos.

3. Gráficos

Figura 6. Gráficos estadísticos.



Fuente: elaboración propia de los autores.

Son representaciones de variables cualitativas y cuantitativas, tanto para datos agrupados como no agrupados.

Gráficos para datos cualitativos (categóricos)

Distribución de frecuencia

Una distribución de frecuencia es un resumen tabular de datos donde se muestra el número de elementos en cada clase. Encontramos tres formas diferentes de presentar la frecuencia de variables cualitativas.

- Frecuencia o número de mediciones en cada categoría: se simboliza f, es la cantidad de datos de una característica determinada. La suma de todas las frecuencias de esta columna es igual a n, que es el número total de datos.

- Frecuencia relativa o proporción de mediciones en cada categoría: la suma de los elementos de esta columna es 1, está dada por:

$$fr = (Frecuencia\ )/n$$

- Frecuencia relativa porcentual: el porcentaje de mediciones en cada categoría, se obtiene al multiplicar la frecuencia relativa por 100, la suma de los elementos de esta columna da 100 %. Esta dada por:

$$\% = Frecuencia\ relativa\ X\ 100.$$

Veamos un ejemplo, de las edades (años) de los jugadores de la selección Colombia que participaron en la copa américa 2019 (Caracol Radio, 6 de junio de 2019):

30 30 24 23 24 29 32 27 26 27 21 27 25 24 26 28 26 31 28 33 22 28 25.

Tabla 1. Distribución de frecuencias

Edades	F	fr	%
21	1	0,04	4,35
22	1	0,04	4,35
23	1	0,04	4,35
24	3	0,13	13,04
25	2	0,09	8,70
26	3	0,13	13,04
27	3	0,13	13,04
28	3	0,13	13,04
29	1	0,04	4,35
30	2	0,09	8,70
31	1	0,04	4,35
32	1	0,04	4,35
33	1	0,04	4,35
Total	23	1	100

Fuente: elaboración propia de los autores.

Gráfico circular

Es otra forma de presentar distribuciones de frecuencia relativas, mostrando las relaciones de las partes, respecto al todo. Se representa en una circunferencia tomando como referencia el porcentaje y su equivalencia en grados, para dividir en sectores cada clase (categoría) de la variable.

Tabla 2. Datos Gráfico Porcentual

Edades	F	%
21	1	4,35
22	1	4,35
23	1	4,35
24	3	13,04
25	2	8,70
26	3	13,04
27	3	13,04
28	3	13,04
29	1	4,35
30	2	8,70
31	1	4,35
32	1	4,35
33	1	4,35
Total	23	100

Figura 7. Ejemplo gráfico circular

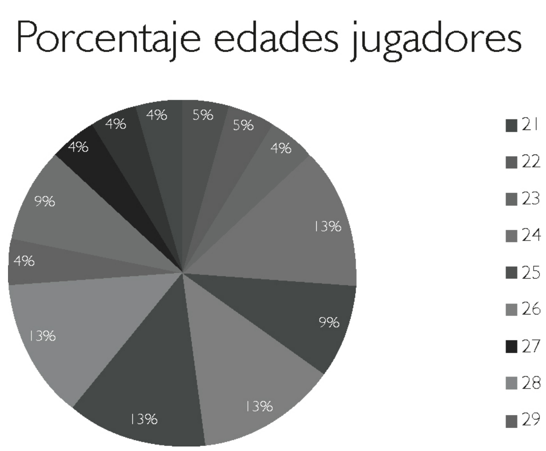


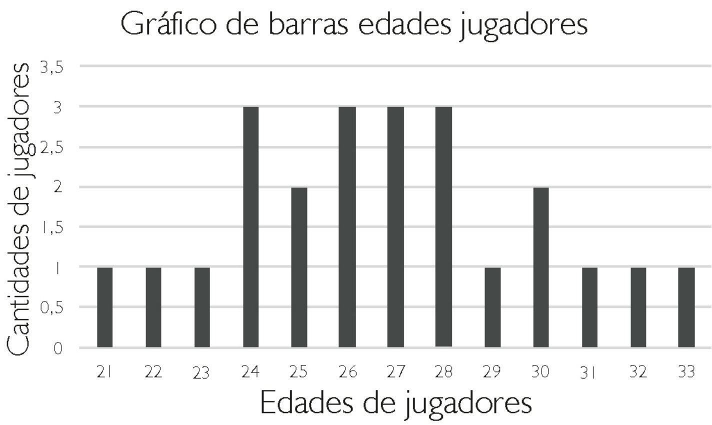
Gráfico de barras

Se representa usualmente la frecuencia o la frecuencia porcentual, en el cuadrante positivo, así: en el eje horizontal se especifican las etiquetas empleadas para las clases (categorías), en el eje vertical va la frecuencia, frecuencia relativa o frecuencia porcentual. El ancho de las barras es el mismo para todas las categorías, van separadas.

Tabla 3. Datos de Barras

Edades	F
21	1
22	1
23	1
24	3
25	2
26	3
27	3
28	3
29	1
30	2
31	1
32	1
33	1
Total	23

Figura 8. Ejemplo gráfico de barras



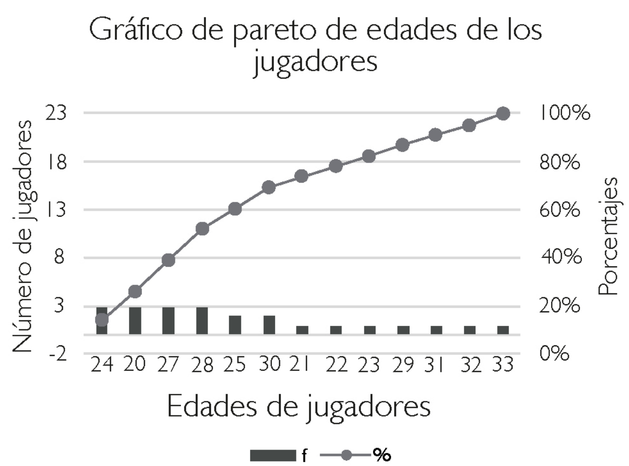
Gráfica de pareto

Es una gráfica de barras, se ordenan de acuerdo con las frecuencias, de mayor a menor, en el eje vertical se representan las frecuencias o frecuencias relativas. Al ordenar las barras por frecuencias, esta gráfica enfoca la atención en las categorías más importantes, se tiene en cuenta la "regla 80/20". Es decir, el 20% controla el 80%, o en otras palabras el 80% de los resultados está dado por tan solo el 20% de los resultados.

Tabla 4. Edades de los jugadores

Edades	F	%	F
24	3	13%	3
26	3	26%	6
27	3	39%	9
28	3	52%	12
25	2	61%	14
30	2	70%	16
21	1	74%	17
22	1	78%	18
23	1	83%	19
29	1	87%	20
31	1	91%	21
32	1	96%	22
33	1	100%	23

Figura 9. Ejemplo gráfico Pareto.



Gráficos para datos cuantitativos

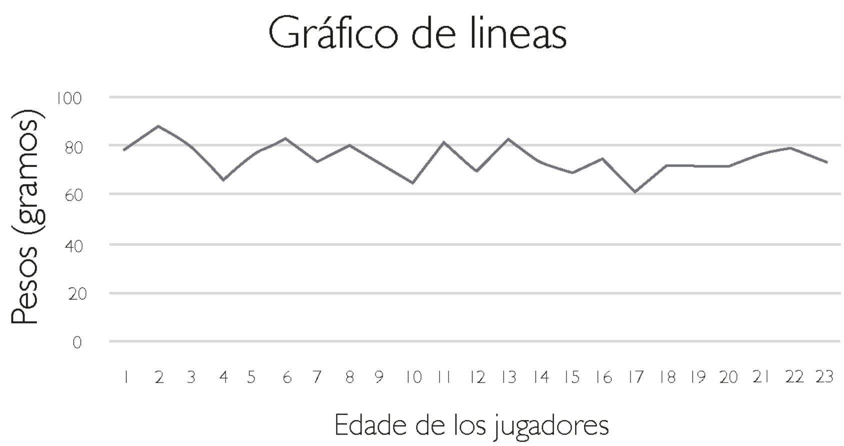
Gráficos de líneas

Cuando los datos forman una serie de tiempo, ayudan a distinguir las distintas tendencias en el tiempo y, además, sus intervalos son iguales, por ejemplo: días, semanas, meses, años, estos se ubican en el eje horizontal, ubicando los valores como tal, en una escala.

Veamos un ejemplo con el peso en gramos de los 23 jugadores que asistieron al mundial de Rusia en 2018.

80 87 80 68 77 82 75 80 72 66 82 71 82 74 70
75 62 72 73 72 77 79 74

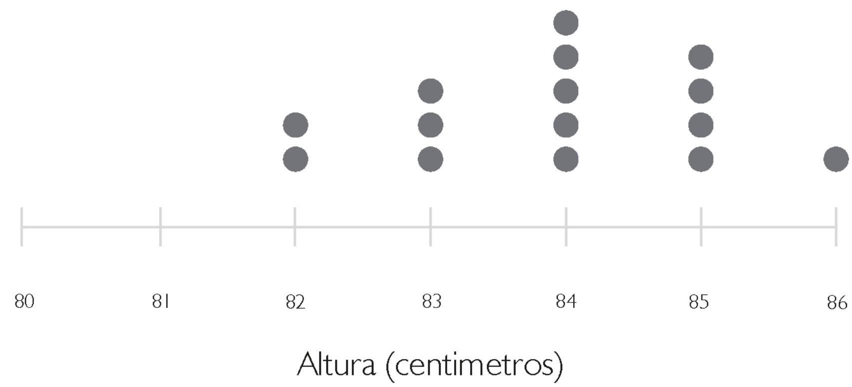
Figura 10. Ejemplo gráfico de líneas.



Gráficos de puntos

Se usa para cuando n es pequeño y además los datos no se pueden separar en intervalos, los datos se ubican en orden ascendente en el eje horizontal.

Figura 11. Ejemplo gráfico de puntos



Fuente: https://es.khanacademy.org/math/pre-algebra/pre-algebra-math-reasoning/pre-algebra-frequency-dot-plot/e/analyzing-with-dot-plots

Gráfico de tallo y hojas

Representación visual de cada dato, van separados por una línea vertical, donde los tallos van ordenados de menor a mayor, al lado izquierdo y las hojas van a la derecha puede ser en la forma en la que va apareciendo cada dato u ordenándolos; el tallo y hoja, se puede dividir cada observación entre las unidades y las decenas, dependiendo la cantidad de datos que se tengan. Veamos el siguiente ejemplo:

Peso en gramos de los 23 jugadores de la selección Colombia que asistió al mundial de Rusia en 2018.

80 87 80 68 77 82 75 80 72 66 82 71 82 74 70
75 62 72 73 72 77 79 74

Proceso

Paso 1: se identifican las decenas y se ordenan de menor a mayor (en este ejemplo aparecen de 60,70 y 80).

Paso 2: a cada decena se le colocan sus hojas correspondientes (las unidades), por orden de aparición de los datos o algunas veces se ordenan en forma (ascendente – descendente).

Paso 3: el tallo y las hojas se separan por medio de una línea vertical, quedando de la siguiente forma

Tallo	Hojas												
6	2	6	8										
7	0	1	2	2	2	3	4	4	5	5	7	7	9
8	0	0	0	2	2	2	7						

Nótese que hay tres jugadores que se ubican en el tallo de 6, con 62, 66 y 68 kilos respectivamente. Y así con los demás tallos. Por otra parte, si se observa el gráfico, el mismo genera una curva comenzando en la hoja 8 del tallo 6, pasando por la hoja 9 del tallo 7 y terminando en la hoja 7 del tallo 8. De los tipos de curvas se hablará más adelante cuando se trabajen los histogramas.

Distribución de frecuencias

Los datos cuantitativos también pueden ser representados en una distribución de frecuencias agrupándolos en intervalos. Por ejemplo, los pesos de los jugadores se pueden agrupar en intervalos para ayudar en el análisis de los mismos. A continuación, se presentan los pasos para la construcción de la distribución de frecuencias de datos agrupados (en intervalos) y la cual tiene varias columnas. Para un mejor entendimiento, la explicación la daremos a partir del conjunto de pesos de los jugadores de la selección Colombia.

Lo primero que se hace es ordenar los datos de menor a mayor. Luego, se genera la primera columna de la distribución de frecuencias, que corresponde a los intervalos, los cuales se construyen de la siguiente manera:

Se resta el valor máximo del valor mínimo, a este valor se le llama Rango; y este valor se divide entre $1 + 3.322\log n$, siendo n la cantidad de datos, en este caso 23. Al valor que resulte de la operación, lo llamaremos Número de intervalos. El resultado de esta operación será el ancho de cada intervalo.

Ancho del intervalo $\frac{\text{Valor Màximo-valor Mìnimo}}{\text{Número de intervalos}}$ $\frac{\text{Rango}}{1 + 3.322\log n}$ El resultado obtenido se aproxima al entero siguiente.

Cada intervalo tiene límite inferior y límite superior, la obtención de los mismos se realiza de la siguiente manera: el primer límite inferior es el dato más bajo y se le suma el Ancho del intervalo para el valor de su límite superior. Para el siguiente intervalo, se toma como límite inferior el valor del límite superior anterior y se le suma el Ancho del intervalo para el valor de su límite superior. Y así sucesivamente para los demás intervalos. El proceso termina cuando se iguale o supere con el último intervalo el valor mayor del conjunto de datos.

La segunda columna de la distribución de frecuencias está formada por la frecuencia (f), que es la cantidad de datos que corresponde a cada intervalo. Para que no se preste a confusiones, si un valor coincide con el límite inferior o superior de algún intervalo, este se sumará a la frecuencia del intervalo del límite inferior y no del superior. La sumatoria de todas las frecuencias de f debe dar igual a n.

La tercera columna es la frecuencia relativa (fr). Para hallar los valores de esta, se divide cada frecuencia de los intervalos entre n. La sumatoria de todas las frecuencias relativas de esta columna debe ser igual a 1. Esta dada por la fórmula:

$$f_r = \frac{\text{frecuencia de cada intervalo}}{n}$$

La cuarta columna es la misma frecuencia relativa, pero dada en porcentajes y se obtiene multiplicando cada valor de la frecuencia relativa por 100, se representa con el símbolo de porcentaje, %.

En la quinta columna se ubica la frecuencia acumulada, el primer valor es el mismo de la columna de la frecuencia f. El segundo valor de esta columna es la suma del primer valor de la columna de la frecuencia con el segundo valor de la misma. El tercer valor de esta columna será la suma del tercer valor de la columna de la frecuencia f con los dos anteriores valores de la misma columna. El proceso se terminará cuando se llegue a la última casilla y su valor será el total de la cantidad de datos, es decir n.

La sexta columna es la frecuencia acumulada relativa, se obtiene análogamente como se obtuvo la frecuencia relativa en la tercera columna. En esta columna, el último intervalo tendrá el valor de 1. Se simboliza **Fr**

$$f_r = \frac{frecuencia\ acumulada\ de\ cada\ clase}{n}$$

La séptima columna es la frecuencia acumulada relativa en porcentaje y se obtiene análogamente como se realizó para hallar la cuarta columna.

La última columna está dada por la marca de clase, es el promedio entre el límite superior y el límite interior de cada intervalo, está dada por:

$$f_r = \frac{Limite\ superior + limite\ inferior}{n}$$

Tabla 5. Distribución de frecuencias pesos jugadores

Clases	f	fr	%	F	Fr	%	Marca
62 - 67	2	0,09	8,70	2	0,09	8,70	64,5
67 - 72	6	0,26	26,09	8	0,35	34,78	69,5
72 - 77	7	0,30	30,43	15	0,65	65,22	74,5
77 - 82	7	0,30	30,43	22	0,96	95,65	79,5
82 - 87	1	0,04	4,35	23	1,00	100,00	84,5
	Suma	1	100				

Histograma

Es una gráfica de barras de la distribución de frecuencias acumuladas, en donde cada rectángulo tiene el mismo ancho; en el eje vertical están las frecuencias de cada clase y en el eje horizontal las clases de la variable. Como son intervalos los que se grafican, las barras del histograma deben ir unidas. A continuación, se observa el histograma de los jugadores de la selección Colombia, con base en la distribución de frecuencias que se trabajó en el numeral anterior.

Tabla 6. Tabla Histograma

Clases	F
62 - 67	2
67 - 72	6
72 - 77	7
77 - 82	7
82 - 87	1

Figura 13. Histograma peso de los jugadores

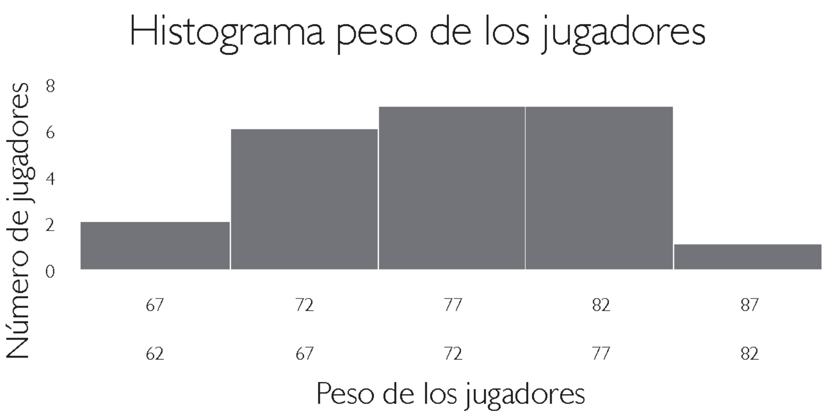
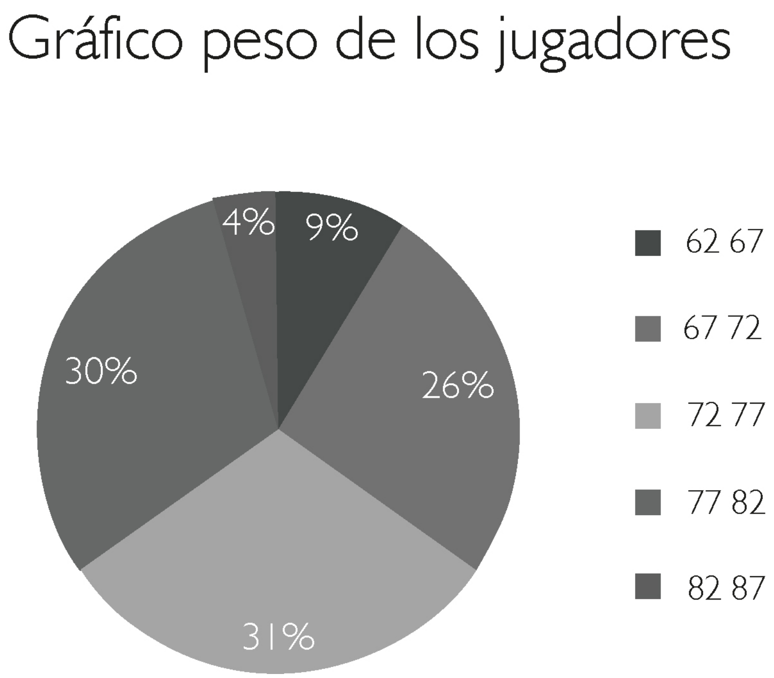


Grafico circular, datos cuantitativos

En él se grafica la frecuencia relativa porcentual de la distribución de frecuencias acumulada. A continuación, se observa el peso de los jugadores.

Figura 14. Ejemplo Gráfico circular datos cuantitativos.



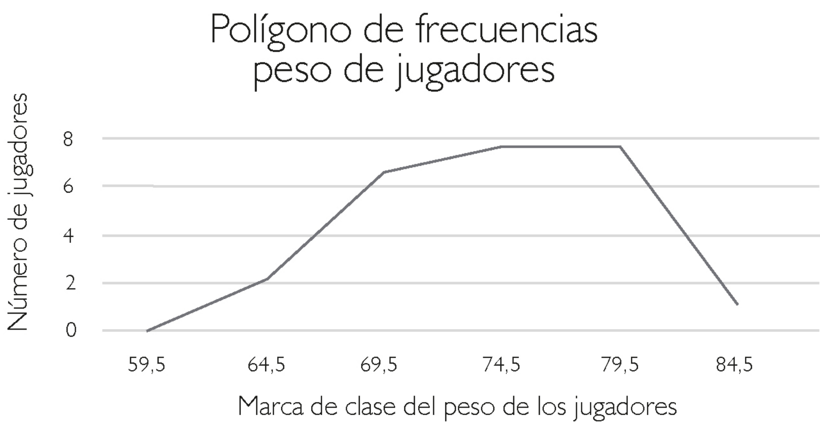
Polígono de frecuencias

Es un gráfico que está conformado por las marcas de clase, la cuales van en el eje horizontal y sus respectivas frecuencias, ubicadas en el eje vertical. La unión secuencial con segmentos de recta de esos puntos que se forman es lo que se llama polígono de frecuencias.

Tabla 7. Datos Polígono de frecuencias.

Clases	f	Mi
	0	59,5
62 67	2	64,5
67 72	6	69,5
72 77	7	74,5
77 82	7	79,5
82 87	1	84,5
		89,5

Figura 15. Ejemplo Polígono de frecuencias.



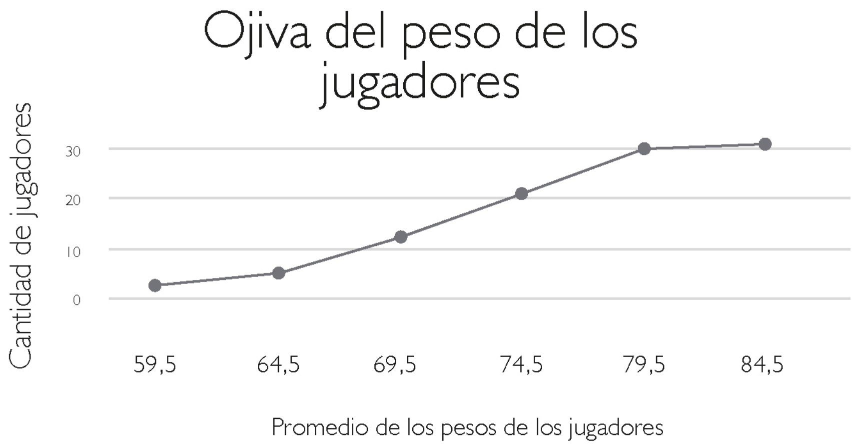
Ojiva

Es un gráfico análogo al polígono de frecuencias, pero en este caso, se toman las parejas con la marca de clase y su respectiva frecuencia acumulada. La unión secuencial con segmentos de recta de esos puntos que se forman es lo que se llama ojiva. Nótese que la ojiva siempre es ascendente.

Tabla 8. Datos Ojiva

F	Marca
0	59,5
2	64,5
8	69,5
15	74,5
22	79,5
23	84,5

Figura 16. Ejemplo Ojiva.



Una aplicación en Excel

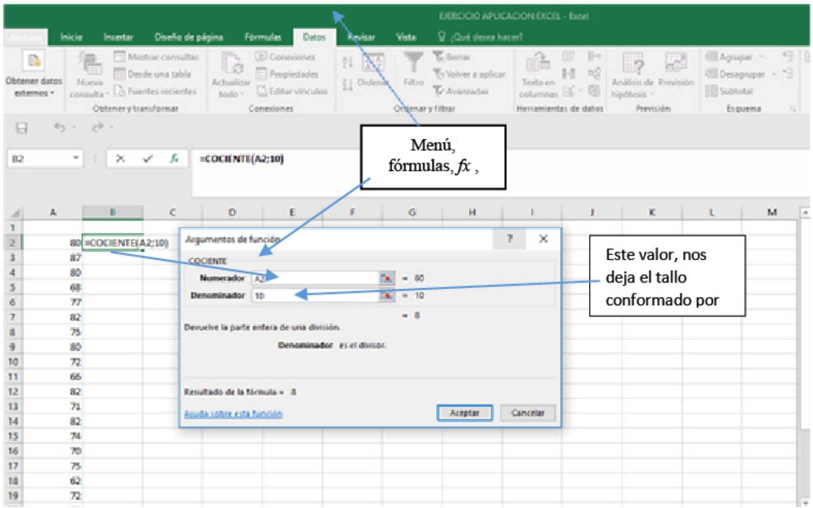
A continuación, se usará Excel para mostrar la agilidad de este programa y su fácil aplicación trabajando los temas de esta sección.

Tallos y hojas

Tenemos los datos en una columna, en la siguiente columna se va al menú fórmulas, se le da clic en ícono fx y se despliegan opciones, se busca la función cociente, en esta se despliega la ventana con numerador, se introduce el primer dato y con denominador en esta va el número 10, y se arrastra este primer valor.

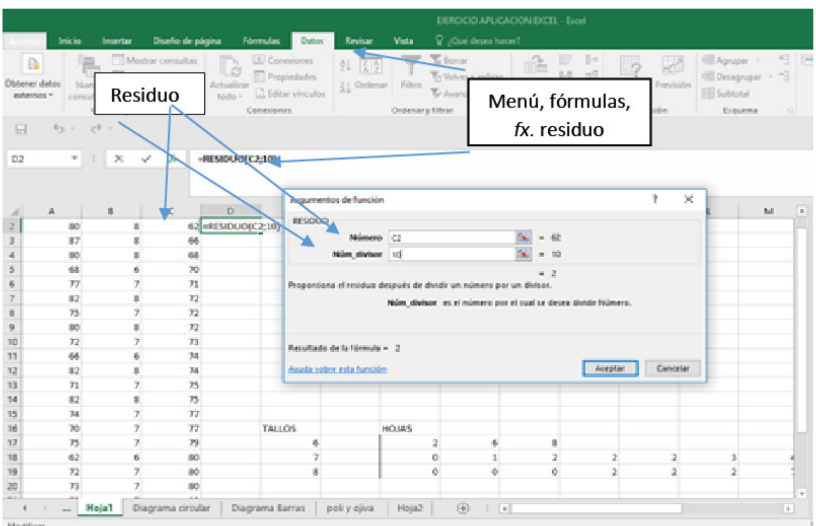
Se copian como valores en otra columna, se ordenan de menor a mayor, se va a datos y se le da clic al ícono quitar duplicados. De esta forma quedan los tallos. En la siguiente imagen se ve con mejor claridad.

Figura 17. Explicación trabajo tallo y hojas en Excel.



Para las hojas, tomamos los datos originales, copiándolos como valores, y ordenándolos de menor a mayor, en la siguiente columna se va al menú fórmulas, se le da clic en el ícono fx y se despliega la ventana de funciones, se ubica la función residuo, se despliega la ventana con número, en este va el primer dato ordenado, y en el número divisor va el número 10, aceptar y arrastramos la fórmula hasta el último valor, quedando de esta forma las hojas, se copian transpuestas, las de las mismas decenas frente a su respectiva hoja.

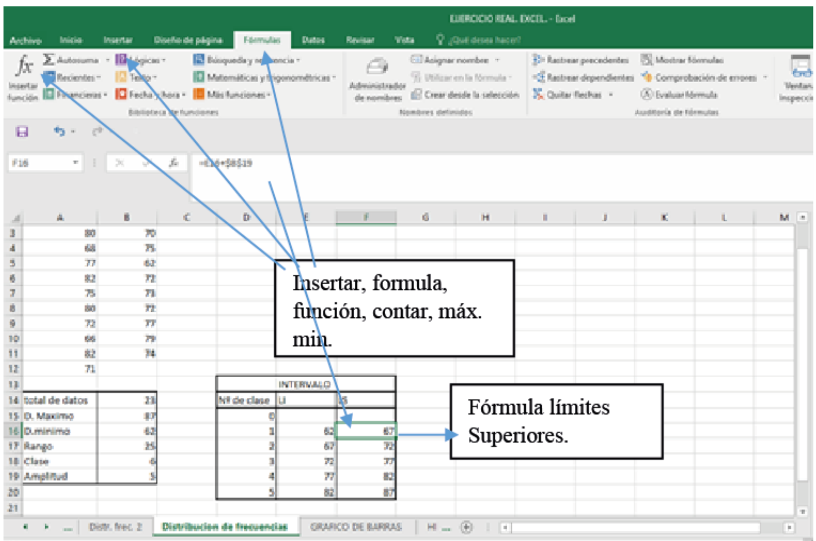
Figura 18. Continuación explicación trabajo tallo y hojas en Excel.



Distribución de frecuencias

Primera columna: intervalos, para el primer límite inferior tomamos el dato más bajo y se le suma la amplitud hallada anteriormente, (este valor se fija), de esta forma queda su límite superior, para el siguiente intervalo, se toma como límite inferior el valor del límite superior anterior y se le suma la amplitud (fija), para el valor de su límite superior, luego se arrastra la fórmula hasta la última clase.

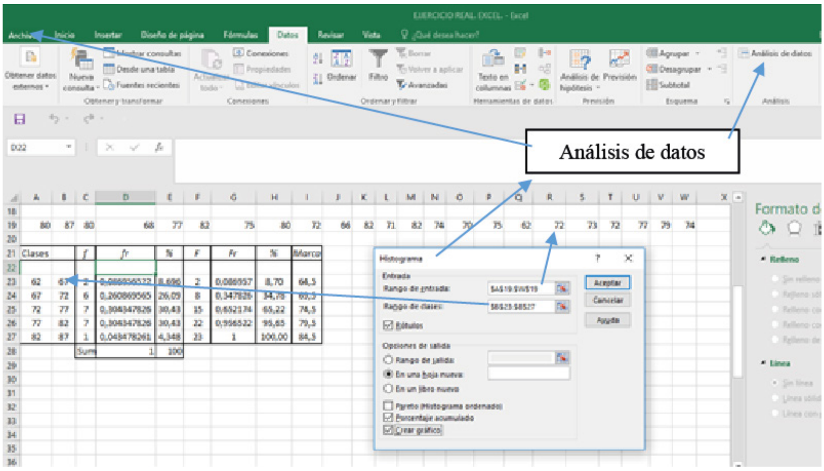
Figura 19. Trabajo distribución de frecuencias en Excel.



Para las siguientes columnas debe estar activo análisis de datos, se procede así: archivo, opciones, complementos, ir, se despliega una ventana y se toma herramientas para análisis y aceptar. Para verificar su ejecución vamos a datos y aparece en la parte superior análisis de datos.

El siguiente paso clic en análisis de datos y en la ventana que se despliega ejecutamos histograma, en esta nueva ventana, en rango de entrada seleccionamos todos los datos y en rango de clase resaltamos los límites superiores tomando una celda en blanco al inicio, le damos visto a rótulos y crear gráfico en hoja nueva y aceptar.

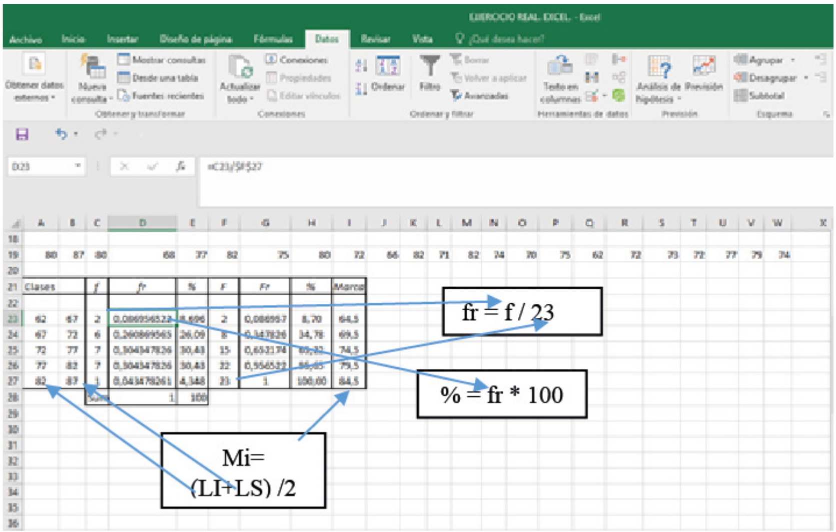
Figura 20. Continuación trabajo distribución de frecuencias en Excel.



A continuación, en esa nueva tabla se agrega una columna frecuencia relativa fr, se toma el primer valor de la f y se divide fijando el valor total de elementos, y se arrastra hasta la última clase, se inserta otra columna para la frecuencia relativa dada en porcentaje (%), el primer dato de fr se multiplica por 100 y se arrastra este valor hasta la última clase.

Ahora insertamos otra columna frecuencia acumulada (F), el primer valor es el primero de f, para el segundo valor, aplicamos la suma del primer valor de la columna de la frecuencia con el segundo valor de la misma, y arrastramos la fórmula hasta el último intervalo. Para la frecuencia acumulada relativa, se toma el primer valor de fr y se divide con el valor total de datos, este último valor se fija, luego se arrastra la fórmula para todos los intervalos. Para la frecuencia acumulada relativa en porcentaje se toma el primer valor de Fr y se multiplica por 100, arrastrando hasta el último intervalo. Para la marca de clase, se suma el valor del límite inferior y del límite superior dividido en dos, esto se ejecuta para cada intervalo.

Figura 21. Tercera explicación distribución de frecuencias en Excel.



Histograma

Resaltamos la columna de la frecuencia, clic en insertar, columna aparece un gráfico de barras, para modificarlo, nos ubicamos sobre una barra y le damos clic derecho y en la ventana que se despliega, tomamos la opción dar formato a la serie de datos, luego en la ventana que se despliega, ponemos en el ancho del intervalo cero. De esta forma, aparecen las barras unidas, luego para los ejes nos ubicamos sobre los valores del eje x y clic derecho, dar formato a ejes, y resaltamos los intervalos, aceptar, para colocarle bordes, damos clic derecho, borde, línea sólida.

Figura 22. Trabajo histograma en Excel.

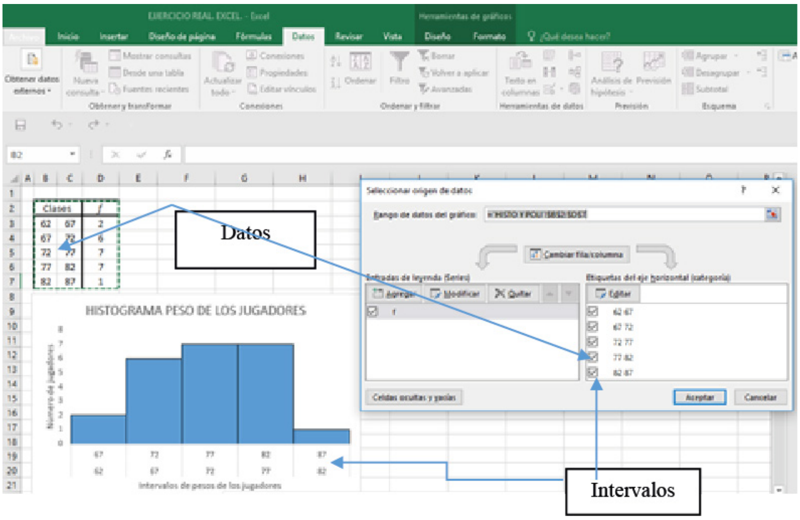
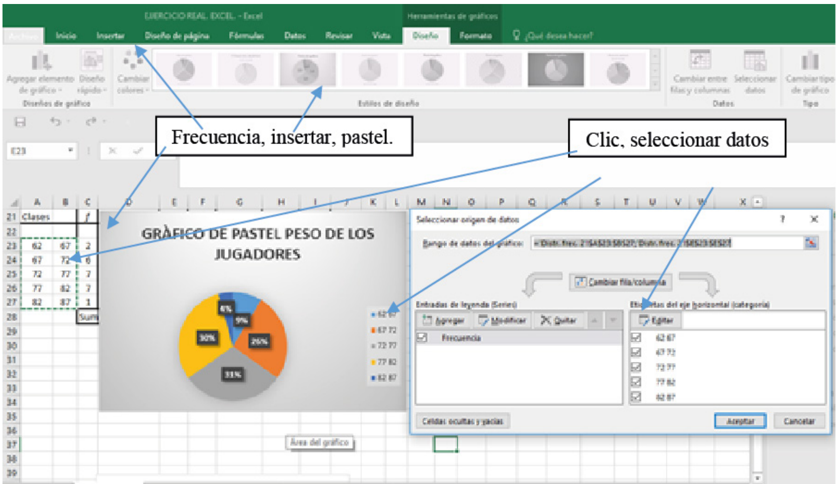


Gráfico Circular

Seleccionamos frecuencia, insertar, clic sobre el gráfico circular, seleccionamos el gráfico que aparece con los porcentajes para una mayor conclusión, luego clic derecho sobre los datos que están fuera de la gráfica, seleccionar datos, y resaltamos los intervalos, para indicar los intervalos de cada porcentaje, por último, editamos el título.

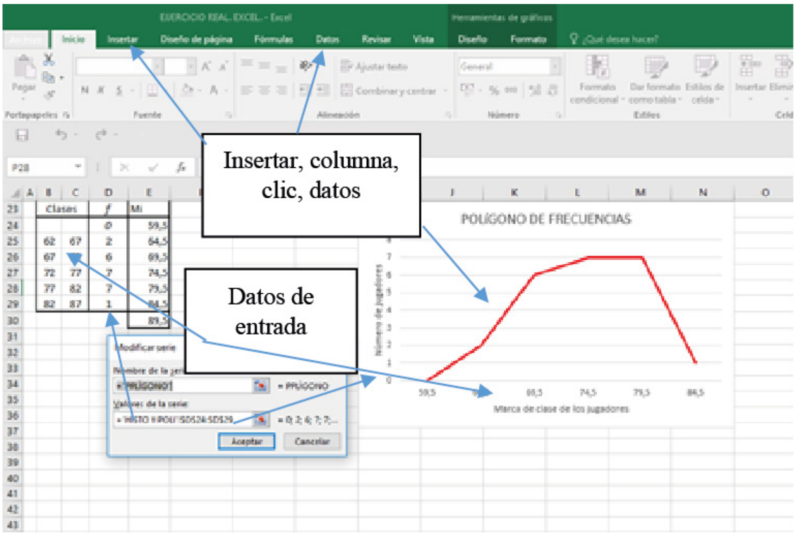
Figura 23. Explicación Gráfico Circular en Excel.



Polígono de frecuencias

Insertar, columna, nos ubicamos en la parte del gráfico, clic derecho, seleccionar datos, agregar, en la ventana que se despliega, en nombre de la serie, clases, y en datos de la serie, resaltamos las marcas de clase, luego, modificar y resaltamos los datos de la frecuencia. Luego, en la columna de la marca de clase agregamos dos valores, el primero que va ubicado como el primer valor de la marca, se toma el valor inicial de la marca y se le resta la amplitud; el segundo valor se pone en la posición final de la marca de clase, el cual es la suma del último valor de la clase más la amplitud. Luego, insertar, líneas y sobre el cuadro de la gráfica, clic, seleccionar datos, nombre de la serie, polígono, rango de la serie, resaltamos las frecuencias, editar y en rango de rótulos del eje, resaltamos la marca de clase. En la parte superior del gráfico aparece un más, le damos clic y agregar título de los ejes.

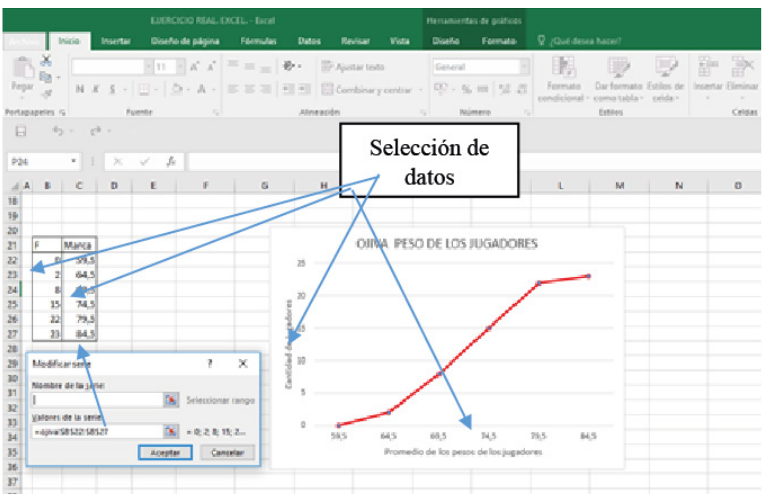
Figura 24. Explicación polígono de frecuencias en Excel.



Ojiva

Se toma la frecuencia y la frecuencia acumulada, se agrega un dato en la columna

Figura 25. Explicación Ojiva en Excel.



Ejercicio de aplicación

Preferencia de los cinemas en la ciudad de Bogotá tomada a 20 personas, en forma aleatoria:

Cine Colombia	CineMark Atlantis	Cinépolis Calima
CineMark	Cinépolis Calima	Cinépolis
Royal Films	Royal Films	Cine Colombia
CineMark Atlantis	Cine Colombia	Cine Colombia
Cine Colombia	CineMark	Cine Colombia
Cine Colombia	Royal Films	Cine Colombia
Royal Films	Cine Colombia	Calima

1. Con base a la información anterior, resolver los siguientes numerales:

A. Completar la tabla de distribución de frecuencias

Cinemas	f	%	F

B. ¿Qué porcentaje de personas escogen cada cinema, realice su representación circular?

C. Realizar gráfico de barras y gráfico de Pareto.

2. Revise el siguiente listado de número y porcentaje de adopciones de familias residentes en el exterior por Regionales del ICBF.

Tabla 9. Número y porcentaje de adopciones familias residentes en el exterior.

Regionales	Total	%
Bogotá	57	20,4%
Antioquia	48	17,1%
Cundinamarca	30	10,7%
Valle del Cauca	19	6,8%

Caldas	18	6,4%
Risaralda	17	6,1%
Nariño	12	4,3%
Córdoba	9	3,2%
Cauca	7	2,5%
Quindío	7	2,5%
Tolima	7	2,5%
Atlántico	6	2,1%
Boyacá	5	1,8%
Santander	5	2%
Bolívar	4	1%
Meta	4	1%
Chicó	3	1%
Huila	3	1%
Norte de Santander	3	1%
Caquetá	2	1%
Casanare	2	1%

Fuente: ICBF (2018).

Con base en la información anterior, representar el gráfico circular y dar conclusiones de acuerdo a los departamentos que más presentan adopciones frente a los que presentan una minoría.

3. Se tienen los siguientes pesos en kg de diferentes objetos realizar los siguientes numerales:

80 25 50 75 45 68 39 80 70 20 65 80 25 50 53 28 72.

A. Llenar la tabla de distribución:

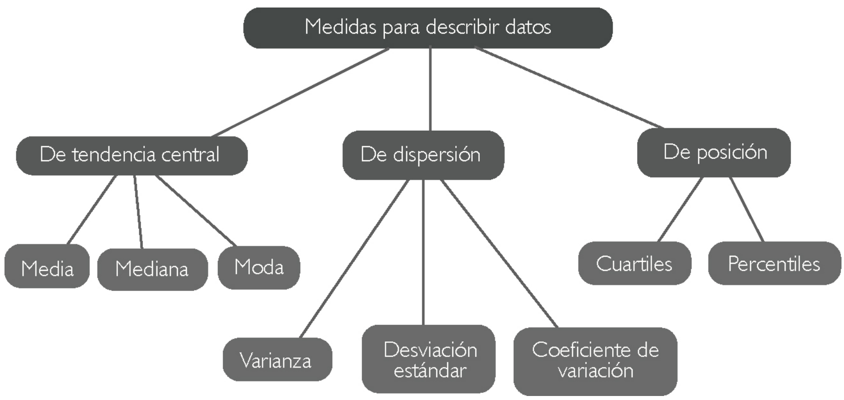
Clase	f	fr	%	F	Fr	%	Mi

B. Realizar los siguientes gráficos: histograma, circular, polígono y ojiva.

C. De acuerdo a estos gráficos, concluir cuál cree usted que da una mayor información acerca de los datos.

4. Medidas para describir los datos

Figura 26. Medidas para describir los datos.



Fuente: elaboración propia de los autores.

Medidas de tendencia central

Son parámetros que se ubican, generalmente, en la parte central de los datos, después de haberlos ordenado. En esencia son tres: media o promedio, mediana y moda.

Media

También se le llama promedio y corresponde a la suma de los datos dividida entre la cantidad de los mismos (n). Si se habla de una media poblacional se utiliza la letra μ, y si se habla de la media muestral se utiliza el símbolo X. Utilizaremos este último principalmente. La fórmula es la siguiente:

$\overline{X}= \frac{\sum_{x}^{n} x=1\ x_i}{n}$ x_i epresenta cada uno de los datos de la muestra.

Ejemplo: Peso de los jugadores de Colombia que fueron al mundial de Rusia 2018, dado en kilogramos.

80 87 80 68 77 82 75 80 72 66 82 71 8274 70 75
62 72 73 72 77 79 74

$$\overline{X}= \frac{80+87+80+68+77+82+75+80+72+66+82+71+82+74+70+75+62+72+73+72+77+79+74}{23}$$

que es el promedio de peso de los jugadores. El promedio de peso de los 23 jugadores es 75,2173 kilos.

Para datos agrupados la fórmula es la siguiente:

$$\overline{X}= \frac{\sum_{x}^{n} x=1\ x_{i,} f_1}{n}$$

Tabla 10. Obtención de la media en datos agrupados

Clases	Frecuencia	Frecuencia Acumulada	x_i	$x_i f_i$
62 - 67	2	2	64,5	129
67 - 72	6	8	69,5	417
72 - 77	7	15	74,5	521,5
77 - 82	7	22	79,5	556,5
82 - 87	1	23	84,5	84,5
Suma	23			1708,5

$$\overline{X}= \frac{\sum_{x}^{n} x=1\ x_{i,} f_1}{n} = \frac{1705,5}{23} = 74,2$$

La media en datos agrupados es una buena aproximación de la media para datos desagrupados, como se puede observar en los resultados, siendo aproximadamente 75 para datos desagrupados y 74 para datos agrupados.

Mediana

Es una medida central, los datos deben estar ordenados de menor a mayor, su valor divide la muestra o la población en dos partes iguales, dejando un 50% por debajo y el otro 50% por encima de este valor. Se simboliza X.

Para datos no agrupados se tiene en cuenta si la muestra es par o impar. Cuando n es impar, la mediana corresponde a $\frac{n+1}{2}$ siendo n la cantidad de los datos. Cuando n es par, la mediana se calcula hallando el promedio de los dos valores centrales.

Veamos el ejemplo de los pesos de los jugadores. Ordenamos los 23 datos de menor a mayor

62 66 68 70 71 72 72 72 73 74 74 75 75 77 77
79 80 80 80 82 82 82 87

Por ser impar, se toma $\frac{n+1}{2}$, es decir, $\frac{23+1}{2} = 12$, por tanto, el dato 12 es la posición de la mediana, para este caso es $X=75$ gramos, que es el valor de la mitad de peso de los jugadores.

Para datos agrupados se usa la siguiente fórmula

$$\tilde{X} = li + \frac{\frac{n}{2} - f_{i-1}}{f_i} * a$$

Li es límite inferior del intervalo
F_{i-1} es la frecuencia anterior al intervalo que se tomó
f_i es la frecuencia correspondiente al intervalo
a es el ancho del intervalo

Veamos la aplicación con la siguiente tabla:

Tabla 11. Obtención de la mediana en datos agrupados

Clases	Frecuencia	Frecuencia Acumulada	*Xi*	*Xi. F*
62 - 67	2	2	64,5	129
67 - 72	6	8	69,5	417
72 - 77	7	15	74,5	521,5
77 - 82	7	22	79,5	556,5
82 - 87	1	23	84,5	84,5
	23			1708,5

Como n = 23. Se suma 1, quedando 23 + 1 = 24, al dividir la muestra en dos, quedó 12, se busca este valor en la frecuencia acumulada, para este caso es el intervalo en donde esta es 15. A continuación, se presentan los datos de la fórmula.

Tabla 12. Datos de la fórmula de la mediana en datos agrupados

$\frac{n+1}{2}$	12
Li	72
a	5
F_{i-1}	8
fi	7

Usando la fórmula se tiene:

$$\tilde{X} = li + \frac{\frac{n}{2} - f_{i-1}}{f_i} * a = 72 + \frac{\frac{12}{2} - 8}{7} * 5 = 74{,}865$$

Si esta mediana se aproxima al entero más cercano, es 75, que es el mismo resultado de datos no agrupados.

Moda

Es el valor o valores que más se repiten en un conjunto de datos. Es la única medida de tendencia central que, aparte de trabajarse cuantitativamente, también se trabaja cualitativamente. Por ejemplo, en un salón de clase se puede preguntar cuál es el color de pantalón que más usan los estudiantes, esa sería la moda. También, se pueden encontrar los siguientes casos: si un solo dato presenta la mayor frecuencia, es la moda. Si dos datos presentan la misma frecuencia y es la más alta, se llama bimodal, ambos valores son modas. Si más de dos datos presentan la misma frecuencia y esta es la más alta, se dice que es multimodal. Si no hay datos que se repitan o todos los pesos presentan la misma frecuencia, o la cantidad es muy baja, no existe moda.

Por ejemplo, los datos siguientes muestran el peso de los jugadores

62 66 68 70 71 72 72 72 73 74 74 75 75 77 77
79 80 80 80 82 82 82 87

Como se observa, ningún dato sobresale de los demás, sin embargo, 72, 80 y 82 se repiten tres veces, por tanto, se podría decir que es una muestra multimodal.

Para datos agrupados se habla de intervalo modal, y es aquel o aquellos que presentan la frecuencia más alta. Si es el caso y se necesita un valor, se puede tomar su respectiva marca de clase. Veamos la tabla de frecuencias agrupada de los pesos de los jugadores.

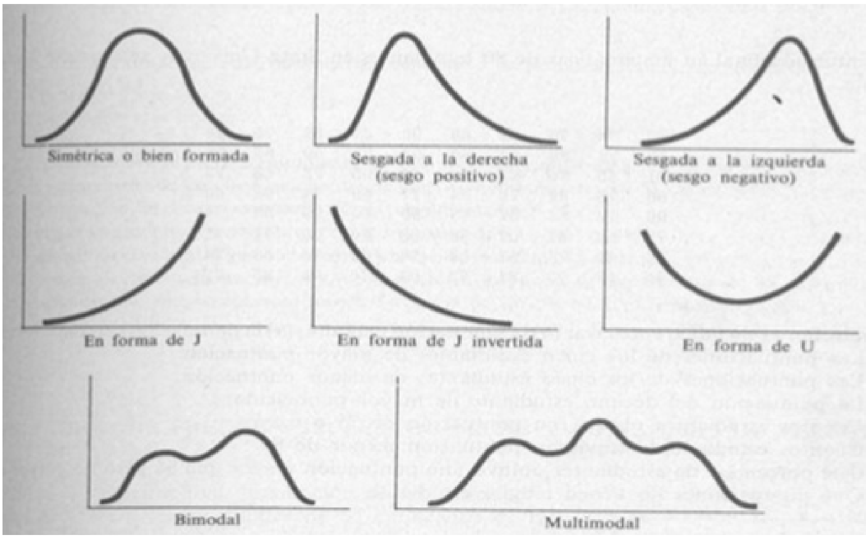
Tabla 13. Obtención de la moda en datos agrupados

Clases	Frecuencia
62 - 67	2
67 - 72	6
72 - 77	7
77 - 82	7
82 - 87	1
TOTAL	23

Como se observa, los intervalos 72-77 y 77-82 tienen la frecuencia más alta que es 7, esta sería la moda.

Sesgo: es un término importante al trabajar con las medidas de tendencia central, el cual nos indica hacia dónde están centrados los datos y el tipo de curva que dibuja el histograma. Se tienen varias formas, las cuales se ven en la siguiente figura:

Figura 27. Tipos de curvas de acuerdo al sesgo.



Fuente: https://www.tiposde.com/wp-content/uploads/Tipos-de-Curvas.jpg

Medidas de dispersión

Nos hablan de la variabilidad que presentan los datos, es decir, la homogeneidad o heterogeneidad del conjunto de datos respecto a la media. Se tienen dos parámetros que miden la variabilidad, estos son: varianza y desviación estándar.

Varianza

Es un parámetro que permite medir qué tan dispersos o alejados están los datos respecto a la media. El símbolo de esta es σ^2, que se usa para hablar de varianza poblacional, o s^2, cuando se trata de varianza muestral. Las fórmulas son las siguientes:

Varianza poblacional:

$\sigma^2 \frac{\sum(x_i - \mu)^2}{N}$ *,donde x_i representa a cada uno de los datos,μ es la media y N es el total de la población.*

Varianza muestral:

$s^2 \frac{\sum(x_i - \bar{X})^2}{n-1}$ *onde x_i representa a cada uno de los datos,(x̄es la media y n es el total de la muestra.*

Veamos un ejemplo tomando el peso de los jugadores, realizando la siguiente tabla:

Tabla 14. Obtención de la varianza en datos no agrupados

Xi	*Xi - μ*	*(Xi - μ)²*
80	4,78	22,87
87	11,78	138,83
80	4,78	22,87
68	7,22	52,09
77	1,78	3,18
82	6,78	46,00
75	0,22	0,05
80	4,78	22,87
72	3,22	10,35
66	9,22	84,96
82	6,78	46,00
71	4,22	17,79
82	6,78	46,00
74	1,22	1,48
70	5,22	27,22
75	0,22	0,05
62	13,22	174,70
72	3,22	10,35
73	2,22	4,92
72	3,22	10,35
77	1,78	3,18
79	3,78	14,31
74	1,22	1,48
1730	- 0,00000	761,91304

$$S^2 \frac{761{,}91303}{23\text{-}1} = 32{,}12665$$

Para datos agrupados:

Varianza poblacional:

$$\sigma^2 \frac{\sum f_i (x_i - \mu)^2}{N}$$
, siendo fi las frecuencias de cada intervalo, xi marcas de clase, μ la media y n total de la población.

Varianza muestral:

$$S^2 \frac{\sum f_i (x_i - \mu)^2}{n\text{-}1}$$
, siendo fi las frecuencias de cada intervalo, xi marcas de clase, siendo fi el valor de cada una de las frecuencias, xi marcas de clase, μ la media y n total de los datos de la muestra.

A continuación, se presenta el ejemplo de la varianza, con los pesos de los jugadores:

Tabla 15. Obtención de la varianza en datos agrupados

Clases	*f*	*Xi*	*Xi. F*	*Xi - μ*	*(Xi - μ)²*	*fi((Xi - μ)²)*
62 67	2	64,5	129	-9,78	95,70	191,40
67 72	6	69,5	417	-4,78	22,87	137,24
72 77	7	74,5	521,5	0,22	0,05	0,33
77 82	7	79,5	556,5	5,22	27,22	190,55
82 87	1	84,5	84,5	10,22	104,40	104,40
SUMA	23		1708,5			623,9130435

$$S^2 \frac{623{,}9130435}{23\text{-}1} = 28{,}36$$

Aunque al calcular la varianza entre datos no agrupados y datos agrupados, hay diferencia, la misma no es tan amplia, la más fiable es la de datos no agrupados.

Desviación estándar

Es la raíz cuadrada de la varianza, es decir, en muestra se toma como $s = \sqrt{(s^2)}$,y en población se toma $\sigma=\sqrt{(\sigma^2)}$.

Para el ejemplo anterior, en datos no agrupados se tiene $S = \sqrt{34{,}6324105} = 5{,}89$.

En datos agrupados es $S=\sqrt{28{,}36} = 5{,}325$

Como se observa, la desviación estándar en los dos casos es casi la misma.

Coeficiente de variación

Es el parámetro que indica la relación entre la desviación estándar y la media, se da en porcentaje. Permite identificar la dispersión relativa entre los datos. Su utilidad se da para comparar la dispersión entre dos poblaciones. Entre más alto el porcentaje, más dispersión relativa y entre más bajo el porcentaje, menos es la dispersión relativa. La fórmula es la siguiente:

$$C.V =\left(\frac{Desviación\ estándar}{Media}\right) * 100\%$$

Si la calculamos para los pesos de los jugadores en datos no agrupados queda de la siguiente manera:

$$C.V =\left(\frac{5{,}88493079}{75{,}2173}\right) * 100 = 0{,}07823906 * 100 = 7{,}82390592\%$$

Con los valores en datos agrupados queda de la siguiente manera:

$$C.V =\left(\frac{5{,}3253810940}{74{,}2826087}\right) * 100\ \% = 0{,}07169082 * 100 = 7{,}16908195\%$$

Como se puede observar, los dos resultados son muy cercanos, y la desviación relativa es baja.

Medidas de posición

Estas son las que dividen la muestra en partes iguales, se necesita que los datos estén ordenados.

Cuartiles

Son medidas, que dividen la muestra o población en cuatro partes iguales, se simbolizan Qi, i indica el cuartil que se va a hallar, ya sea el 1, 2 o 3; el primer cuartil parte la muestra hacia la izquierda en el 25% de los datos y la derecha en el 75%; el segundo cuartil que es la misma mediana, parte la muestra en el 50%; y tercer cuartil parte la muestra en el 75% de los datos hacia la izquierda y el 25% hacia la derecha.

El proceso para hallar los cuartiles en datos no agrupados es el siguiente:

Paso 1. Se ordenan los datos de menor a mayor.

Paso 2. Se calcula el índice i, que es la posición del dato que corresponde al cuartil que se esté hallando, p indica el cuartil que se va hallar y n es el número de observaciones.

$$i = (\frac{p}{4})\ x\ n$$

Paso 3. Se dan dos posibilidades: si i no es un número entero, en este caso se debe redondear al entero siguiente, indicando este valor la posición del cuartil. Si i es un número entero, se halla el promedio de los valores en las posiciones i e $i + 1$, indicando de esta forma la posición del cuartil.

Ejemplo Q_1

62 66 68 70 71 72 72 72 73 74 74 75 75 77 77
79 80 80 80 82 82 82 87

Aplicamos la fórmula, para buscar la posición.

$i = (\frac{p}{4})\ x\ n$, *en la cual p corresponde al cuartil 1.*

$i = (\frac{1}{4})\ x\ 23 = 5{,}75 \sim 6$

Se busca esta posición en los pesos ordenados, lo que nos indica que $Q_1 = 72$.

Para datos agrupados se procede de la siguiente forma: para seleccionar el intervalo, se halla kn/4, y este valor se busca en la frecuencia acumulada. Luego, se aplica la siguiente fórmula:

$$Q_k = L_i + \frac{\frac{kn}{4} - f_{i-1}}{f_i} * a$$

Siendo Li límite inferior del intervalo, Fi-1 frecuencia anterior al intervalo que se tomó, f_i es la frecuencia correspondiente al intervalo y a es el ancho del intervalo.

Veamos el ejemplo:

Tabla 16. Obtención de los cuartiles en datos agrupados

Clases	Frecuencia	Frecuencia Acumulada
62 - 67	2	2
67 - 72	6	8
72 - 77	7	15
77 - 82	7	22
82 - 87	1	23
	23	

A continuación se presentan los datos de la fórmula a aplicar para hallar Q_1, lo primero que hallamos es kn/4, este valor fue 6 y lo buscamos en la frecuencia acumulada de los pesos, para saber con qué datos reemplazar la fórmula.

Tabla 17. Datos de la fórmula de los Cuartiles en datos agrupados

$\frac{kn}{4}$	6
Li	67
F_{i-1}	2
fi	6
a	5

$$Q_k = L_i + \frac{\frac{kn}{4} - f_{i-1}}{f_i} * a = 67 + \frac{6-2}{6} * 5=70.33$$

Para los cuartiles 2 y 3 se sigue el mismo proceso donde k va a variar entre 2 y 3 respectivamente.

Percentiles

Son medidas de posición que dividen la muestra en 100 partes, se simbolizan Pi, donde i es el percentil que se va a hallar y toma valores enteros entre 1 y

99; la diferencia entre percentil y percentil es del 1% de los datos. La mediana es el percentil 50, ya se había dicho que era el cuartil 2.

El proceso para hallar percentiles en datos no agrupados es el siguiente:

Paso 1. Se ordenan los datos de menor a mayor.

Paso 2. Se calcula el índice i donde p indica el percentil que se va hallar y n es el número de observaciones.

$$i = (\frac{p}{100}) \; x \; n$$

Paso 3. Se dan dos posibilidades: si i no es un número entero, en este caso se debe redondear al entero siguiente, indicando este valor la posición del percentil. Si i es un número entero, se halla el promedio de los valores en las posiciones i e $i + 1$, indicando de esta forma la posición del percentil.

Veamos un ejemplo con el peso de los jugadores hallando el percentil 80, P_{80}

62 66 68 70 71 72 72 72 73 74 74 75 75 77 77
79 80 80 80 82 82 82 87

Aplicamos la fórmula, para la posición.

$i = (\frac{p}{100})\ x\ n$ en la cual p es 80

$i = (\frac{80}{100})\ x\ 23 = 18{,}4 \sim 19$

Buscamos la posición 19 en los pesos ordenados y corresponde a 80, el $P_{80}=80$.

Para datos agrupados se procede de la siguiente forma: para seleccionar el intervalo, se halla kn/100, y este valor se busca en la frecuencia acumulada. Se utiliza la siguiente fórmula:

$$P_k = L_i + \frac{\frac{kn}{100} - f_{i-1}}{f_i} * a$$

Donde Li es el límite inferior del intervalo, F_{i-1} es la frecuencia anterior al intervalo que se tomó, f_i es la frecuencia correspondiente al intervalo y a es el ancho del intervalo. A continuación, se hace el ejemplo hallando el mismo percentil anterior.

Tabla 18. Obtención de los percentiles en datos agrupados

Clases	f	F
62 - 67	2	2
67 - 72	6	8
72 - 77	7	15
77 - 82	7	22
82 - 87	1	23
	23	

Los siguientes son los datos de la fórmula:

Tabla 19. Datos de la fórmula de los percentiles en datos agrupados

$\frac{kn}{100}$	10
Li	72
F_{i-1}	8
fi	7
a	5

De esta forma se obtiene lo siguiente:

$$P_{80} = L_i + \frac{\frac{kn}{100} - f_{i-1}}{f_i} * a = 72 + \frac{10\text{-}8}{7} * = 73{,}42$$

Nota: los percentiles tienen una equivalencia con los cuartiles, así:

$$Q_1 = P_{25}$$

$$\tilde{X} = Q_2 = P_{50}$$

$$Q_3 = P_{75}$$

Gráfico de caja y bigotes

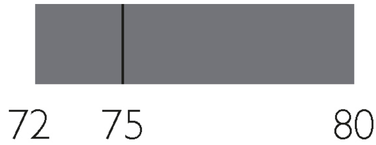
Es un gráfico que usa cinco números para resumir los datos: el valor menor, el primer cuartil, la mediana (segundo cuartil), el tercer cuartil, y el valor mayor. Sirve para detectar datos o valores extremos demasiado grandes o demasiado pequeños con respecto a todos los datos.

El proceso para hallar gráfico de caja con los datos de los pesos de los jugadores, se realiza realizando los siguientes pasos:

Paso 1. Se hallan Q_1 y Q_3, estos valores serán los extremos de la caja que se grafica, en ella se encuentra el 50% de los datos centrales, recordemos que: $Q_1=72$, $Q_3=80$. La resta de estos dos valores se denomina el rango intercuartílico $(RI = Q3\text{-}Q1)$, y es la distancia entre ellos.

$RI = Q_3 - Q_1 = 80 - 72 = 8$

Paso 2. Dentro de la caja ubicamos Q_2 o la mediana. $Q_2=75$, a partir de ella, se traza un segmento de recta paralelo a la altura de la caja. Nótese que la media no necesariamente está ubicada en la mitad de la caja.

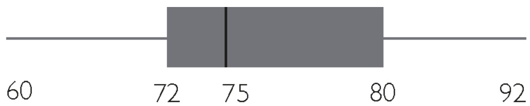


Paso 3. Se hallan los bigotes obteniendo primero los extremos inferior y superior con de acuerdo a las siguientes fórmulas:

Extremo inferior: $Q_1 - 1.5*RI = 72 - 1.5\ (8) = 60$

Extremo superior: $Q_3 + 1.5*RI = 80 + 1.5\ (8) = 92$

Los extremos se unen por medio de líneas con los extremos de la caja, esos son los bigotes.

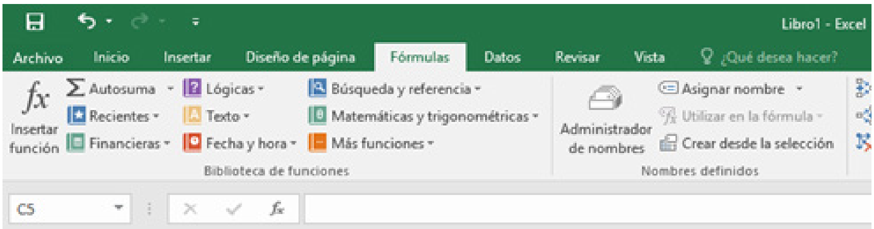


Los datos menores del extremo inferior y mayores del extremo superior son llamados atípicos. Nótese que para el peso de los jugadores no hay datos atípicos, ya que el valor menor es 62 y el extremo inferior es 60, y el valor mayor es 87 y el extremo superior es 92, por tanto, todos los datos están dentro de la caja y bigotes.

Una aplicación en Excel

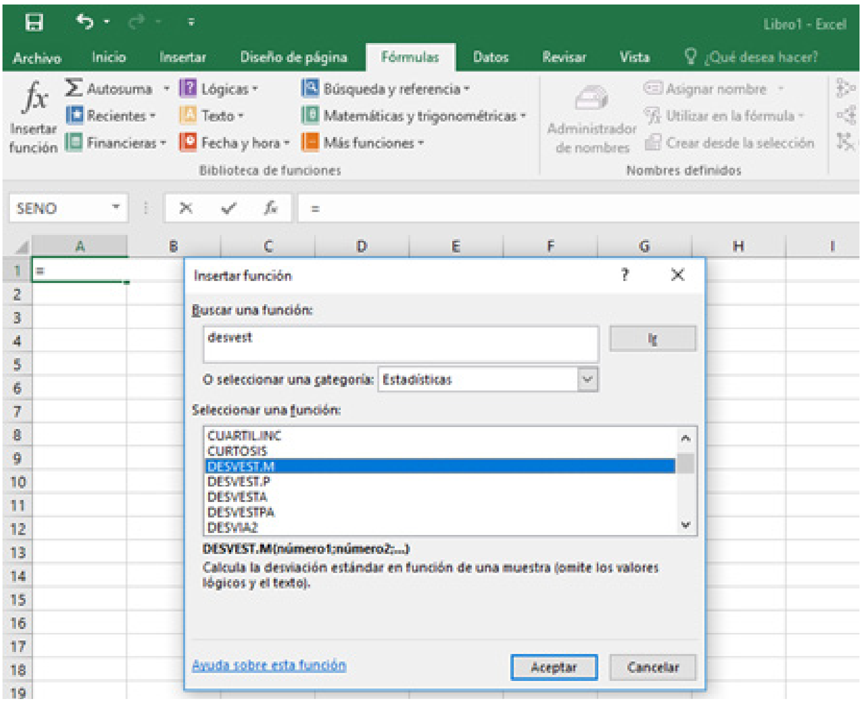
Para utilizar una función especial en el programa Excel, como es el caso de aquellas utilizadas en el análisis estadístico, se ubica el cursor en la pestaña de fórmulas y se elige el ícono insertar función *(fx)*.

Figura 28. Funciones especiales en el programa Excel.



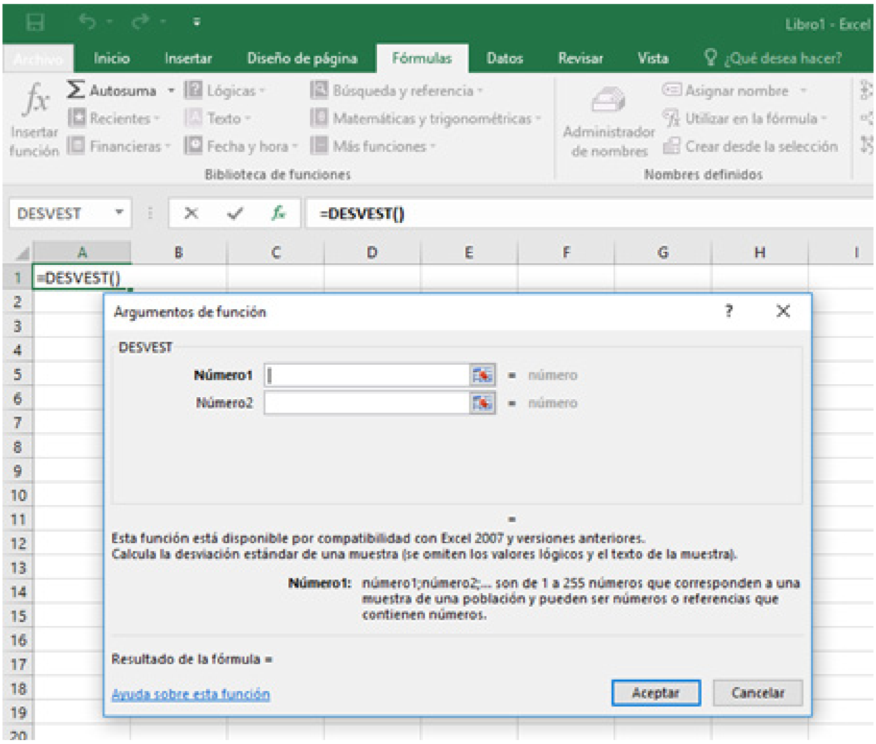
A continuación, se desplegará una ventana que permitirá buscar la función que se necesita. En el cuadro "seleccionar una categoría" se busca la opción "estadísticas", desplegando las funciones estadísticas que tiene Excel.

Figura 29. Cuadro para buscar las funciones en el programa Excel.



Se hace clic en la función que se necesita, y luego se le da clic en el botón "Aceptar". Enseguida, se desplegará una ventana en la cual se deben seleccionar los datos que se necesitan en la fórmula.

Figura 30. Ventana de selección de datos en el programa Excel.



Para el caso ilustrado de la función DESVEST (desviación estándar), en el recuadro "Número 1" se debe seleccionar el conjunto de datos a los que se les quiere aplicar esta función. Luego de seleccionar los datos, se da clic en el botón "aceptar" y en la celda seleccionada aparecerá el valor.

El procedimiento para cualquier otra función que se desee trabajar en Excel es el análogo al de esta explicación, cada una con los parámetros requeridos.

Ejercicios de aplicación

Ejercicio 1

Se tienen los siguientes pesos en kg de diferentes objetos resolver los siguientes numerales, sobre medidas centrales.

80 25 50 75 45 68 39 80 70 20 65 80 25 50 53
28 72

A. ¿Cuál es el promedio de los pesos de los 17 objetos?

B. ¿Cuál es el peso que divide la muestra en dos partes iguales?

C. ¿Existe moda en estos datos?

D. ¿Cuál de las anteriores medidas es la que mejor representaría los datos y por qué?

E. Hallar las medidas de dispersión (varianza y desviación estándar), para datos no agrupados de los 17 pesos trabajados en kg.

F. Calcule el coeficiente de variación para los datos anteriores.

G. Con los datos de los pesos, identificar si existen datos atípicos por medio del gráfico de cajas y bigotes. Luego de esto, saque conclusiones de acuerdo a los resultados y teniendo todo lo trabajado en los anteriores literales.

Ejercicio 2

Tenga en cuenta la información de la siguiente tabla para resolver los siguientes literales.

Tabla 20. Salario mínimo en Colombia de 1997 a 2017.

EL SALARIO MÍNIMO EN
LA ÚLTIMA DÉCADA

1997	$189.255	↑ 21.02%
1998	$224.526	↑ 18.50%
1999	$260.472	↑ 16.01%
2000	$286.513	↑ 10%
2001	$316.000	↑ 9.96%
2002	$343.000	↑ 8.04%
2003	$369.500	↑ 7.44%
2004	$399.600	↑ 7.83%
2005	$426.000	↑ 6.56%
2006	$455.700	↑ 6.95%
2007	$484.500	↑ 6.30%
2008	$516.500	↑ 6.41%
2009	$556.200	↑ 7.67%
2010	$576.500	↑ 3.64%
2011	$599.200	↑ 4%
2012	$634.500	↑ 5.8%
2013	$660.000	↑ 4.02%
2014	$688.000	↑ 4.5%
2015	$718.350	↑ 4.6 %
2016	$767.155	↑ 7%
2017	$820.857	↑ 7%

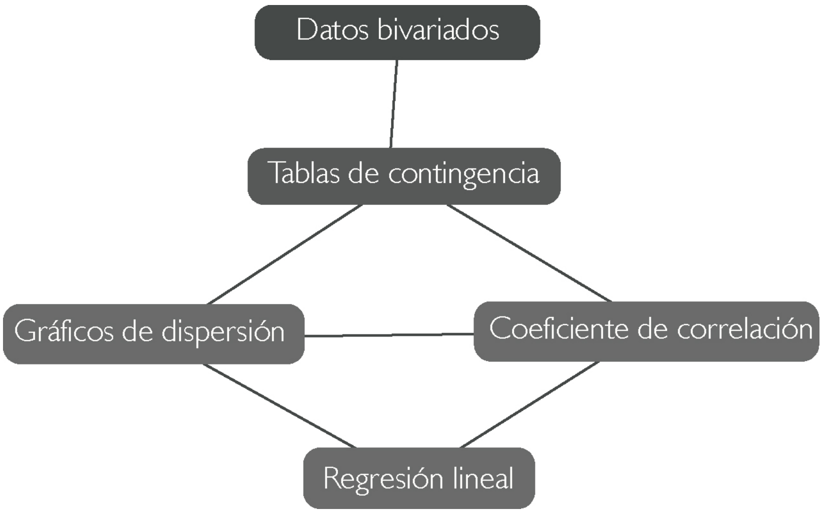
Fuente: https://caracol.com.co/radio/2017/12/04/media/1512399049_098602.html

A. Halle el promedio y la mediana de los salarios de los 21 años, ¿cree usted que ha sido un aumento significativo para las clases bajas?

B. Calcule la distribución de frecuencias y compare las variaciones en los intervalos.

5. Análisis de datos bivariados

Figura 31. Datos Bivariados.



Fuente: elaboración propia de los autores.

Es muy común encontrar situaciones en donde se analicen, comparen o se contrasten dos variables. Por ejemplo, contrastar el tipo de contratación de un profesor (tiempo completo, medio tiempo, cátedra), con el tipo de universidad donde trabaja (pública o privada). Otro ejemplo es comparar el número de goles realizados por los delanteros de un equipo con el número de veces que lanzado al arco. Cuando dos variables, ya sean cualitativas o cuantitativas, se analizan en un mismo experimento, se llaman datos bivariados. En un experimento se pueden analizar las variables por separado, pero, también se puede estudiar la relación entre las dos, lo que genera el análisis de datos bivariados. Estos procesos de sistematizar, graficar y analizar las relaciones entre las dos variables son análogos a lo ya realizados anteriormente al trabajar una sola variable. En esta sección trabajaremos el análisis de datos bivariados.

Tablas de contingencia

Una tabla de contingencia es aquella que permite presentar los datos bivariados. Veamos un ejemplo encontrado en una investigación de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OECD) en 2016 y traducida por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en el mismo año. Se encontró que para el 2014 las sedes escolares en el país se distribuían de la siguiente manera:

Tabla 21. Tabla de contingencia de instituciones educativas por ubicación y tipo de establecimiento.

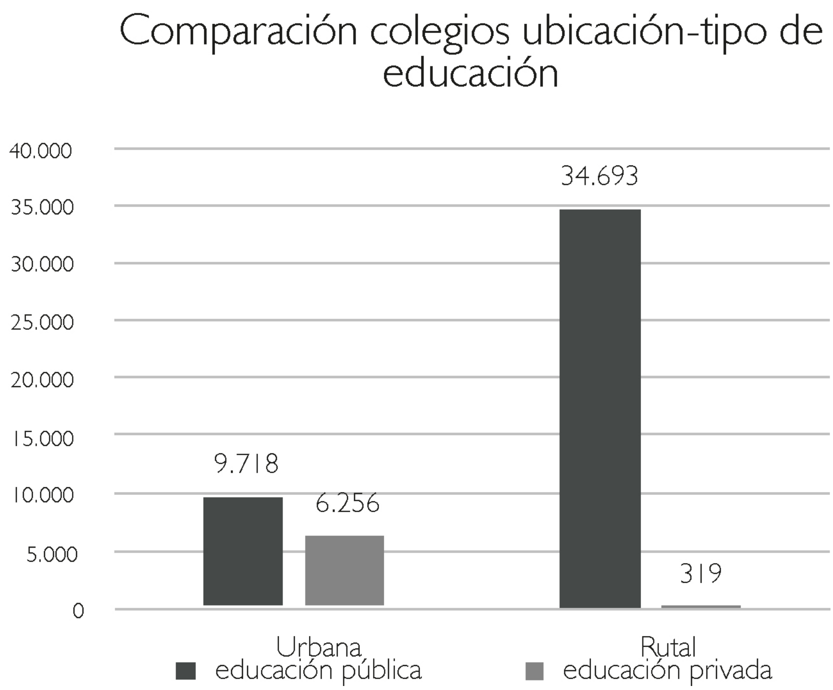
	Educación pública	Educación Privada	Total
Urbana	9.718	6.256	15.974
Rural	34.698	319	35.017
Total	44.416	6.575	50.991

Fuente: MEN (2016).

Como se puede observar en la tabla 21, se están contrastando dos variables y las dos son cualitativas. Una es en donde se ubica la sede escolar, si en la zona urbana o en la zona rural. La otra variable es el tipo de colegio o escuela que se tiene, si es pública o privada. En la tabla de contingencia se puede observar el cruce de las variables respecto a la cantidad de instituciones de acuerdo a las características, por ejemplo, si se quiere ubicar una institución que sea rural y a la vez privada, el resultado es 319. O si se quiere ubicar una institución urbana y que sea pública sería 9.718. Como esos, podemos encontrar más ejemplos en donde se cruce la información de las tablas. Esa es la ventaja de las tablas de contingencia.

La representación gráfica se puede hacer, por ejemplo, en gráfico de barras, veamos:

Figura 32. Comparación colegios Ubicación-Tipo de Educación



Gráficos de dispersión

Los gráficos de dispersión se utilizan cuando se trabajan dos variables cuantitativas. Veamos un ejemplo, en la tabla se muestra el peso y la estatura de los jugadores de la selección Colombia que fueron al mundial de Rusia 2018

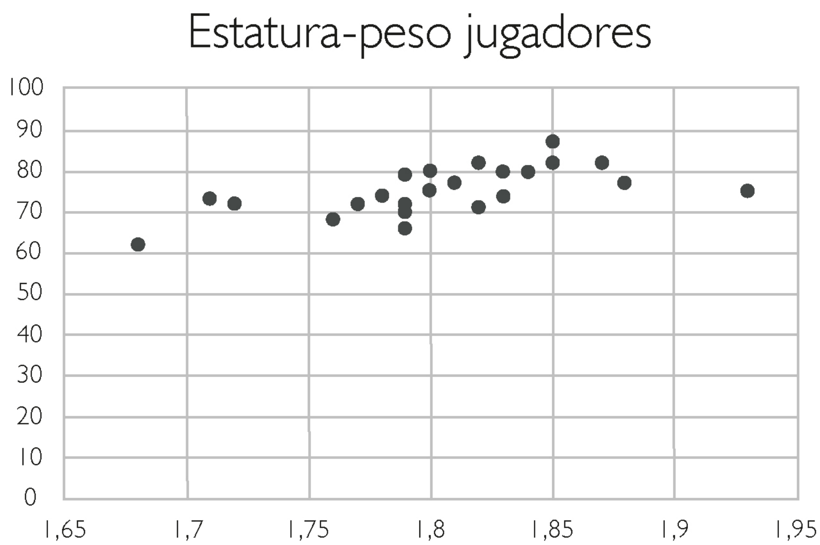
Tabla 22. Peso vs estatura jugadores de la selección Colombia Rusia 2018

PESO (gramos)	ESTATURA (metros)
80	1,83
87	1,85
80	1,8
68	1,76

77	1,88
82	1,87
75	1,93
80	1,84
72	1,72

PESO (gramos)	ESTATURA (metros)
66	1,79
82	1,85
71	1,82
82	1,82
74	1,78
70	1,79
75	1,8
62	1,68
72	1,79
73	1,71
72	1,77
77	1,81
79	1,79
74	1,83

Figura 33. Peso vs estatura jugadores de la selección Colombia Rusia 2018



Fuente: periódico El Tiempo, 4 de junio (2018)

Para el ejemplo, se tienen las variables peso y estatura de los jugadores de Colombia que fueron al mundial de Rusia 2018. En el gráfico se observan los puntos que relacionan cada peso de un jugador con su estatura respectiva.

Coeficiente de correlación

Es una medida que permite establecer el nivel de relación lineal entre dos variables cuantitativas, también se conoce como coeficiente de correlación de Pearson. Esa correlación lineal se establece con un valor entre -1 y 1 y se representa con la letra r. A continuación, se observan dos gráficos de dispersión que evidencian si el coeficiente de correlación es positivo o negativo.

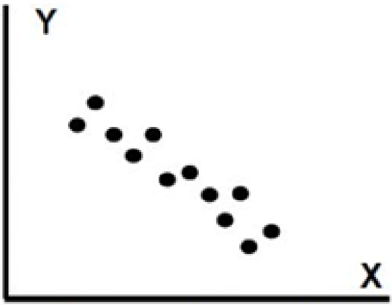


Figura 34. Gráfico de dispersión que refleja una correlación negativa, debido a la forma descendente de los puntos. En ese caso r<0.

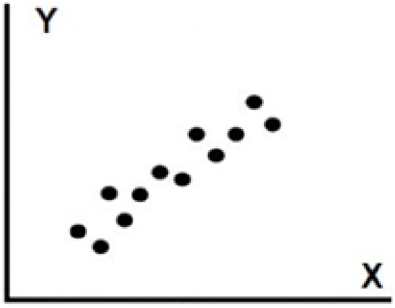


Figura 35. Gráfico de dispersión que refleja una correlación positiva, debido a la forma ascendente de los puntos. En ese caso r>0.

Entre más cerca esté el valor r a cero, menos estarán correlacionadas las variables linealmente, y entre más cerca esté r a -1 o a 1, las variables estarán más correlacionadas linealmente. Si el valor r es menor de cero, la correlación será negativa y la relación entre las variables será inversa (si una variable aumenta, la otra disminuye y viceversa), y si el valor r es mayor de 0 la correlación será positiva y la relación entre las variables será directa (si una variable aumenta, la otra también, y si la otra disminuye, la otra también). Para determinar el nivel de correlación se determina el valor absoluto de r, siendo el mismo siempre positivo. En la siguiente tabla se observa el tipo de correlación, de acuerdo al valor absoluto de r.

Tabla 23. Tipo de correlación de acuerdo al valor absoluto de r.

Valor	Tipo de Correlación
1	Perfecta
0,81-0,99	Alta
0,61-0,80	Medio-alta
0,41-0,60	Media
0,21-0,40	Medio-baja
0,01-0,20	Baja
0	Nula

Para obtener el coeficiente de correlación lineal, se utilizará la siguiente fórmula:

$$r = \frac{\sum mn}{\sqrt{\sum m^2\,)}\,\sqrt{\sum n^2}},$$

Sabiendo que $m = x- x$, $n = y - y$. Donde x representa cada uno de los datos de la primera variable, y representa cada uno de los datos de la segunda variable. x y y son las respectivas medias o promedios de los datos de la primera y la segunda variable. Se explica la obtención de los datos de la fórmula en la siguiente tabla y con base a los datos de la tabla 22. En cada columna se pone una componente de la fórmula y su resultado respecto a los datos. En la parte de bajo de la tabla se hacen las respectivas operaciones pedidas desde la fórmula:

Tabla 24. Pasos para obtener los datos de la fórmula de r.

ESTATURA (x) (metros)	PESO (y) (gramos)	m	n	m^2	n^2	m*n
1,83	80	0,02522	4,78261	0,00064	22,87335	0,12060
1,85	87	0,04522	11,78261	0,00204	138,82987	0,53278
1,8	80	-0,00478	4,78261	0,00002	22,87335	-0,02287
1,76	68	-0,04478	-7,21739	0,00201	52,09074	0,32321
1,88	77	0,07522	1,78261	0,00566	3,17769	0,13408
1,87	82	0,06522	6,78261	0,00425	46,00378	0,44234
1,93	75	0,12522	-0,21739	0,01568	0,04726	-0,02722
1,84	80	0,03522	4,78261	0,00124	22,87335	0,16843
1,72	72	-0,08478	-3,21739	0,00719	10,35161	0,27278
1,79	66	-0,01478	-9,21739	0,00022	84,96030	0,13626
1,85	82	0,04522	6,78261	0,00204	46,00378	0,30669
1,82	71	0,01522	-4,21739	0,00023	17,78639	-0,06418
1,82	82	0,01522	6,78261	0,00023	46,00378	0,10321
1,78	74	-0,02478	-1,21739	0,00061	1,48204	0,03017
1,79	70	-0,01478	-5,21739	0,00022	27,22117	0,07713
1,8	75	-0,00478	-0,21739	0,00002	0,04726	0,00104
1,68	62	-0,12478	-13,21739	0,01557	174,69943	1,64930
1,79	72	-0,01478	-3,21739	0,00022	10,35161	0,04756

1,71	73	-0,09478	-2,21739	0,00898	4,91682	0,21017
1,77	72	-0,03478	-3,21739	0,00121	10,35161	0,11191
1,81	77	0,00522	1,78261	0,00003	3,17769	0,00930
1,79	79	-0,01478	3,78261	0,00022	14,30813	-0,05592
1,83	74	0,02522	-1,21739	0,00064	1,48204	-0,03070
$\bar{x}$=1,80478	$\bar{y}$=75,21739			$\sum m^2$ =0,0691	$\sum n^2$ =761,9130	$\sum mn$=4,47608
				$\sqrt{(\sum m^2)}$=0,2630	$\sqrt{(\sum n^2)}$=27,60277	

Fuente: elaboración propia.

Por tanto, $r = \dfrac{\sum mn}{\sqrt{\sum m^2}\ \sqrt{\sum n^2}} = \dfrac{4,47608696}{0,26300934*27,6027724} = 0,616559 \cong 0,62$

Como la correlación r fue de 0,62, la misma es positiva y su valor absoluto es el mismo. Se podría decir, y de acuerdo a la tabla 23, que existe una correlación medio-alta entre la estatura y el peso de los jugadores de la selección Colombia que fue al mundial de Rusia 2018.

Regresión lineal

Anteriormente, se dieron elementos para determinar la correlación lineal entre dos variables y qué tan alta era la misma. En este apartado se va a revisar el concepto de regresión lineal. Ahora lo que se pretende es describir la relación entre dos variables a partir de su gráfico y la ecuación lineal que mejor represente dicha relación, cabe aclarar que no todo par de variables se relacionan linealmente, en esta parte solo hablaremos de que sí lo hacen. La recta que se represente a partir de las ecuación se le conoce como recta de regresión. Para hacer la regresión es necesario que una variable se comporte como independiente *(x)* y la otra como dependiente *(ŷ)*.

La fórmula es la misma que la de la recta $\hat{y} = b + ax$; donde a es la pendiente de la recta y b el corte con el eje y. Para obtener la pendiente a se utiliza la siguiente fórmula:

$$a = \frac{n(\sum xy)-(\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2)-(\sum x)^2}$$ *, siendo n la cantidad de datos en x o en y.*

Para obtener b se utiliza la siguiente fórmula: $b = y - ax$, siendo $\overline{x}$ y $\overline{y}$ las medias respectivas de los valores en x y en y, y a es el valor hallado anteriormente, es decir, que para hallar b, primero hay que obtener a.

El ejemplo de las edades y el peso de los jugadores de la selección Colombia que estuvo en el mundial de Rusia 2018 también se puede aplicar para realizar la regresión lineal, solo hay que tener en cuenta cuál sería la variable independiente y cuál la dependiente, para este caso, la independiente será la estatura y la dependiente el peso. El proceso de obtención de los datos de la fórmula se observa a continuación:

Tabla 25. Pasos para obtener los datos de la fórmula de regresión.

ESTATURA (x) (metros)	PESO (y) (gramos)	xy	x^2
1,83	80	146,4	3,3489
1,85	87	160,95	3,4225
1,8	80	144	3,24
1,76	68	119,68	3,0976
1,88	77	144,76	3,5344
1,87	82	153,34	3,4969
1,93	75	144,75	3,7249
1,84	80	147,2	3,3856
1,72	72	123,84	2,9584
1,79	66	118,14	3,2041
1,85	82	151,7	3,4225
1,82	71	129,22	3,3124
1,82	82	149,24	3,3124
1,78	74	131,72	3,1684
1,79	70	125,3	3,2041
1,8	75	135	3,24
1,68	62	104,16	2,8224
1,79	72	128,88	3,2041
1,71	73	124,83	2,9241
1,77	72	127,44	3,1329

1,81	77	139,37	3,2761
1,79	79	141,41	3,2041
1,83	74	135,42	3,3489
$\sum x= 41{,}51$	$\sum y= 1730$	$\sum xy= 3126{,}75$	$\sum x^2= 74{,}9857$

Ahora se hallan cada una de las partes de las fórmulas.

Tabla 26. Datos de la fórmula de regresión.

$n\sum(xy)$	71915,25
$(\sum x)(\sum y)$	71812,3
$n(\sum x^2)$	1724,6711
$(\sum x)^2$	1723,0801
$x=$	1,80478
$y=$	75,21739

De acuerdo a las partes obtenidas, se hallan los valores de a y b

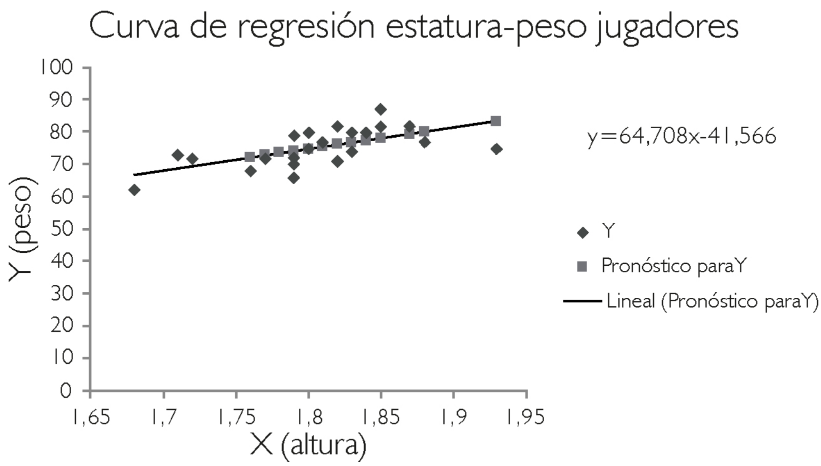
$$a = \frac{n(\sum xy)-(\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2)-(\sum x)^2} = \frac{71915{,}25-71812{,}3}{1724{,}6711-1723{,}0801} = 64{,}70773$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 75{,}21739 - 64{,}70773(1{,}80478) = -41{,}565996$$

Por tanto, la recta de regresión $\hat{y} = b + ax$ es: $\hat{y} = -41{,}565996 + 64{,}70773x$

La gráfica de la misma se observa en a continuación:

Figura 36. Gráfico de dispersión que refleja una correlación positiva, debido a la forma.



Como se puede observar en la gráfica, la recta de regresión que mejor se ajusta a la distribución de los puntos es la obtenida en el proceso anterior. Esta recta hace una aproximación al pronóstico el peso de los jugadores a partir de su altura, para el preparador físico del equipo sería un referente en cuanto a esa relación. Aunque la correlación fue medio alta, puede ser un buen referente. Por ejemplo, para un jugador que mida 1,80 metros, el peso esperado, de acuerdo a la recta de regresión es de 64,708(1,8)-41,566 = 75 kilos.

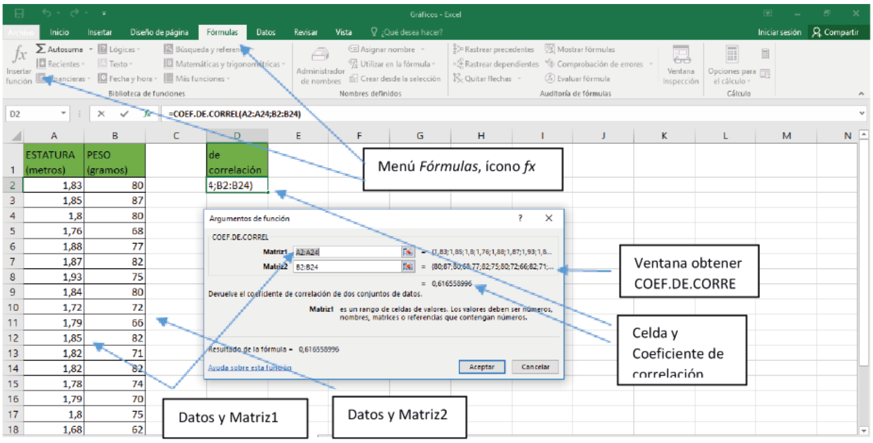
Una aplicación en Excel

Trabajar las funciones coeficiente de correlación y regresión lineal en Excel es mucho más sencillo que hacerlo manualmente como se hizo en los anteriores numerales, sin embargo, la explicación es válida, ya que, en el salón de clase, con solo tener una calculadora, esos cálculos no son complicados, como se pudo observar.

Coeficiente de correlación

Hay que ubicarse en una celda que no interfiera con los datos que se tienen (para este caso D2). Luego, se va el menú Fórmulas, luego se da clic al ícono fx, se abrirá una ventana y en ella se busca y selecciona la función COEF.DE.CORREL, se desplegará una nueva ventana, en donde aparecen las opciones Matriz1 y Matriz2. En Matriz1 se deberán introducir los datos de la primera columna, seleccionado los mismos. Análogamente en la Matriz2 con los datos de la segunda columna. Luego se da clic en aceptar y aparecerá el valor en la celda D2 en este caso. En la siguiente figura se observa cada una de las partes explicadas:

Figura 37. Explicación coeficiente de correlación en Excel.

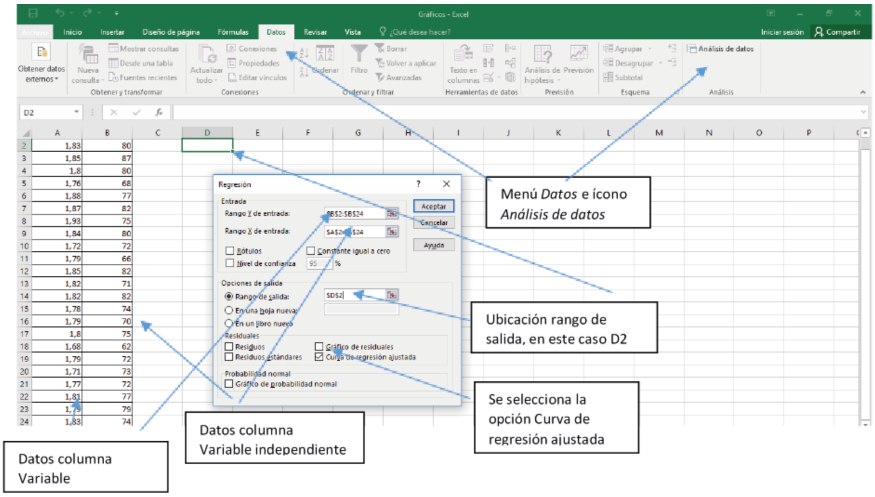


Regresión lineal

Hay que ubicarse en una celda que no interfiera con los datos que se tienen (para este caso D2). Se va al menú Datos y selecciona el ícono Análisis de datos, enseguida se desplegará una ventana, en ella, se selecciona la opción Regresión.

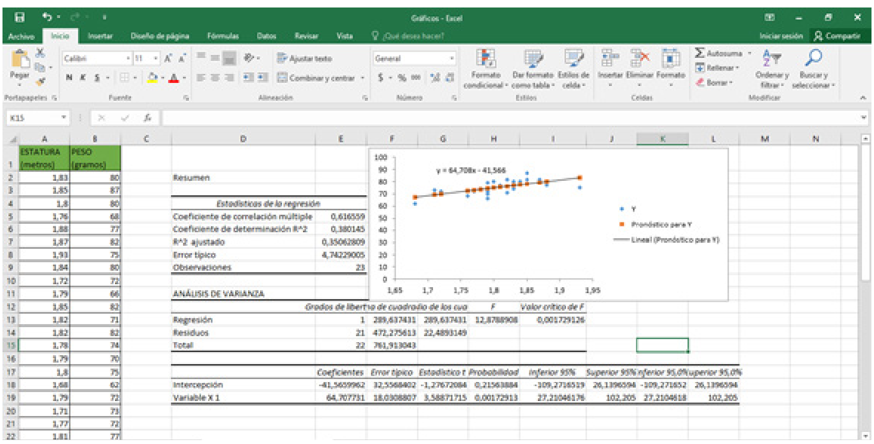
Se desplegará una nueva ventana, en donde aparecen las opciones Rango 1 de entrada y Rango 2 de entrada. En Rango 1 de entrada se deberán introducir los datos de la que considere será la variable dependiente, seleccionado los mismos. Análogamente en Rango 2 de entrada se deberán introducir los datos de la que considere será la variable independiente. Después, se ubica en rango de salida o en Hoja nueva o en Libro nuevo, en este caso, se escoge en Rango de salida y se ubica en la celda que no interfiera con los datos en este caso D2. Enseguida se selecciona la opción Curva de regresión ajustada, para que grafique los puntos. En la siguiente figura se observa cada una de las partes explicadas:

Figura 38. Explicación Regresión lineal en Excel.



Luego se da clic en aceptar y aparecerán una serie de datos a partir de la celda D2, en este caso que es importante consultar o discutir con su profesor. A continuación, se observa en la figura.

Figura 39. Gráfico regresión lineal en Excel.



Ejercicio de aplicación

Con base en todo lo trabajado en este numeral, escoja un equipo de fútbol profesional ya sea de Colombia o del extranjero, tome los pesos y la estatura de los jugadores, cada variable en columna diferente. Y luego haga lo siguiente:

A. Haga el diagrama de dispersión entre las variables peso y estatura.

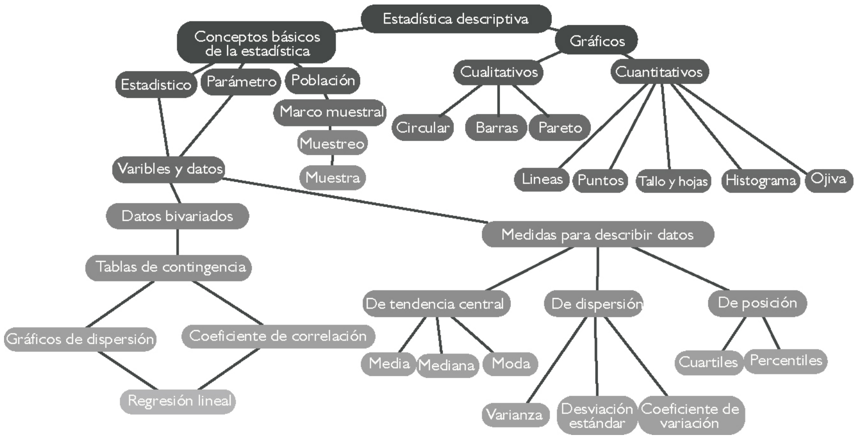
B. Halle el coeficiente de correlación entre las dos variables.

C. Si el coeficiente de correlación es mayor que 0.5, halle la regresión lineal entre las variables peso y estatura con su respectivo gráfico.

D. Saque conclusiones de acuerdo a lo que encontró entre las dos variables.

6. Representación global del núcleo de la cartilla

Figura 40. Representación global conceptos de la cartilla.



Fuente: elaboración propia de los autores.

Test (evaluación por competencias)

1. De acuerdo a lo abordado en la presente cartilla: "La estadística es la que reúne un conjunto de técnicas para recolectar, manejar, describir y analizar una información determinada. En ese sentido, la estadística, permite tener un nivel de aplicación específico, de acuerdo al entorno donde se esté aplicando", se puede inferir que la Estadística:

   A. En esencia analiza información preestablecida.
   B. Es la que ayuda a las matemáticas en la recolección de la información.
   C. Se aplica específicamente a las matemáticas.
   D. Permite llevar a cabo un proceso para la toma de decisiones.

2. En la cartilla se encontró que: "La variable es aquella que cambia o varía, en ese sentido, puede tomar por lo menos dos características", y que hay dos clasificaciones para las variables: por su posición (independiente, dependiente e interviniente), o por su naturaleza cuantitativa (discreta o continua) o cualitativa (nominal u ordinal). De acuerdo a la anterior, se dice que la variable:

   A. Tiempo es cuantitativa discreta.
   B. Posición en la fila es cuantitativa nominal.
   C. Número de cédula es cualitativa nominal.
   D. Edad es cualitativa ordinal.

3. Las medidas para describir los datos son muy útiles y ayudan en los procesos de análisis de los mismos. De acuerdo a lo visto en la cartilla, la única medida para describir los datos que se puede trabajar para datos cualitativos y cuantitativos es la:

   A. Media, ya que es un promedio entre todos los datos.
   B. Moda, ya que es el dato que más se repite en una muestra.
   C. Varianza, ya que permite revisar que tan dispersos están los datos.
   D. Mediana, ya que es el dato de la mitad.

4. Una gráfica óptima para presentar los datos es el histograma, el cual da cuenta de los datos agrupados por intervalos y en un gráfico de barras. De acuerdo a este aspecto, el conjunto de datos que NO se puede presentar en un histograma es:

A. Las edades de los funcionarios de la Universidad.
B. El peso de los estudiantes de la Universidad.
C. El color de los ojos de los funcionarios de la Universidad.
D. El tiempo de demora en desplazamiento de los estudiantes hacia la Universidad.

5. El análisis de datos bivariados permite comparar dos variables. En muchos casos y con base en esa comparación se puede analizar el coeficiente de correlación y, si es el caso, la regresión lineal. De acuerdo a estas premisas, dos variables que no se pueden comparar para hallar el coeficiente de correlación son:

A. El tiempo de llegada a la universidad de los estudiantes con la distancia a su casa.
B. La edad de los funcionarios con los años de trabajo en la universidad.
C. El tiempo de espera entre clase y clase con la duración de las mismas.
D. El color de ojos de los estudiantes de la universidad con su color de pelo.

7. Referencias

Anderson, D. R., Dennis, J. S. y Thomas, A. W. (2008). Estadística para administración y economía. 10a. edición. México D.F, México: Editorial Cengage.

Barreto Villanueva, A. (2012). El progreso de la Estadística y su utilidad en la evaluación del desarrollo Papeles de Población, 18, (73), pp. 1-31. Toluca, México: Universidad Autónoma del Estado de México.

Caracol Radio (2017). Así ha cambiado el salario mínimo en los últimos 10 años. Recuperado el 15 de junio de 2019 de, https://caracol.com.co/radio/2017/12/04/media/1512399049_098602.html

Carollo Limeres, M. C. (2012). Regresión Lineal Simple. Departamento de estadística e investigación operativa. Estadística. FBA I 2011-2012.

Esponisa, HJ. (2017). Tipos de curvas. Revista educativa Tiposde.com. Equipo de redacción profesional. Recuperado el 19 de junio de 2019, de https://www.tiposde.com/curvas.html.

Instituto Colombiano de Bienestar Familiar (ICFB). (2018). Medición de satisfacción del cliente externo de los programas y servicios del ICBF - 2018. CONSORCIO IS-PROYECTAMOS. Informe final de resultados.

Interpretar gráficas de puntos y tablas de frecuencia (nd). Recuperado el 25 de junio de 2019, de https://es.khanacademy.org/math/pre-algebra/pre-algebra-math-reasoning/pre-algebra-frequency-dot-plot/e/analyzing-with-dot-plots

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2016). Revisión de políticas nacionales de educación. La educación en Colombia. Publicado originalmente Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) (2016). Education in Colombia

Rendón-Macías, M. E.; Villasís-Keeve, M. Á. & Miranda-Novales, M. G. (2016). Estadística descriptiva. Revista Alergia México, 63, (4), 397-407.

Triola, M. F. (2009). Estadística. (Décima edición). México D.F., México: Pearson Educación.

Camacho Martínez, C. Coeficiente De Correlación Lineal De Pearson. Recuperado el 16 de junio de 2019, de https://personal.us.es/vararey/adatos2/correlacion.pdf

Periódico el Tiempo, 4 de junio de 2018. Recuperado el 28 de junio de 2019, de https://www.eltiempo.com/mundial-rusia-2018/los-23-convocados-de-colombia-para-el-mundial-de-rusia-2018-226240

Caracol Radio, 6 de junio de 2019. Recuperado el 30 de junio de 2019, de https://caracol.com.co/radio/2019/05/31/deportes/1559256271_079972.html

8. Anexos

A continuación, se muestran todas las funciones estadísticas que se pueden aplicar utilizando la hoja de Excel 2016:

Función	Descripción
Función DESVPROM	Devuelve el promedio de las desviaciones absolutas de la media de los puntos de datos.
Función PROMEDIO	Devuelve el promedio de sus argumentos.
Función PROMEDIOA	Devuelve el promedio de sus argumentos, incluidos números, texto y valores lógicos.
Función PROMEDIO.SI	Devuelve el promedio (media aritmética) de todas las celdas de un rango que cumplen unos criterios determinados.
Función PROMEDIO.SI.CONJUNTO	Devuelve el promedio (media aritmética) de todas las celdas que cumplen múltiples criterios.
Función DISTR.BETA	Devuelve la función de distribución beta acumulativa.
Función DISTR.BETA.INV	Devuelve la función inversa de la función de distribución acumulativa de una distribución beta especificada.
Función DISTR.BINOM.N	Devuelve la probabilidad de una variable aleatoria discreta siguiendo una distribución binomial.
Función DISTR.BINOM.SERIE	Devuelve la probabilidad de un resultado de prueba siguiendo una distribución binomial.
Función INV.BINOM	Devuelve el menor valor cuya distribución binomial acumulativa es menor o igual a un valor de criterio.
Función DISTR.CHICUAD	Devuelve la función de densidad de probabilidad beta acumulativa.
Función DISTR.CHICUAD.CD	Devuelve la probabilidad de una cola de distribución chi cuadrado.
Función INV.CHICUAD	Devuelve la función de densidad de probabilidad beta acumulativa.

Función	Descripción
Función INV.CHICUAD.CD	Devuelve la función inversa de probabilidad de una cola de distribución chi cuadrado.
Función PRUEBA.CHICUAD	Devuelve la prueba de independencia.
Función INTERVALO.CONFIANZA.NORM	Devuelve el intervalo de confianza de la media de una población.
Función INTERVALO.CONFIANZA.T	Devuelve el intervalo de confianza para la media de una población, usando una distribución t de Student.
Función COEF.DE.CORREL	Devuelve el coeficiente de correlación entre dos conjuntos de datos.
Función CONTAR	Cuenta cuántos números hay en la lista de argumentos.
Función CONTARA	Cuenta cuántos valores hay en la lista de argumentos.
Función CONTAR.BLANCO	Cuenta el número de celdas en blanco de un rango.
Función CONTAR.SI	Cuenta el número de celdas, dentro del rango, que cumplen el criterio especificado.
Función CONTAR.SI.CONJUNTO	Cuenta el número de celdas, dentro del rango, que cumplen varios criterios.
Función COVARIANZA.P	Devuelve la covarianza, que es el promedio de los productos de las desviaciones para cada pareja de puntos de datos.
Función COVARIANZA.M	Devuelve la covarianza de ejemplo, que es el promedio de las desviaciones de los productos para cada pareja de puntos de datos en dos conjuntos de datos.
Función DESVIA2	Devuelve la suma de los cuadrados de las desviaciones.
Función DISTR.EXP.N	Devuelve la distribución exponencial.
Función DISTR.F.RT	Devuelve la distribución de probabilidad F.
Función DISTR.F.CD	Devuelve la distribución de probabilidad F.
Función INV.F	Devuelve la función inversa de la distribución de probabilidad F.
Función INV.F.CD	Devuelve la función inversa de la distribución de probabilidad F.

Función	Descripción
Función PRUEBA.F.N	Devuelve el resultado de una prueba F.
Función FISHER	Devuelve la transformación Fisher.
Función PRUEBA.FISHER.INV	Devuelve la función inversa de la transformación Fisher.
Función PRONOSTICO	Devuelve un valor en una tendencia lineal. Nota: En Excel 2016, esta función se reemplaza por previsión. LINEAL como parte de las nuevas funciones de pronóstico, pero todavía está disponible para la compatibilidad con versiones anteriores.
Función PRONOSTICO.ETS	Devuelve un valor futuro en base a valores (históricos) existentes mediante la versión AAA del algoritmo de Suavizado exponencial (HTA).
Función PRONOSTICO.ETS. CONFINT	Devuelve un intervalo de confianza para el valor previsto en una fecha futura específica.
Función PRONOSTICO.ETS. ESTACIONALIDAD	Devuelve la longitud del patrón repetitivo que Excel detecta para la serie temporal especificada.
Función PRONOSTICO.ETS. ESTADISTICA	Devuelve un valor estadístico como resultado de la previsión de series temporales.
Función PRONOSTICO.LINEAL	Devuelve un valor futuro en base a valores existentes.
Función FRECUENCIA	Devuelve una distribución de frecuencia como una matriz vertical.
Función GAMMA	Devuelve el valor de la función gamma.
Función DISTR.GAMMA	Devuelve la distribución gamma.
Función DISTR.GAMMA.INV	Devuelve la función inversa de la distribución gamma acumulativa.
Función GAMMA.LN	Devuelve el logaritmo natural de la función gamma, G(x).
Función GAMMA.LN.EXACTO	Devuelve el logaritmo natural de la función gamma, G(x).

Función	Descripción
Función GAUSS	Devuelve un 0,5 menos que la distribución acumulativa normal estándar.
Función MEDIA.GEOM	Devuelve la media geométrica.
Función CRECIMIENTO	Devuelve valores en una tendencia exponencial.
Función MEDIA.ARMO	Devuelve la media armónica.
Función DISTR.HIPERGEOM.N	Devuelve la distribución hipergeométrica.
Función INTERSECCION.EJE	Devuelve la intersección de la línea de regresión lineal.
Función CURTOSIS	Devuelve la curtosis de un conjunto de datos.
Función K.ESIMO.MAYOR	Devuelve el k-ésimo mayor valor de un conjunto de datos.
Función ESTIMACION.LINEAL	Devuelve los parámetros de una tendencia lineal.
Función ESTIMACION.LOGARITMICA	Devuelve los parámetros de una tendencia exponencial.
Función DISTR.LOGNORM	Devuelve la distribución logarítmico-normal acumulativa.
Función INV.LOGNORM	Devuelve la función inversa de la distribución logarítmico-normal acumulativa.
Función MAX	Devuelve el mayor valor de una lista de argumentos
Función MAXA	Devuelve el valor máximo de una lista de argumentos, incluidos números, texto y valores lógicos
Función MAX.SI.CONJUNTO	Devuelve el valor máximo entre celdas especificado por un determinado conjunto de condiciones o criterios.
Función MEDIANA	Devuelve la mediana de los números dados.
Función MIN	Devuelve el valor mínimo de una lista de argumentos.
Función MIN.SI.CONJUNTO	Devuelve el valor mínimo entre las celdas de un determinado conjunto de criterios o condiciones.
Función MINA	Devuelve el valor mínimo de una lista de argumentos, incluidos números, texto y valores lógicos.

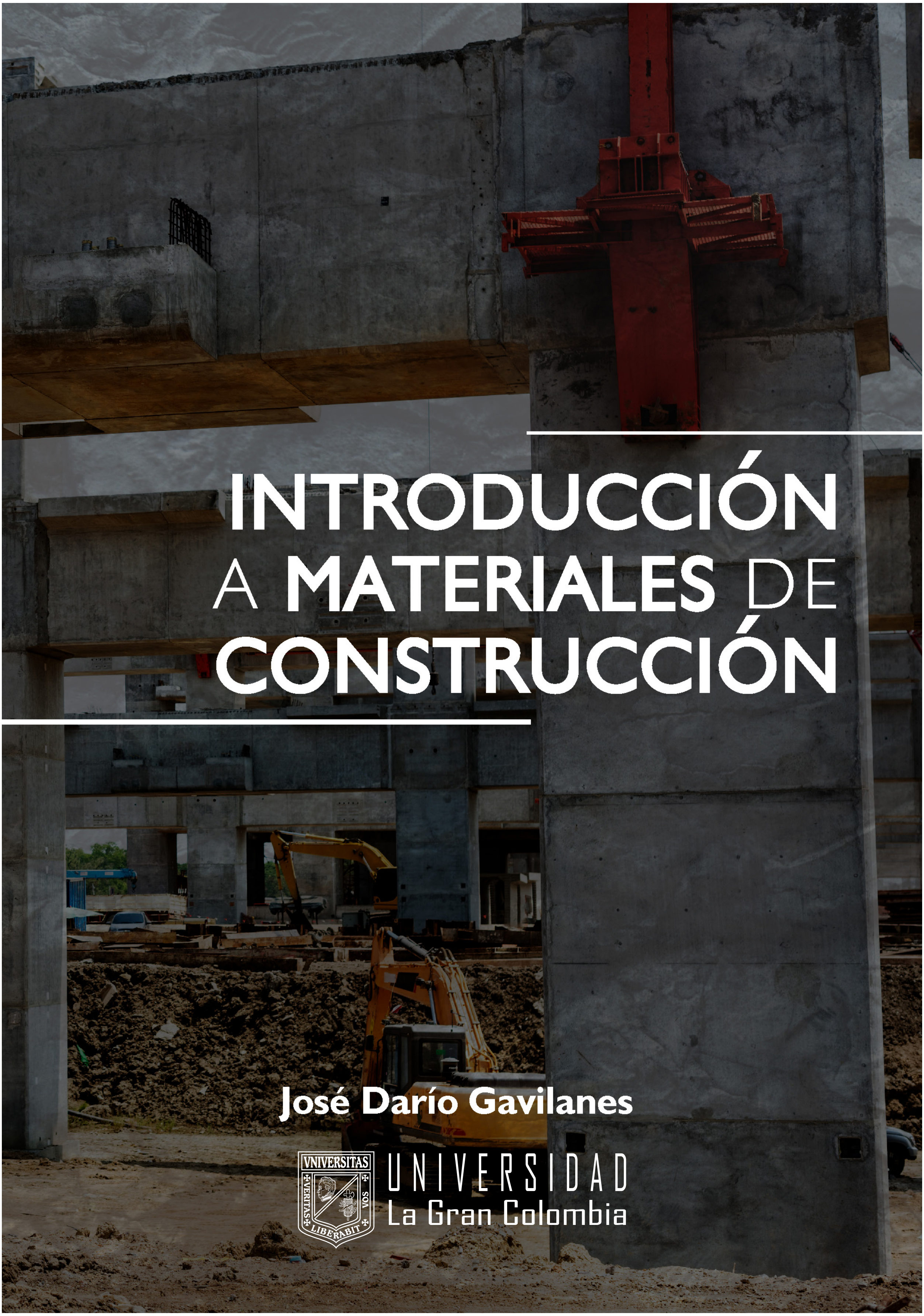
Función	Descripción
Función MODA.VARIOS	Devuelve una matriz vertical de los valores que se repiten con más frecuencia en una matriz o rango de datos.
Función MODA.UNO	Devuelve el valor más común de un conjunto de datos.
Función NEGBINOM.DIST	Devuelve la distribución binomial negativa.
Función DISTR.NORM.N	Devuelve la distribución normal acumulativa.
Función INV.NORM	Devuelve la función inversa de la distribución normal acumulativa.
Función DISTR.NORM.ESTAND.N	Devuelve la distribución normal estándar acumulativa.
Función INV.NORM.ESTAND	Devuelve la función inversa de la distribución normal estándar acumulativa.
Función PEARSON	Devuelve el coeficiente de momento de correlación de producto Pearson.
Función PERCENTIL.EXC	Devuelve el k-ésimo percentil de los valores en un rango, donde k está en el rango de 0 a 1, ambos no incluidos.
Función PERCENTIL.INC	Devuelve el k-ésimo percentil de los valores de un rango.
Función RANGO.PERCENTIL.EXC	Devuelve el rango de un valor en un conjunto de datos como un porcentaje (0 a 1, exclusivo) del conjunto de datos.
Función RANGO.PERCENTIL.INC	Devuelve el rango porcentual de un valor de un conjunto de datos.
Función PERMUTACIONES	Devuelve el número de permutaciones de un número determinado de objetos.
Función PERMUTACIONES.A	Devuelve la cantidad de permutaciones de una cantidad determinada de objetos (con repeticiones) que pueden seleccionarse del total de objetos.
Función FI	Devuelve el valor de la función de densidad para una distribución normal estándar.
Función POISSON.DIST	Devuelve la distribución de Poisson.
Función PROBABILIDAD	Devuelve la probabilidad de que los valores de un rango se encuentren entre dos límites.
Función CUARTIL.EXC	Devuelve el cuartil del conjunto de datos, basado en los valores percentiles de 0 a 1, exclusivo.

Función	Descripción
Función CUARTIL.INC	Devuelve el cuartil de un conjunto de datos.
Función JERARQUIA.MEDIA	Devuelve la jerarquía de un número en una lista de números.
Función JERARQUIA.EQV	Devuelve la jerarquía de un número en una lista de números.
Función COEFICIENTE.R2	Devuelve el cuadrado del coeficiente de momento de correlación de producto Pearson.
Función COEFICIENTE.ASIMETRIA	Devuelve la asimetría de una distribución.
Función COEFICIENTE.ASIMETRIA.P	Devuelve la asimetría de una distribución basado en una población: una caracterización del grado de asimetría de una distribución alrededor de su media.
Función PENDIENTE	Devuelve la pendiente de la línea de regresión lineal.
Función K.ESIMO.MENOR	Devuelve el k-ésimo menor valor de un conjunto de datos.
Función NORMALIZACION	Devuelve un valor normalizado.
Función DESVEST.P	Calcula la desviación estándar en función de toda la población.
Función DESVEST.M	Calcula la desviación estándar a partir de una muestra.
Función DESVESTA	Calcula la desviación estándar a partir de una muestra, incluidos números, texto y valores lógicos.
Función DESVESTPA	Calcula la desviación estándar en función de toda la población, incluidos números, texto y valores lógicos.
Función ERROR.TIPICO.XY	Devuelve el error estándar del valor de “y” previsto para cada “x” de la regresión.
Función DISTR.T.N	Devuelve los puntos porcentuales (probabilidad) de la distribución t de Student.
Función DISTR.T. 2C	Devuelve los puntos porcentuales (probabilidad) de la distribución t de Student.
Función DISTR.T.CD	Devuelve la distribución de t de Student.

Función	Descripción
Función INV.T	Devuelve el valor t de la distribución t de Student en función de la probabilidad y los grados de libertad.
Función INV.T.2C	Devuelve la función inversa de la distribución de t de Student.
Función PRUEBA.T	Devuelve la probabilidad asociada a una prueba t de Student.
Función TENDENCIA	Devuelve valores en una tendencia lineal.
Función MEDIA.ACOTADA	Devuelve la media del interior de un conjunto de datos.
Función VAR.P	Calcula la varianza en función de toda la población.
Función VAR.S	Calcula la varianza de una muestra.
Función VARA	alcula la varianza a partir de una muestra, incluidos números, texto y valores lógicos.
Función VARPA	Calcula la varianza en función de toda la población, incluidos números, texto y valores lógicos.
Función DISTR.WEIBULL	Devuelve la distribución de Weibull.
Función PRUEBA.Z	Devuelve el valor de una probabilidad de una cola de una prueba z.

Nota de la página web: Los marcadores de versión indican la versión de Excel en la que se presentó una función. Estas funciones no están disponibles en versiones anteriores. Por ejemplo, un marcador de versión de 2013 indica que esta función está disponible en Excel 2013 y en todas las versiones posteriores.

Tabla e información recuperada de https://support.office.com/es-es/article/funciones-estad%C3%ADsticas-referencia-624dac86-a375-4435-bc25-76d659719ffd.



INTRODUCCIÓN A MATERIALES DE CONSTRUCCIÓN

José Darío Gavilanes

UNIVERSIDAD La Gran Colombia

1. Introducción

Esta cartilla plantea de una forma sencilla los principales postulados de los materiales más utilizados en la actualidad: el cemento hidráulico, los agregados, el agua y constituyen sin duda la mayor parte de infraestructura de un país en cuanto a construcción, por lo cual son los insumos necesarios de edificios, hospitales, colegios, autopistas, calles, vías y carreteras.

A su vez, los ingenieros civiles y estudiantes de ingeniería deben involucrarse en el conocimiento de este tipo de materiales por cuanto forman parte de su quehacer diario, ya sean vistos desde el diseño o desde la construcción propiamente dicha. Los códigos de construcciones Sismo Resistentes y los enfocados en el diseño y en la construcción de vías los establecen e incorporan dentro de sus requisitos, adjuntando los procedimiento y alcances para cada material (concreto hidráulico).

Los estudiantes, después de leer y estudiar la cartilla, estarán en la capacidad técnica de evidenciar las características de calidad para materiales que van a utilizar en su vida profesional. De la misma forma, podrán evaluar de acuerdo con la normativa mencionada los parámetros específicos para aspectos físicos, químicos o mecánicos de los materiales mencionados.

Objetivo general de aprendizaje

Aplicar los conocimientos teórico-prácticos, principios físicos, químicos y mecánicos de los materiales descritos en la identificación, evaluación y verificación de componentes del concreto en obra.

Competencias a desarrollar

Competencia del saber. Comprende el uso de los materiales para el desarrollo de cualquier proyecto de construcción, analiza los componentes básicos de un concreto hidráulico.

Competencia del saber hacer. Aplica los conceptos señalados en la cartilla para el desarrollo de ensayos de laboratorio que impliquen el uso de los materiales de construcción señalados.

Competencia del saber ser. Reconoce los problemas que se pueden enfrentar de no utilizar los parámetros señalados en los materiales mencionados.

2. Generalidades de materiales de construcción

Los materiales de construcción han cambiado relativamente poco desde el comienzo de la humanidad; sin embargo, es pertinente conocer sus generalidades que comprenden un resumen de la evolución de materiales para construir a lo largo de la historia, los materiales de construcción en la actualidad y hacia dónde tienden los materiales en el futuro reciente. Finalmente, se esbozarán algunos aspectos básicos de metrología que componen el curso de Materiales de Construcción.

2.1 Historia de los materiales de construcción

Los materiales de construcción han estado presentes desde el inicio del ser humano, ligados a los conceptos de vivienda y casa. De acuerdo con Colavidas (2009), la vivienda va de la mano del desarrollo social, económico y político de la humanidad; el hombre primitivo orientaba en un principio su hogar en cuevas y cavernas naturales para resguardarse del medio ambiente y protegerse de animales salvajes que colocaban en peligro su supervivencia y la de su familia. Un gran cambio se logra con el advenimiento de la agricultura, que genera dentro del ser humano la transformación de hombre nómada a hombre sedentario, con lo cual se produce un cambio en la concepción del hogar, en un principio de tipo rudimentario con el uso de varas de arbustos como sistema estructural, unidas con cuerdas naturales de la misma naturaleza que cubrían con hojas o pieles de animales cazados para la fachada; este tipo de construcciones eran provisionales con muy poca durabilidad.

Luego, se establece el uso de la arcilla como recubrimiento y sistema estructural; el procedimiento era bastante básico e iniciaba con la mezcla de arcilla con agua para obtener un material moldeable que adquiriera la forma deseada por el constructor; finalmente se dejaba secar al aire libre. Este tipo de estructuras, aunque más durables, tenían serios problemas de durabilidad.

El siguiente material a ser utilizado fue la piedra, debido a su resistencia al intemperismo. Las primeras construcciones con este material fueron de tipo iglú, con un soporte en la parte del techo de madera. En la Figura 1, se presenta una estructura realizada en piedra y descubierta por antropólogos.

Figura 1. Estructuras realizadas con piedra

Fuente: Bea (s. f.).

Vale la pena mencionar que los constructores desde el comienzo de la humanidad se han preocupado por la durabilidad de materiales y estructuras donde cada vez más han desafiado sus límites y paradigmas en diseño y puesta en marcha de proyectos como rascacielos, estructuras de contención de agua o viaductos con varios kilómetros de longitud. En estas construcciones, se ha tratado de imitar las formas o características de estructuras naturales.

En épocas más recientes, hace aproximadamente 9000 años en zonas cercanas a Palestina, se elaboraban ladrillos de adobe, secados al sol (López, s. f.), mientras que en Mesopotamia, se realizaron las primeras cocciones de la arcilla con hornos artesanales. En la Figura 2, se presenta una imagen de las ruinas de la ciudad de Jericó.

Figura 2. Ruinas de la ciudad de Jericó

Fuente: Sobkowski (s. f.).

Finalmente, se introdujeron en el sector de la construcción los metales, las maderas tratadas, los hormigones o los concretos hidráulicos y los materiales sintéticos.

2.2 Materiales de construcción en el presente

En el presente, se siguen utilizando los materiales básicos como la piedra, la arcilla, la madera y el acero, sin embargo, desde mediados del siglo XIX, se ha fabricado un material que ha revolucionado el concepto de la construcción en todas las escalas, el concreto Pórtland hidráulico, cuyo uso ha permitido la construcción de diferentes estructuras que en siglos anteriores eran inimaginables, como rascacielos o megapuentes.

2.3 Materiales de construcción hacia el futuro

Los materiales de construcción han presentado diversos factores que se amplificarán en el futuro como los siguientes:

a. Las condiciones de instalación y de exposición cada vez más agrestes, rigurosas y complicadas tendiendo a romper los esquemas al realizar estructuras cada vez más altas como el Burj Khalifa o más largas como el gran puente de Danyang-Kunshan, por esto, los materiales deben tener mejores propiedades físicas, químicas y mecánicas que las que tienen en la actualidad.

b. Reciclaje de materiales: en diversos sitios del planeta en la actualidad se están agotando los materiales de las zonas de extracción, lo que ha incrementado el uso de materiales reciclables como agregados producto de escombros o demoliciones de antiguas construcciones como lo establece la especificación (Instituto de Desarrollo Urbano [IDU], 2006).

c. Se deberán realizar combinaciones de materiales que tengan las características físicas, químicas y mecánicas que exigen los códigos de Sismo Resistencia en el mundo. Esto debido a que los volúmenes de materiales solicitados por ciudades cada vez son mayores, a causa de que la población en los últimos años se ha incrementado. Según en el Banco Mundial (2019), la población mundial en 1960 era de 3,03 mil millones de habitantes, mientras que en 2017 era de 7,53 mil millones de habitantes. Esto indica que la población mundial ha aumentado en 2.48 veces en los últimos 57 años y que la proyección tiende a incrementar para los años venideros.

2.4 Clasificación de materiales

De acuerdo con Florián (2008), los materiales se pueden clasificar por su origen y propiedades en:

- Materiales pétreos. Son los materiales más utilizados desde el inicio de la humanidad, los constituye las rocas, arenas y arcillas que provee la naturaleza de forma fácil y en su superficie. En la actualidad, se utilizan como elementos decorativos o estructurales, tal como se evidencia en la Figura 3, (a) Sistema estructural soportado por piedra, (b) La piedra utilizada de aspectos decorativos.

Figura 3 (a) Sistema estructural en piedra (b) La piedra usada como decoración

Fuente: Elaboración propia.

- Materiales aglomerantes. Son los materiales que tienen la capacidad de adherir otros materiales, para crear nuevos materiales compuestos, entre ellos el cemento Pórtland hidráulico, el yeso, la cal, el asfalto. Se dividen en tres: a) aglomerantes hidráulicos, b) aglomerantes hidrocarbonatos y c) aglomerantes no hidráulicos. Los hidráulicos son los materiales que reaccionan en presencia de agua, como el cemento Pórtland o el cemento puzolánico; los hidrocarbonados requieren ser calentados para que desarrollen su potencial aglomerante, entre ellos los asfaltos, los plásticos reutilizados; y los no hidráulicos son elementos que no requieren grandes cantidades de agua para reaccionar, como la cal, el yeso y, en la actualidad, los geopolímeros que reaccionan a base de compuestos químicos, como hidróxidos.

- Materiales metálicos. En la industria de la construcción, los materiales metálicos se han implementado en los últimos años en elementos estructurales (concreto reforzado como estructura metálica), arquitectónicos (fachadas o mobiliario) y de insumos, como el caso del estaño. Los principales metales junto con algunas mezclas son los siguientes: hierro, acero, aluminio, plomo, cobre, bronce, estaño.

- Materiales orgánicos. Los materiales orgánicos se refieren a los materiales que contienen células vegetales o animales, es decir, fabricados por la naturaleza, que pueden tener algún grado de industrialización. Para el caso de la construcción, los asociamos, de acuerdo con (Silven, 2011), a madera, bambú, aislamiento de celulosa, pinturas naturales, aceites o ceras naturales, que pueden ser utilizados como elementos estructurales, no estructurales, de fachada o decorativos.

- Pinturas. Según Florián (2008), las pinturas son mezclas líquidas generalmente de colores, aplicadas por extensión o inmersión que protegen materiales estructurales o no estructurales, y a su vez los decoran. Son formadas por pigmentos sólidos y aglutinantes que son líquidos y les da la propiedad dispersiva sobre la superficie; una vez secos mantienen unidas las partículas entre sí. Se pueden clasificar por color y naturaleza de pigmentos; de acuerdo con Ibáñez (s. f.), los principales componentes químicos de pigmentos para pintura son el carbón, el calcio, óxido de aluminio, óxido férrico, óxido de hierro, dolomita, ácido carmínico, entre otros. Los pigmentos vegetales se clasifican en azoicos, antraquinona, tioíndigo, ftalocianina, quinacridona, isoindolinona, perileno, azoicos de condensación, dioxacina y perinona (Alonso, 2013); y finalmente por aglutinante (pinturas a base de agua o de aceite) o por el papel que desempeñan (decorativas, antioxidantes y lavables).

- Materiales artificiales. De acuerdo con Florián (2008), son sustancias de origen orgánico que son producidas por medios químicos, capaces de adquirir forma por el calor y por la presión para después conservar su gran resistencia mecánica. Los ejemplos típicos son cauchos (granulados, pulverizados, en láminas), hule natural o de policloropreno (Neopreno), y geosintéticos.

2.5 Metrología para materiales de construcción

La metrología aplicada a los materiales de construcción se aplica en Colombia a través de la NTC 1000. En este aparte, se realizará un resumen de esta norma técnica colombiana.

El objeto de esta norma es describir el Sistema Internacional de Unidades, recomendar el uso de múltiplos y submúltiplos seleccionados del Sistema Internacional (SI), dar algunas otras unidades que se pueden utilizar con el SI y definir las unidades básicas del SI.

Unidades básicas:

Tabla 1. Unidades básicas del SI

Magnitud	Unidad básica SI	Símbolo
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Tiempo	Segundo	s
Corriente eléctrica	Amperio	A
Temperatura termodinámica	Kelvin	K
Cantidad de sustancia	Mol	mol
Intensidad luminosa	Candela	cd

Fuente: Instituto Colombiano de Normas Técnicas y Certificación (Icontec, s. f., p. 2).

Unidades derivadas. Las unidades derivadas se expresan algebraicamente según las unidades básicas. Sus símbolos se obtienen por medio de los signos matemáticos de multiplicación y división; un ejemplo es la unidad del SI para la velocidad, que es metro por segundo (m/s).

Múltiplos de las unidades del SI. Los prefijos indicados en la Tabla 2 se usan para formar los nombres y los símbolos de los múltiplos de las unidades del SI.

Tabla 2. Prefijos indicados para el SI

Año	Factor	Valor en número	Prefijo	Símbolo
1991	10^{24}	1 000 000 000 000 000 000 000 000	yotta	Y
1991	10^{21}	1 000 000 000 000 000 000 000	zetta	Z
1975	10^{18}	1 000 000 000 000 000 000	exa	E
1975	10^{15}	1 000 000 000 000 000	peta	P
1960	10^{12}	1 000 000 000 000	tera	T
1960	10^{9}	1 000 000 000	giga	G
1960	10^{6}	1 000 000	mega	M
1795	10^{3}	1 000	kilo	k

1795	10^2	100	hecto	h
1795	10	10	deca	da
	10^0	1		
1795	10^{-1}	0.1	deci	d
1795	10^{-2}	0.01	centi	c
1795	10^{-3}	0.001	mili	m
1960	10^{-6}	0.000 001	micro	
1960	10^{-9}	0.000 000 001	nano	n
1960	10^{-12}	0.000 000 000 001	pico	p
1964	10^{-15}	0.000 000 000 000 001	femto	f
1964	10^{-18}	0.000 000 000 000 000 001	atto	a
1991	10^{-21}	0.000 000 000 000 000 000 001	zepto	z
1991	10^{-24}	0.000 000 000 000 000 000 000 001	yocto	y

Fuente: Modificado de Icontec (s. f.).

Reglas para el uso de los símbolos de las unidades:

- Se deben imprimir en letra tipo romana (rectos, independiente del tipo utilizado en el resto del texto).
- No tienen plural ni se les coloca punto final, excepto para puntuación final.
- Se escriben después del valor numérico y el símbolo de la unidad.
- Los símbolos de las unidades se escriben con minúsculas, excepto cuando el nombre de la unidad se deriva de un nombre propio; en este caso, la primera letra se escribe con mayúscula.
- Cuando una unidad compuesta está representada por la multiplicación de dos o más unidades, esto se puede indicar de la siguiente forma: N m N m

Tabla 3. Unidades utilizadas con el SI

Magnitud	Unidad	Símbolo	Definición
tiempo	minuto hora día	min h d	1 min = 60 s 1 h = 60 min 1 d = 24 h
ángulo plano	grado minuto segundo	° ' "	1° = (π/180) rad 1' = (1/60)° 1" = (1/60)'
volumen	litro	l, L[1)]	1 l = 1 dm^3
masa	tonelada[2)]	t	1 t = 10^3 kg

1) Los dos símbolos para litro son equivalentes. Sin embargo, el CIPM hará un estudio sobre el desarrollo de los dos símbolos con el propósito de ver si uno de los dos se puede suprimir.

2) También denominada tonelada métrica en el idioma inglés.

Fuente: Icontec (s. f.).

2.6 Resumen gráfico

2.7 Actividades de apropiación

¿Qué son materiales pétreos, aglomerantes y metálicos?

¿Qué materiales se han utilizado desde que el hombre es nómada?

Convierta 15.000 m a cm, km, Tm

Convierta 1.000.000 g, kg, mg, fm

2.8 Resolución de problemas

¿Por qué piensa que es importante para la sociedad tener un sistema de unidades, pesos y medidas?

2.9 Dilemas éticos

El uso de materiales de forma indiscriminada (tala de árboles, contaminación de agua, explotación de canteras de forma irresponsable) sin considerar aspectos sociales, ambientales y económicos crea problemas que se pueden evitar desde la concepción del proyecto, la explotación o tala del recurso. *El bienestar de la sociedad beneficiaria de los proyectos de infraestructura son la razón de ser de proveedores, diseñadores y constructores.*

3. El concreto hidráulico como material de construcción

En esta sección, se tratarán los aspectos básicos que debe conocer un estudiante de Ingeniería Civil o un constructor, ya sea este ingeniero, o arquitecto, y las características de los componentes del concreto hidráulico con base cemento Pórtland.

3.1 Historia del concreto hidráulico

De acuerdo con Kosmatka, Panarese y Bringas (1992), el concreto encontrado más antiguo se remonta a cerca de 7000 años a. C. al norte de Israel en Galilea; el área arqueológica se ha denominado Yiftahel. En la Figura 7, se presenta una fotografía del piso encontrado en la zona arqueológica al sur de Galilea.

Figura 4. Piso encontrado en Yiftahel (Galilea)

Fuente: Garfinkel (s. f.).

Otro hallazgo, que presenta uno de los primeros concretos en ser usados, se dio Serbia. De acuerdo con Niño (2014), se encontraron vestigios de un piso en chozas en un pueblo de la Edad de Piedra, cerca de la ribera del río Danubio, que datan de 5600 años a. C.

En la Figura 7, se presenta una fotografía de los fragmentos encontrados del contrapiso en Lepenski Vir (Servia), realizado en el Mesolítico y el Neolítico.

Figura 5. Piso encontrado en Lepenski Vir (Servia)

Fuente: Weigell (s. f.).

Más adelante se encuentra la pirámide de Gizeh realizada alrededor de 2690 a. C., cuyos bloques fueron pegados con mortero hecho de yeso calcinado y arena (Sánchez, 2001).

Luego, cerca de 500 a. C., en Grecia y Roma se produjeron morteros hechos con caliza calcinada y agua, los cuales se ha presumido que fueron base incluso de estructuras de los palacios de Crespo y Atala, finalmente se le adicionó a la mezcla de este mortero tejas rotas, piedra y ladrillo, lo cual dio origen a los primeros concretos (Niño, 2014). Fueron los romanos los que perfeccionaron el uso de puzolanas para ser activadas como material aglomerante, quienes cerca de 200 años a. C. extrajeron cenizas volcánicas que mezcladas con agua de mar generaron un material bastante resistente; el nombre de puzolana se debe a que el descubrimiento se realizó en

Puzol (Kosmatka, Panaresey Bringas, 1992). Luego de la caída del Imperio romano, las técnicas constructivas y de elaboración de cemento cayeron en desuso.

Solo 700 años después del imperio se intentó realizar nuevamente un aglomerado similar al concreto producido en Roma, para lo cual se utilizó un material similar (tipo toba volcánica) procedente de Tras Andernach que se encontró cerca del río Rin (Sanjuán y Chinchón, 2014). Luego de este intento por obtener un cemento resistente, la técnica no continuó, y en la época del oscurantismo los avances en materiales cementantes perdieron su fuerza. Sin embargo, se pueden mencionar algunas construcciones realizadas en materiales cementantes, como la cimentación de la Catedral de Salisbury, la Torre Blanca en Londres o la casa Moretón construida entre 1559 y 1580 (Niño, 2014).

La relevancia sobre el uso de materiales aglomerantes vuelve a tomar valor en Inglaterra cuando la Corona inglesa comisiona al ingeniero John Smeaton (conocido como el padre de la ingeniería inglesa), quien se preocupó por investigar diferentes materiales cementantes como las calizas, para construir por tercera vez el faro de Eddystone, canal de la Mancha, costa de Cornwall (Kosmatka, Panarese y Bringas, 1992).

En 1812, Joseph Vicat en Francia inicia investigaciones sobre las condiciones que dan origen a la hidraulicidad en las calizas, las cuales se endurecían con presencia de agua (Sanjuán y Chinchón, 2014). En 1824, el constructor Joseph Aspdin realizó investigaciones de manera empírica en las que utilizó tres partes de piedra caliza por una parte de arcilla, las que calcinó y finalmente pulverizó; en este trabajo se dio la primera patente de cemento Pórtland (Sanchez, 2001). Sin embargo, no se conoció la forma en la cual se produjo el cemento y solo hasta mediados del siglo XIX Isaac Johnson a través de investigación alcanzó a perfeccionar el cemento Pórtland; logró subir la temperatura a más de 800 ºC, con lo cual se formó por primera vez clínker: ya para 1850 en Francia se realizaban exposiciones de barcos fabricados en concreto. El siguiente gran hallazgo se realizó por parte de un jardinero llamado Jack Monier, quien elaboró materas en concreto y les aplicó un refuerzo de alambre para brindarle más rigidez al nuevo material, lo cual resultó en fabricar por primera vez concreto reforzado (Sánchez, 2001).

Para finales del siglo XIX, la producción de cemento se incrementó, en gran medida por los fenómenos de la industrialización en Inglaterra, Francia y Alemania. En 1868, se realizó el primer embarque de cemento hacia los Estados Unidos y para 1871 se inició la producción en América en la planta de Coldplay, en Pensilvania, para luego expandirse por Centroamérica y Suramérica (Kosmatka et al., 1992).

Para Colombia, la producción se inició en 1905 con la planta de Cementos Samper ubicada en la ciudad de Bogotá que para 1910 producía 10 toneladas/día (Sánchez, 2001), y para mediados del siglo XX se expandió por todo el país, de modo que son los ejes de desarrollo la Costa Atlántica, los Santanderes, los departamentos de Antioquia, Boyacá, Tolima, el Valle del Cauca y Cundinamarca, con su mayor producción en Bogotá.

3.2 Generalidades del concreto hidráulico

El concreto hidráulico en la actualidad se compone básicamente de cemento Pórtland, agua, aire, agregados (gruesos y finos) y aditivos.

El cemento es el material aglomerante o el adhesivo de los demás elementos constitutivos del concreto; según su fabricación, molienda y adiciones, puede formar el comportamiento físico, químico y mecánico a lo largo del tiempo. El cemento más utilizado es el Pórtland, el cual debe su nombre a la zona en Inglaterra donde se encontraron las materias primas para fabricar por primera vez este material hecho de caliza, arcilla sometida a grandes temperaturas y adiciones de cal.

El agua es el material que cataliza el proceso físico-químico del cemento (pasta de cemento), con lo cual se originan los procesos de hidratación que posteriormente son los responsables de formar la resistencia mecánica dentro de la pasta de cemento.

El aire está presente de dos formas: la primera como aire atrapado a través de la mezcla mecánica realizada a los elementos que conforman el concreto y la segunda de manera adicionada con la utilización de incorporadores de aire que son pequeñas burbujas de diámetro de micras que ayudan en la trabajabilidad del concreto en estado fresco, la resistencia del concreto a cambios drásticos de temperatura y evitar cambios volumétricos en las secciones y los volúmenes de concreto.

Los agregados gruesos y finos son los componentes con los que más cuenta el concreto, están alrededor del 70 %, constituidos por gravas o agregado grueso y arenas o agregado fino. No se deben confundir con la denominación de suelos finos que son materiales que pasan el tamiz o la malla micras 74 o 0,074 micras.

Los aditivos son materiales con la capacidad de modificar las propiedades físicas, químicas, mecánicas o biológicas en un concreto. El uso de este tipo de elementos se condiciona a la clase de concreto que se requiere en obra.

Concreto simple es el concreto realizado con cemento Pórtland, agregados, aditivos, agua y aire.

Concreto reforzado es el concreto simple que tiene un refuerzo en su interior de acero u otro elemento que le proporciona las características necesarias para soportar esfuerzos a tensión.

3.3 El cemento

El cemento Pórtland es el material más importante dentro de la fabricación del concreto hidráulico, debido a que es el aglomerante principal (puede tener ayuda de otros materiales como puzolanas, ceniza volante o escoria de alto horno) que adhiere los demás materiales (agregados, aditivos, acero) componentes del concreto y del concreto reforzado.

2.3.1 Fabricación del cemento

La fabricación del cemento es una actividad de suma importancia para la ingeniería civil, el sector de la construcción en el mundo y también para la sociedad en general. Más del 70 % de las obras construidas en el mundo llevan este material, en cimentación, estructura, fachadas o cubiertas.

El proceso se inicia en canteras o zonas de extracción de materiales calcáreos (calizas) que pueden ser de duros a blandos de acuerdo con la geología de la zona donde se encuentre la cantera y, por otro lado, materiales arcillosos que le aportan al futuro cemento alúmina y sílice. Otros elementos adicionales que pueden presentarse son del óxido de hierro, óxido de magnesio, álcalis.

En la actualidad, existen dos tipos de fabricación del cemento por vía seca o por vía húmeda. Por vía seca se presenta cuando los materiales arcillosos son extraídos de canteras y por vía húmeda se da en la extracción de materiales arcillosos con alto contenido de humedad.

De acuerdo con Matallana (2018), el material extraído es llevado a la planta, donde en algunos casos se utilizan cables aéreos o bandas transportadoras, y en el caso de vía húmeda, por tubería (pastoductos).

Luego, se deja el material con un diámetro inicial promedio de 25 mm (calizas y arcillas por vía seca). Por otro lado, si se tiene la arcilla húmeda al punto de derretirse o deshacerse en agua, se somete a la acción de mezcladores para homogeneizarla constituyendo una lechada (Sánchez, 2001).

Se presenta luego la homogenización, que es el proceso de obtener la mezcla de los materiales de manera que se integren y formen un solo material. Para el caso de vía húmeda, se realiza por medio de cilindros con aspas llamados balsas que evitan que el material se sedimente (Niño, 2014). Por vía seca, los materiales se trituran hasta obtener tamaños finos los cuales se nombran harina cruda que ingresa en un cilindro llamado molino de crudo para ser secada (Kosmatka, Panarese y Bringas, 1992).

Después, la mezcla homogeneizada, en las proporciones indicadas, se ingresan al horno, el cual puede llegar a una altura de 150 m y con diámetros de 5-6 m (Sánchez, 2001). En esta etapa, la mezcla de materiales (caliza y arcillas), por medio de un aumento radical de la temperatura (entre 1450 °C y 1650 °C), experimenta cambios en su estructura químico-física, que en su fase líquida es de un tercio del peso del material ingresado al horno (Goma, 1979). Finalmente, y luego de su enfriamiento, se forma lo que se conoce como clínker.

Este proceso continúa con la fase de enfriamiento, que se caracteriza por pasar el nuevo material por parrillas que bajan la temperatura de forma brusca por medio de aire frío (no hay presencia de agua). Se realiza de este modo, para que no se genere periclasa.

Finalmente, se procede a llevar el material a un molido denominado cuerpos moledores para pulverizar el clínker, se adiciona entre el 2 y el 5 % de yeso para regular la velocidad del fraguado. También se puede adicionar arcilla, ceniza volante, escoria de alto horno o puzolanas, cada una de estas dará características especiales (químicas, físicas y mecánicas) al cemento Pórtland.

2.3.2 Química del cemento

La química del cemento está orientada a entender los silicatos y aluminatos, que son los principales componentes. Comúnmente se utilizan abreviaturas como se muestra en la Tabla 5; sin embargo, el cemento continente más compuestos químicos que se presentan en la Tabla 4, donde se presenta los óxidos que componen el cemento.

Los principales componentes del cemento son silicato tricálcico (3CaOSiO2), silicato dicálcico (2CaOSiO2), aluminato tricálcico (3CaOAl2O3) y ferroaluminato tetracálcico (4CaOFe2 O3 Al2O3).

Tabla 4 Compuestos químicos del cemento Pórtland

Nombre del óxido	Fórmula	Abreviatura
Óxido de calcio	CaO	C
Dióxido de silicio	SiO2	S
Óxido de aluminio	Al2O3	A
Óxido férrico	Fe2O3	F
Agua	H2O	H
Óxido de magnesio	MgO	M
Trióxido de azufre	SO3	s
Óxido de potasio	K2O	K
Óxido de sodio	Na2O	N
Óxido de litio	Li2O	L
Óxido de fósforo	P2O5	P
Óxido de hierro	FeO	f
Óxido de titanio	TiO2	T

Fuente: (Sánchez, 2001, p. 35)

Tabla 5. Abreviaturas de compuestos del cemento Pórtland

Nombre	Abreviatura
Silicato tricálcico	C3S
Silicato dicálcico	C2S
Aluminato tricálcico	C3A
Ferritoaluminato tetracálcico	C4AF

Fuente: Niño (2014, p. 29).

Los principales compuestos del cemento son responsables de las características físicas y mecánicas del concreto en estado fresco y en estado endurecido. Se presenta en la Tabla 6 la variación de porcentaje de cada compuesto para el desarrollo de propiedades físico-mecánicas dentro del concreto por efectos del cemento.

Ahora bien, las composiciones químicas brindan determinadas características al cemento de acuerdo con el transcurso del tiempo, a lo cual se le denomina fases. Se pueden distinguir cuatro según (Castañón, García, Guerrero y Gómez, 2012):

Fase alita o silicato tricálcico (3CaO.SiO2), con composición mineralógica del 60 %, es el compuesto mayoritario del clínker; por consiguiente, define el mayor porcentaje de características mecánicas del cemento a edades tempranas (inicio de reacciones químicas a fraguado inicial).

Fase belita o silicato dicálcico (2CaOSiO2), con composición mineralógica del 20 %, reacciona lentamente con el agua, aporta a las resistencias del cemento a largo plazo después de 7 días.

Fase aluminato o aluminato (3CaOAl2O3), con composición mineralógica del 6 %, contribuye a las resistencias iniciales junto con un alto calor de hidratación.

Fase ferreto o ferroaluminato tetracálcico (4CaOFe2 O3 Al2O3), con composición mineralógica del 12 %, disminuye la temperatura.

Finalmente, existen otros compuestos que aportan hasta el 6 % (según el tipo de geología en la zona de explotación de canteras).

Sin embargo, todos los cementos del medio colombiano deben cumplir con la NTC 321. En la Figura 6, se muestran los requisitos químicos que debe cumplir un cemento Pórtland.

Figura 6. Requisitos químicos del cemento Pórtland

	Tipo 1	Tipo 1M	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4a)	Tipo 5a)
Dióxido de silicio (S_1O_2), mín %	-	-	21,0	-	-	-
Óxido de aluminio (Al_2O_3), máx %	-	-	6,0	-	-	-
Óxido de hierro (Fe_2O_3), máx %	-	-	6,0	-	6,5	-
Óxido de magnesio (MgO), máx %	7,0	7,0	7,0	7,0	7,0	7,0
Trióxido de azufre (SO_3), máx %	3,5	3,5	-	4,5	-	-
Pérdida al fuego, máx %	-	5,0	4,0	4,0	3,5	4,0
Residuo insoluble, máx %	-	4,0	3,0	3,0	3,0	3,0
Silicio tricálcico (3CaO. S_1O_2)[b)] , máx %	-	-	-	-	35,0	-
Silicato dicálcico (3CaO.S_1O_2)[b)] , mín %	-	-	-	-	40,0	-
Aluminato tricálcico (3CaO. Al_2O_3)[b)], máx %	-	-	8,0	15,0[c)]	7,0	5,0
(3CaO. S_iO_2) + (3CaO.Al_2O_3), máx %	-	-	58,0[d)]	-	-	-
Ferrialuminato tetracálcico más el doble de aluminato tricálcico [b)] (4CaO. Al_1O_3. Fe_2O_3) + 2 (3CaO. Al_2O_3), o solución sólida (4C_2O. Al_2O_3. Fe_2O_3 + 2 CaO. Fe_2O_3) el que es aplicable, máx %	-	-	-	-	-	20,0

Fuente: Icontec (1982, p. 2).

La Figura 6 muestra que la NTC 321 establece los tipos de cemento que deben cumplir con algunos requisitos para ser aceptados. En la Tabla 6, se muestran los rangos de composición química en porcentaje para los cuatro compuestos básicos del cemento Pórtland.

Tabla 6, Valores típicos de los compuestos de diferentes cementos Pórtland

Cemento	Composición química en %			
Pórtland	C3S	C2S	C3A	C4AF
Tipo 1	48	27	12	8
Tipo 2	40	35	5	13
Tipo 3	62	13	9	8
Tipo 4	25	50	5	12
Tipo 5	38	37	4	9

Fuente: Niño (2014, p. 31).

Por tanto, de acuerdo con cada tipo de obra a realizar, se puede considerar el uso de alguno de los cinco tipos de cemento mostrados, los cuales según sus dosificaciones y compuestos tendrán diferentes características químicas, físicas y mecánicas en estado fresco y en estado endurecido.

2.3.3 Propiedades físico-mecánicas del cemento

Las propiedades físicas del cemento se van modificando al producirse las reacciones químicas; cuando interactúa el cemento y el agua de mezclado, se produce la pasta de cemento. Al entrar en contacto el cemento con agua, se aumenta la temperatura a nivel microscópico, lo que origina cambios físicos en el cemento, denominado calor de hidratación. Este efecto físico-químico crea pequeños cristales que se van adhiriendo entre sí y forman con el tiempo el aglomerante que conocemos como pasta de cemento Pórtland endurecida (Neville, 2013).

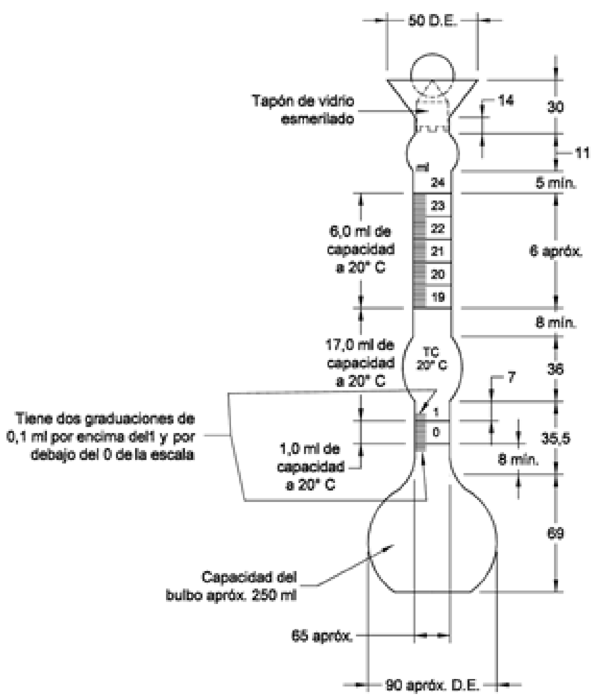
Las propiedades físicas del cemento varían de acuerdo con dos aspectos básicos: primero, el tipo de cemento debido a que las adiciones o compuestos químicos causan características específicas, como se mencionará más adelante; segundo, según el tipo de grano final de cemento, que puede ser fino o grueso. Un grano fino va a tender a hidratarse más rápido, por consiguiente, el cambio de propiedades físicas y mecánicas van a ser más rápidas que en otros cementos donde la hidratación se va a demorar más tiempo por efecto de la penetración que debe realizar el agua en el grano de cemento hasta llegar a su centro. Es pertinente mencionar que un grano más fino requerirá más tiempo de molido y por tanto mayor consumo de energía, lo cual aumenta el costo de producción de este tipo de cementos.

En el momento de inicio del calor de hidratación, se comienza el proceso de cristalización que tendrá dos fases: la primera se denomina gel inestable que termina con el fraguado del cemento, punto en el cual se genera un equilibrio químico en el concreto y, por consiguiente, se inicia la segunda fase denominada gel estable (Sánchez, 2001).

Las propiedades mecánicas varían de acuerdo con la hidratación del cemento con respecto al tiempo, es decir, que, en momento de la mezcla de cemento con agua, las propiedades mecánicas van a ser bastante pequeñas, y en la medida que se generen los cristales hidratados de silicatos y aluminatos, se va aumentando paulatinamente la resistencia mecánica de la pasta de cemento. Así, la principal característica mecánica evaluada en el concreto es la resistencia a la compresión, y de esta se infieren o desprenden las demás características mecánicas.

El peso específico está asociado con la densidad del cemento, y es la cantidad de masa de cemento por unidad de área, que comúnmente en laboratorio se mide en g/cm3; hasta principios del milenio el común era de 3.00 a 3.15 g/cm3, pero por efectos de consumo de energía, de gases contaminantes y producción a gran escala, la industria del cemento agrega adiciones al cemento que tienden a bajarle el peso específico, manteniendo e, incluso, aumentando las características químicas, físicas y mecánicas dentro de la pasta de cemento.

Figura 7. Esquema del frasco de Le Chatelier



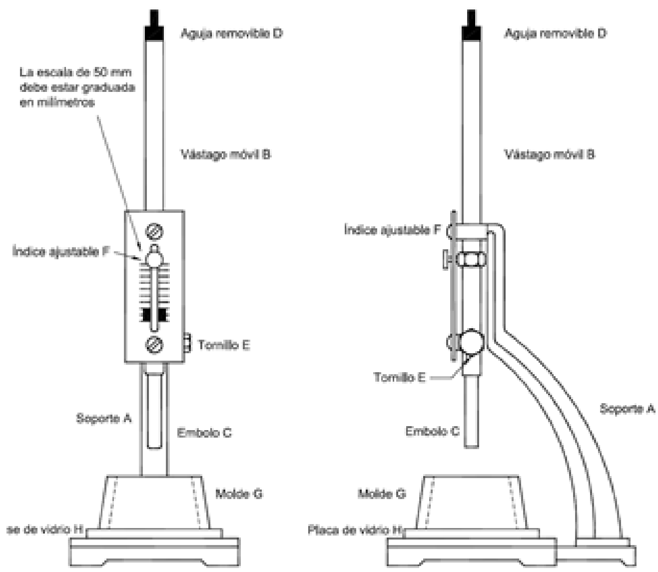
Fuente: Icontec (2017).

La superficie específica es una característica física del cemento condiciona la finura del cemento y, por tanto, el grado de calor de hidratación, el tiempo de hidratación y las características mecánicas de la pasta de cemento, y del concreto o mortero realizado. Cuanto más fino sea el grano de cemento, más superficie específica tendrá; de acuerdo con Matallana (2018), los cemento Pórtland suelen presentar valores superiores a 3000 g/cm3; y en cemento con adiciones este valor, puede aumentar entre 3400-5000 g/cm3.

La consistencia normal, según (Montejo et al., 2013), es la cantidad de agua indicada para una medida definida de cemento Pórtland que tiene como objetivo la totalidad de su hidratación, esto se mide teniendo como parámetro normalizado la fluidez del cemento. La norma que rige este procedimiento es la NTC 110.

En la Figura 8, se presenta el esquema del aparato manual de Vicat, de acuerdo con la NTC 110, donde se muestran las partes del equipo junto con sus nombres.

Figura 8. Esquema del aparato de Vicat



Fuente: Icontec (2019).

El fraguado del cemento se refiere, según (Neville 2013), al cambio del estado fresco a endurecido en la pasta de cemento, debido a la hidratación del $3CaOSiO_2$ (silicato tricálcico) y del $3CaOAl_2O_3$ (aluminato tricálcico), que va acompañado del aumento en la temperatura (calor de hidratación). La determinación del fraguado del cemento se realiza mediante el aparato de Vicat, donde se utiliza una aguja de 1 mm de diámetro estandarizada por la NTC 118 que penetra una muestra de pasta de cemento normalizada previamente (consistencia normal).

El fraguado inicial se encuentra cuando la aguja penetra hasta 25 mm la pasta de cemento normalizada, es decir, que corresponde al tiempo que transcurre para que la muestra sea traspasada por 2.5 cm o menos. El fraguado final se encuentra cuando la aguja deja una leve huella en la superficie de la pasta ensayada dentro del molde del aparato de Vicat.

Tanto el fraguado inicial como el final son importantes como propiedades físicas y mecánicas de la pasta del cemento, porque inciden directamente en el transporte, la colocación, el moldeado del concreto o el mortero en obra (Sánchez, 2001), sin tener efectos adversos, como daños mecánicos desarrollos de microfisuras o fisuras; o físicos, como cambios de volumen, apariencia, etc.

El falso fraguado es el desarrollo rápido de rigidez en una pasta pura de cemento, mortero u hormigón sin desarrollo de mucho calor, rigidez que puede ser eliminada con un remezclado (Hasen, 1962), que según Sánchez (2001) se presenta por la deshidratación total o parcial del yeso cuando se adiciona al clínker, debido a que los molinos pueden tener una temperatura mayor de 100 °C. Se determina de dos formas: por la NTC 118 y por la NTC 297.

El fraguado rápido o relámpago es el desarrollo rápido de rigidez de una pasta de cemento donde se presenta un aumento de calor, no se puede eliminar como en el caso del falso fraguado y se debe a reacciones tempranas de $3CaOSiO_2$ (silicato tricálcico) y del $3CaOAl_2O_3$ (aluminato tricálcico) del cemento (Hasen, 1962).

La resistencia: para la pasta de cemento no se utilizan normalmente ensayos de resistencia a compresión, flexión o tensión, debido a que los demás componentes de morteros o concretos influyen directamente en estas propiedades mecánicas, por tanto, es innecesario el uso de dichos ensayos. Sin embargo, cuando se requiere evaluar la pasta de cemento, se utiliza el ensayo de "determinación de la resistencia de morteros de cemento hidráulico usando cubos de 50 mm o 50,8 mm de lado" (NTC 220); dicho ensayo se realiza con arena estandarizada, que, para el caso de Colombia, es la arena normalizada del Guamo.

Estabilidad de volumen: los cementos, morteros y concretos normalmente tienen una contracción en volumen por efectos físicos producto de las reacciones químicas en su interior, debido a la finura del cemento y a la cantidad de agua utilizada. Este fenómeno se conoce como retracción que es cercana

al 0.015 % y ocurre en los primeros meses (2-3) por aspectos climáticos de la zona de implantación de la obra, que es la forma de curar el elemento construido. Dentro del concreto se pueden presentar expansiones debido a otros factores de los indicados, como la periclasa ya mencionada (MgO cristalino), a una deficiente molienda o a un proporcinamiento inadecuado de materias primas o a temperaturas insuficientes en la producción del clínker (Sánchez, 2001).

2.3.4 Tipos de cemento

De acuerdo con la NTC 30, en Colombia se presentan los siguientes tipos de cemento Pórtland y se indican los usos.

Cemento Pórtland tipo 1. Es para uso general, se utiliza en obras donde no se requiere características especiales, como construcción de edificaciones, andenes, pontones, etc.

Cemento Pórtland tipo 1 M. Es para uso general, sin embargo, la resistencia es mayor de la del tipo 1 por la presencia de adiciones.

Cemento Pórtland tipo 2. Es el destinado a obras de hormigón expuestas a la acción moderada de sulfatos y a obras donde se requiera moderado calor de hidratación. Como desventaja tiene que la resistencia se adquiere a edades tardías, se puede utilizar en obras como construcción de prefabricados para puentes, tuberías de concreto o muros de contención y placas de cimentación a gran escala.

Cemento Pórtland tipo 3. Alto calor de hidratación inicial, tiene como característica altas resistencias iniciales, pero muy poca resistencia a sulfatos, lo cual es pertinente analizarlo; tiende a ser parecido al tipo 1 en construcciones verticales (construcción industrializada) y construcción líneal donde no se tenga presencia de sulfatos o sulfuros.

Cemento Pórtland tipo 4. Bajo calor de hidratación, son concretos donde las temperaturas de calor de hidratación son bajas, por tanto, utilizados en obras donde se requiera gran contenido de concreto, como represas, presas, diques y muros de contención. Su desventaja es que las resistencias últimas se adquieren a edades tardías.

Cemento Pórtland tipo 5. Alta resistencia a sulfatos, su uso es recomendado para trabajar obras submarinas, en zonas costeras y en cimentaciones donde se detecta que el suelo contiene altos porcentajes de sulfatos y sulfuros con un nivel freático casi superficial que puede colocar en riesgo la estructura del concreto.

Cemento Pórtland Blanco. Su condición es similar a la del tipo 1, se obtiene por la selección de materiales que le confieren una colocación blanca, se utiliza en construcciones arquitectónicas.

Cemento Pórtland con incorporadores de aire. Son aquellos a los que se les adiciona un material incorporador de aire durante la pulverización. Los incorporadores de aire mejoran la trabajabilidad del concreto, aumentan la trabazón entre los diferentes tamaños de agregados y reducen la permeabilidad del concreto con lo cual aumenta la durabilidad del concreto o mortero.

Cemento Pórtland tipo 1-A. Es el tipo 1 con aire incorporado lo que le permite actuar en zonas climáticas con presencia suave de sulfatos y sulfuros.

Cemento Pórtland tipo 1 M-A. Es para uso general, sin embargo, la resistencia es mayor de la del tipo 1 por la presencia de adiciones y adicional de aire incorporado.

Cemento Pórtland tipo 2-A. Se utiliza en zonas costeras donde la presencia de sulfatos es suave o media.

Cemento Pórtland tipo 3-A. Se utiliza en obras generales donde se requiera mayor trabajabilidad, como construcciones industrializadas.

Estos ultimos (1A 1MA, 2A, 3A) son pocos utilizados en la actualidad por la incorporación en el mercado del aditivo incorporador de aire.

2.3.5 Ensayos del cemento

Los ensayos del cemento se indican para el caso colombiano en general en dos normas: las normas técnicas colombianas a las que hace referencia el Reglamento Colombiano de Construcción Sismo Resistente (NSR-10) y las normas del Instituto Nacional de Vías (Invías) que reglamentan las construcciones de vías (carreteables, fluviales, marítimas, ferroviarias).

Tabla 7. Listado de ensayos generales para el cemento

Ítem	Ensayo	Norma Técnica Colombiana
1	Cemento Pórtland. Clasificación y nomenclatura	NTC 30
2	Cemento Pórtland. Definiciones	NTC 31
3	Método para determinar la finura del cemento hidráulico por medio del aparato Blaine de permeabilidad al aire	NTC 33
4	Cementos. Extracción de muestras y cantidad de ensayos para cemento hidráulico	NTC 108
5	Método para determinar los tiempos de fraguado del cemento hidráulico por medio de las agujas de Gillmore	NTC 109
6	Consistencia normal del cemento hidráulico	NTC 110
7	Especificaciones para la mesa de flujo usada en ensayos de cemento hidráulico	NTC 111
8	Método de ensayo para determinar el calor de hidratación del cemento	NTC 117
9	Método de ensayo para determinar el tiempo de fraguado del cemento hidráulico mediante el aparato de Vicat	NTC 118
10	Cemento Pórtland. Especificación de desempeño para cemento hidráulico	NTC 121
11	Métodos de análisis químicos de los cementos hidráulicos	NTC 184

12	Método de ensayo para determinar la densidad del cemento hidráulico	NTC 221
13	Método para determinar el contenido de aire en morteros de cemento hidráulico	NTC 224
14	Método de ensayo para determinar la finura del cemento hidráulico por medio de los tamices (200) y (100)	NTC 226
15	Método de ensayo para determinar el fraguado rápido del cemento hidráulico (método de la pasta)	NTC 297
16	Cemento Pórtland. Especificaciones químicas	NTC 321
17	Método de ensayo para determinar la expansión potencial de morteros de cemento Pórtland expuestos a la acción de sulfatos	NTC 397
18	Cemento Pórtland. Blanco	NTC 1362
19	Ensayo químico para determinar la actividad puzolánica	NTC 1512

Fuente: Elaboración propia.

3.4 El agua en el concreto

El agua para el concreto hidráulico es un insumo fundamental debido a que es el catalizador de la pasta de cemento, es decir, es el responsable de hidratar las partículas de cemento para generar el material aglomerante de los demás elementos.

Dentro de la ejecución de un concreto o un mortero, existen varios tipos de agua, que, de acuerdo con la fase de hidratación y endurecimiento de la pasta, son esenciales para el buen funcionamiento del concreto con un todo compacto.

2.4.1 Agua de mezclado

Es el agua utilizada inicialmente para mezclar los componentes de mortero o concreto, se utiliza según los requerimientos y las guías para la ejecución del concreto o mortero, en un principio en base teórica, y luego ajustada a partir de la verificación de muestras en laboratorio.

El agua de mezclado se divide en agua de hidratación y agua evaporable.

2.4.2 Agua de hidratación

Es el agua necesaria para hidratar el cemento con el fin de que se desarrollen las reacciones químicas necesarias para crear los geles que finalmente formarán los cristales de la pasta endurecida.

De acuerdo con Sánchez (2001), el agua que se necesita para completar la hidratación es del 23 % resultado del agua de hidratación (kg) sobre el material cementante (kg).

Ecuación 1

$$\frac{(Agua\ de\ hidratación\ en\ (kg)}{(Material\ cementante\ en\ (kg)} * 100\% = 23\%$$

Fuente: Sánchez (2001).

2.4.3 Agua de evaporación

Es la parte de agua de mezclado que no hidrata el grano de cemento y que por el calor de hidratación generado en la pasta de cemento tiende a salir de la matriz del mortero o concreto.

Tiene lugar en tres espacios de longitud: el primero se denomina agua de adsorción, definida como el agua atraída en moléculas o iones a la superficie de los granos de cemento en procesos de hidratación; se presenta de 0 a 3 nm (Sánchez, 2001). El segundo espacio se compone del agua capilar que es atraída por fuerzas intermoleculares que no le permiten salir de la matriz de concreto o de mortero, pero tampoco ingresar a hidratar los granos de cemento; se encuentran entre 3-10^6 nm. Finalmente, el agua libre es la que no se halla en influencia directa a las partículas de cemento y que sale a la superficie del concreto o mortero para unirse con el medio ambiente: según los factores ambientales, este tipo de agua puede aumentar o disminuir.

2.4.4 Agua de curado

La hidratación del concreto no solo se hace necesaria en las primeras horas cuando se presenta el calor de hidratación y la transformación de concreto en estado fresco a endurecido, sino que también es necesario seguir hidratando el concreto. Normalmente se establece como parámetro los primeros 7 días; sin embargo, dependerá de diferentes condiciones, como tipo de cemento, aditivos utilizados y condiciones climáticas. Aunque en obra se suelen realizar diversos métodos para curar las estructuras de concreto, el método más efectivo comprobado hasta el momento es el uso de agua.

El agua de curado puede ser del mismo tipo que el agua de mezcla, aunque se debe considerar que las aguas con contenidos de materia orgánica, cloro o algas pueden ocasionar problemas de apariencia; incluso los contenidos de Ca(OH)2 o hidróxido de calcio, pueden generar erosión superficial (Neville, 2013).

2.4.5 Ensayos para agua en el concreto

Para el uso de agua en el concreto, se pueden realizar dos tipos de ensayos: los primeros establecidos para obras pequeñas o medianas, que comúnmente se presentan en zonas apartadas de ciudades o municipios provistos con el servicio de agua potable; en dichas obras son de tipo comparativo, se utiliza la NTC 220, se realiza el ensayo con especímenes hechos con agua destilada y especímenes hechos con el agua a a utilizar en obra; el resultado de los ensayos no debe ser mayor del 10 % fallados a los 7 días.

El segundo tipo de ensayos son químicos, para agua potable se utiliza la NTC 880; sin embargo, es pertinente que para el uso del concreto no pasen de las concentraciones partes por millón (ppm) recomendadas en la Tabla 8.

Tabla 8. Concentración tolerable de impurezas para agua de mezcla

Tipo de impureza	Valor máximo recomendado
Ácidos inorgánicos (ácido sulfúrico)	10000 ppm
Aceite mineral (por masa de cemento)	2 %
Aguas con algas	No recomendable
Agua de mar * Para concreto no reforzado * Para concreto pretensado o reforzado	35000 ppm No recomendable
Agua sanitaria	20 ppm
Azúcar	500 ppm3
Carbonato de calcio y magnesio	400 ppm
Carbonatos y bicarbonatos de sodio y potasio	1000 ppm3
Cloruro de calcio	30000 ppm
Cloruro de magnesio	40000 ppm
Cloruros: *Estructuras con bajo potencial de corrosión y condiciones secas *Concreto pretensado *Estructuras con elementos galvanizados y de aluminio	20000 ppm 500 ppm 1000 ppm
Hidróxidos de potasio (por nada de cemento)	1,20 %
Hidróxidos de sodio (por nada de cemento)	0,50 %
Partículas en suspensión	2000 ppm
pH	6-8
Sales de hierro	40000 ppm
Sales de magnesio, estaño, zinc, cobre y plomo	500 ppm
Sulfato de magnesio	25000 ppm
Sulfato de sodio	10000 ppm
Sulfito de sodio	100 ppm

Fuente: Niño (2014).

3.5 Aire en el concreto

El aire dentro del concreto o mortero es un elemento perjudicial o benéfico de acuerdo con el tipo (atrapado o incorporado). Puede ser utilizado como adición en el cemento, como aditivo o atrapado en el proceso de mezclado.

Dentro del diseño de mezcla, se considera el volumen que aporta; sin embargo, su peso no se estima de importancia, comparado con el peso de los demás elementos constitutivos de concretos y morteros.

2.5.1 Aire atrapado

Es el aire que se atrapa por efectos del mezclado de los elementos que componen el concreto (cemento, agua, agregado fino, agregado grueso, aditivos). Depende en gran medida de la forma de mezclado, así es como se encontrará más aire atrapado en una mezcla realizada a mano comparada con una mezcla realizada de manera industrializada en tolvas mezcladoras.

Es perjudicial para el concreto debido a que sus diámetros pueden ser hasta de 2 mm, lo que conlleva porosidades en la estructura del concreto y por consiguiente pérdidas de resistencias.

2.5.2 Aire incorporado

Es el aire que intencionalmente se deja en la mezcla para hacer más trabajable en estado fresco el concreto, que adquiera más resistencia a cambios de secado y humedad, que ayude a controlar la fisuración y microfisuracion por efecto de cambios drásticos de temperatura.

2.5.3 Ensayos para aire en el concreto

- NTC 3791: Determinación microscópica de los parámetros del sistema de vacíos de aire en el concreto endurecido
- NTC 1028: Determinación del contenido de aire en concreto fresco. Método volumétrico
- NTC 1032: Determinación del contenido de aire en concreto fresco. Método volumétrico

- NTC 1926: Determinación de la masa unitaria, rendimiento y contenido de cemento y aire

3.6 Agregados en el concreto

Los agregados en el concreto constituyen un insumo fundamental en la realización de concreto y mortero, debido a que establecen aproximadamente entre el 65 y el 75 % del total del volumen, brindan propiedades físicas, químicas y mecánicas a la mezcla, lo cual condiciona estas características finales, y pueden afectar la durabilidad y el desempeño del concreto.

2.6.1 Generalidades de los agregados

De acuerdo con Niño (2014), es toda sustancia sólida que se añade al concreto o mortero, que es adherida por la pasta de cemento y que según su gradación, densidad, propiedades mecánicas, caracterización mineralógica dan propiedades específicas a la mezcla y así modifican parcial o sustancialmente las características que se logran con el cemento. Dentro de los aspectos fundamentales para los agregados, se encuentra la clasificación de estos, el ciclo de las rocas en los agregados de origen natural, las propiedades químicas,

físicas y mecánicas de las gravas y arenas, y los ensayos a considerar en el momento de caracterizar las gravas y arenas.

2.6.2 Clasificación de los agregados

Los agregados se pueden clasificar de acuerdo con su tamaño, procedencia y densidad, de modo que es el más utilizado para concretos normales el tamaño.

Clasificación por tamaño. Se tienen tres grandes grupos: agregados gruesos o gravas, agregado fino o áreas, y suelos finos fracción fina; estos se restringen de acuerdo con dos tamices que los separan: el tamiz 4.76 mm o comúnmente conocido como No. 4 y el tamiz 74 um (micras) o comúnmente conocido como No. 200. En la parte superior, la normativa colombiana establece que se pueden utilizar tamaños hasta de 125 mm (de acuerdo con la NTC 32), conocida como piedra rajona o bola. En la Tabla 9, se presenta la clasificación de tamaños en agregados.

Tabla 9. Clasificación de agregados por tamaño

Tamaño de las partículas en mm (tamiz) NTC	Tamaño de las partículas en pulgadas (tamiz) ASTM	Clase de agregado	Clasificación como agregado
<0,001	-	Coloide	Suelos finos
0,002-0,001	-	Arcilla	
0,002-0,074	200	Limo	
0,074-0,250	200-60	Arena fina	Agregado fino
0,250-1,00	60-18	Arena media	
1-4,76	18-4	Arena gruesa	
4,76-8,00	4-5/16”	Grava fina	Agregado grueso
8,00-16,0	5/16”-5/8”	Grava media	
16,0-32,0	5/8”-1 1/4”	Grava gruesa	
32,00-50,8	1 1/4”-2”	Canto	
50,8-125	2”-5”	Rajón-bola	

Clasificación por densidad. Los agregados se clasifican en livianos, normales y pesados, según la geología de la roca madre para el caso de agregados naturales. Esta clasificación es pertinente cuando se deben realizar concretos o morteros especiales que atiendan a especificaciones particulares. Los concretos livianos se utilizan en estructuras que se requieren con pesos pequeños o estructuras porosas, como los concretos porosos utilizados como bases drenantes y los concretos livianos utilizados como material estructural en edificaciones en el mundo concretos de nivelación. Por otro lado, los concretos que utilizan agregados; existen tambien los normales son utilizados para desarrollar concretos normales para cualquier tipo de obra. Los agregados pesados son utilizados en obras donde se requiere aislar cuartos especiales como salas de rayos X en hospitales donde se realicen trabajos que involucren radiación y en estructuras de concretos para anclaje o para construcción de muertos (Tabla 10).

Tabla 10. Clasificación de agregados por densidad

Clasificación del agregado	Masa unitaria aproximada (kg/m3)		Variedades más comunes de agregado	Ejemplos de uso
	del agregado	del concreto		
Liviano	480-1300	13-100	Pizarras expandidas, esquistos, escoria, arcilla	Concretos livianos estructurales
		500-1350		
Normal	1300-2000	2000-2500	Arena, grava, piedra triturada, clínker, escoria de fundición	Obras en concreto en general
Pesado	2000-5600	>2500	Barrita, limolita, magnetita, limadura de acero, hematita	Concreto para macizos de anclaje, para protección contra radiación

Fuente: Niño (2014).

Clasificación por su procedencia. Se pueden distinguir dos procedencias agregados naturales que se extraen de la superficie de la tierra, pueden ser en canteras o en lechos de río, cuerpos de agua, y los artificiales que son fabricados en laboratorios o desechados por otras industrias, como ejemplos (a) agregados hechos a base de arcilla mormorillonita hidratada y puesta en el horno, (b) la escoria de alto horno. En la Figura 9 (a), se muestra el agregado natural de cantera y en la Figura (b) la arcilla deshidratada.

Figura 9. Cantera de agregados (a) y agregado artificial (b)

Fuente: (a) Pxhere.com (s. f.) y (b) Pexels.com. (s. f.).

2.6.3 Ciclo de rocas y geología

La composición mineralogía de los agregados es una característica principal que se debe considerar sobre todo en la construcción de obras masivas o sensibles, como rascacielos, viaductos o represas donde la falla de los agregados puede conducir a serios problemas para la estabilidad de la estructura.

El ciclo de las rocas define en gran medida los tipos de materiales naturales que se utilizan como agregados para el concreto hidráulico y asfáltico, en materiales de relleno y afirmado.

Figura 10. Ciclo de rocas

Fuente: Velasco (2014).

Rocas ígneas. Son las originadas por efectos volcánicos: el magma producido en volcanes, luego de solidificarse y enfriarse, genera este tipo de rocas, cuyas características dependen de la zona donde se originan (intrusivas o extrusivas) y de las condiciones climáticas de la zona donde se producen.

Rocas sedimentarias. Son originadas por sedimentos de suelo que a través de erosión y transporte quedan expuestos a presiones y temperatura que logran formar materiales cementantes para aglomerar los suelos transportados.

Rocas metamórficas. Son producto de altas presiones junto con emanación de gases volcánicos y altas temperaturas, que producen que sedimentos, rocas ígneas y sedimentarias que cambian sus características físicas, químicas y mecánicas.

2.6.4 Propiedades químicas de los agregados

Reacción álcali-agregado (RAA). Es una reacción dañina para el concreto que tiende a generar variación de volumen expandiéndolo debido a microfisuras que posteriormente se va aumentando hasta generar agrietamientos. Se presenta en el gel de pasta de cemento próximo a los agregados grueso y ocurre por humedad y diferenciales de temperatura que junto a compuestos

químicos de los agregados reaccionan con los óxidos de potasio y sodio del cemento (Melo, 2014). Para la determinación química de la reactividad potencial se utiliza la NTC 175.

Reacción álcali-carbonato (ACR). Se presenta en agregados gruesos carbonatados que pueden estar constituidos de rocas dolomíticas, impuras o no, con presencia de arcillas y sílice. Se pueden producir en dos formas: la primera, que los agregados reaccionen con los álcalis presentes en los poros del concreto, creando expansiones de volumen y por consiguiente pérdida de resistencia y durabilidad; el segundo tipo es que reaccionen con la pasta de cemento provocando bordes sobresalientes en los agregados, que en ocasiones no son dañinos para el concreto (Segarra, 2005). Para determinar esta reacción, se puede medir con la ASTM C586 - 19.

Ataques sulfático. En la actualidad, no existe un consenso sobre los factores que originan los cambios del volumen en el concreto; sin embargo, se puede entender como un mecanismo que afecta la pasta de cemento y crea en el concreto estados de tensionamiento que no logra resistir el aglomerante y, por tanto, se presentan microfisuras que van aumentando, incluso, hasta generar fisuraciones (Segarra, 2005).

Epitaxia. Es la única reacción química beneficiosa para el concreto, se constituye en la mejora de adhrencia entre la pasta de cemento y algunos agregados calizos con el paso del tiempo.

2.6.5 Propiedades físicas de los agregados

Granulometría. Es la repartición de tamaños de una muestra de agregados que se determina por medio de un análisis granulométrico, que es fragmentar una muestra de agregado en fracciones de igual tamaño. El proceso de tamizaje debe cumplir con lo estipulado en la NTC 77, que indica también las masas mínimas a ser ensayadas de acuerdo con el tamaño del agregado.

El análisis granulométrico se realiza mediante tamices o malla (comúnmente la serie estándar) por donde se hace pasar la muestra del agregado; de acuerdo con el tamaño de cada agregado, va quedando atrapado en alguna de las mallas, posteriormente se pesa. La NTC 32 establece los requisitos para el tamaño y los tipos de alambre de cada tamiz.

Tabla 11. Tamices típicos para análisis granulométricos

Designación del tamiz			Tamaño de agregado
Estándar		Alternativo	
Sistema Internacional de medidas (mm)	Sistema Internacional de medidas	Sistema Imperial	
125 mm	125 mm	5”	Agregado Grueso
100 mm	100 mm	4”	
90 mm	90 mm	3 1/2”	
75 mm	75 mm	3”	
63 mm	63 mm	2 1/2”	
50mm	50mm	2”	
37,5 mm	37,5 mm	1 1/2”	
25 mm	25 mm	1”	
19 mm	19 mm	3/4”	
12,5 mm	12,5 mm	1/2”	
9,5 mm	9,5 mm	3/8”	
4,75 mm	4,75 mm	N°4	

2,36 mm	2,36 mm	N°8	Agregado fino
1,18 mm	1,18 mm	N°16	
0,600 mm	600 μm	N°30	
0,300 mm	300 μm	N°50	
0,150 mm	150 μm	N°100	
0,075 mm	75 μm	N°200	

Fuente NTC 32 pág. 4 - modificación propia

La presentación de los resultados de los análisis granulométricos se realiza de dos formas: por medio de la Tabla 12 y la figura 11.

Tabla 12. Resultado de análisis granulométrico

Tamiz (1)		Masa retenida	% retenido (3)	% retenido acumulado (4)	% pasa (5)
mm	pulg.	g (2)			
		X1	Y1	Z1	T1
		X2	Y2	Z2	T2
		X3	Y3	Z3	T3
		X4	Y4	Z4	T4
		X5	Y5	Z5	T1
		X6	Y6	Z6	T2
		XT	100%		

La columna 1 identifica la serie de tamices por las cuales se va a realizar el análisis granulométrico, se presenta en milímetros debido a que en Colombia rige el SI y en pulgadas en referencia a la norma original (ASTM) y debido a la facilidad de nombrar los tamices.

La columna 2 representa la masa retenida en cada tamiz, dato que se presenta en gramos.

La columna 3 es el porcentaje retenido, que se saca de la masa retenida en cada tamiz dividida en la masa total de la muestra multiplicada por 100.

Ecuación 2

$$\% \; Ret=(Xn/XT)*100=Yn$$

La columna 4 es la sumatoria de porcentaje de la columna (3).

Ecuación 3

$$\% \; Ret.acumulado=Y1+Y2+Y3+Yn=Zn$$

La columna 5 es el porcentaje total de la muestra (100 %) menos el porcentaje retenido acumulado (columna 4).

Ecuación 4

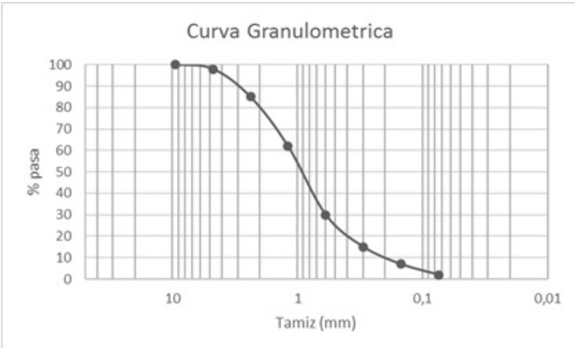
$$Tn=100- Zn$$

En la presentación de análisis granulométricos mediante gráfica, se toma la serie de tamices y el porcentaje pasa de los agregados. En el eje de las abscisas (x), se grafican los tamices en milímetros en escala logaritmica en el eje de las ordenadas (y) se escriben los valores de porcentaje para cada tamiz; en escala aritmética finalmente, se unen los puntos.

Las gráficas de análisis granulométricos son esenciales porque permiten conocer la gradación del material, es decir, qué tanto porcentaje por tamaño tiene una muestra. Una granulometría pobremente gradada origina problemas de segregación y exudación en el concreto, porosidad y, por consiguiente, poca durabilidad e incluso pérdidas de resistencia; se identifican por tener concentrado en pocos tamices la mayor cantidad de agregados. Por otro lado, una granulometría bien gradada es aquella que presenta un porcentaje

similar en cada uno de los tamices, por tanto, en la ejecución de concretos se entremezclan todos los tamaños y generan lo que se conoce como trabazón de agregados, lo cual redunda en buena resistencia, buena durabilidad y disminución de la porosidad del concreto.

Figura 11. Curva granulométrica



Tamiz (mm)	Porcentaje Pasa
9,51	100
4,76	98
2,38	85
1,19	62
0,595	30
0,297	15
0,149	7
0,074	2

Fuente: Elaboración propia.

Para el desarrollo de un análisis granulométrico, se deben considerar tres conceptos importantes que posteriormente se utilizan en los diseños de mezclas: tamaño máximo del agregado, tamaño máximo nominal y módulo de finura.

El tamaño máximo de un agregado es el último tamiz por donde pasa el 100 % de la muestra de ensayo.

El tamaño máximo nominal se define como el tamiz que le sigue en abertura mayor a la de aquel, cuyo porcentaje retenido acumulado es del 15 % o más (Gutiérrez, 2003).

El módulo de finura es la sumatoria de todos los porcentajes retenidos acumulados en los tamices que cumplen con la relación 1:2 divididos sobre 100. Se utiliza para la arena y comienza desde el tamiz 4.75 mm hasta el tamiz 150 mm (Matallana, 2018).

Superficie específica, cuanto menor tamaño tenga el agregado, mayor superficie especifica tendrá, a su vez, mayor consumo de pasta de cemento; es decir, que cuanto más pequeño sea el agregado, se necesitará mayor cantidad de cemento para cubrir su superficie.

Densidad o peso específico: la densidad del agregado es una característica física importante en la ejecución de los diseños de mezclas, que depende de la roca original. Para encontrar el peso específico, se requiere realizar laboratorios los cuales se guían con la NTC 237 y la NTC 176, donde se presentan tres tipos de densidad:

- Densidad absoluta, que es la masa sólida dividida en el volumen de esta.

- Densidad nominal, que es la masa sólida dividida en el volumen nominal (volumen de masa sólida + poros no saturables).

- Densidad aparente, que es la masa sólida dividida en el volumen aparente (volumen de masa sólida + poros saturables y no saturables).

Porosidad o absorción: esta propiedad física es importante para los agregados debido a que les brinda características para el uso en el concreto: cuanto más poroso sea, más va a tender a pocas resistencias, pueden ser más livianos. Para el caso de los agregados, se pueden tener cuatro estados:

- Completamente húmedo, que se logra sumergiendo la muestra del agregado a ensayar durante 24 horas en agua.

- Saturado superficialmente seco, que se presenta cuando se seca el material en superficie, pero al interior presenta un estado completamente húmedo.

- Seco al aire, este estado es el más variable de todos debido a que depende de la zona donde se encuentre; dentro del laboratorio se presenta cuando el agregado se seca parcialmente por efecto del clima, pero tiene un contenido de humedad en su interior.

- Seco completamente, este estado se logra sometiendo el agregado a una temperatura de 110 °C durante 24 horas.

Masas unitarias, definida como la cantidad de material (agregado) que puede ocupar un volumen determinado, se realiza mediante la NTC 92. Se determina como masa unitaria suelta y masa unitaria compacta.

Formas de las partículas, que depende de la roca donde se origina el agregado y de los mecanismos de transporte que ha sufrido (agregados de ríos o cuerpos de agua). Dentro del concreto esta característica permite que los agregados aporten resistencia a nivel microestructural a estados tensionales o que simplemente incremente dichos estados para la pasta de cemento. Así es como los agregados de forma irregular van a aportar mayor resistencia a la tensión del concreto, mientras que los agregados de forma escamosa o elongada no aportan a las resistencias de estos estados microtensionales en la matriz del concreto. En la Tabla 13, se presenta la clasificación realizada por la norma británica B.S.812.

Tabla 13. Clasificación de la forma de los agregados gruesos

Clasificación	Descripción
Redondeada	Totalmente desgastada por el agua o completamente limitada por frotamiento
Irregular	Irregular natural o parcialmente limitada por frotamiento y con caras redondeadas
Angular	Posee caras bien definidas que se forman en la intersección de caras más o menos planas
Escamosa	Material en el cual el espesor es pequeño en (laminar) relación con las otras dos dimensiones
Elongada	Material normalmente angular, en el cual la longitud es considerablemente mayor que las otras dos dimensiones
Escamosa y elongada	Material cuya longitud es considerablemente mayor que el ancho y este es considerablemente mayor que el espesor

Fuente: Niño (2014).

Texturas de las partículas, esta característica física de los agregados cumple junto con la forma un papel fundamental en la interacción entre pasta de cemento y agregado. La adherencia entre el cemento hidratado y el agregado depende de este aspecto, por lo cual, de no obtenerse una buena adherencia, el concreto falla por este aspecto, que en algunos casos puede ser por bajo a lo previsto en el diseño de mezclas. Se deben buscar esencialmente agregados que tengan texturas ásperas que generen una interacción en diferentes ángulos con la pasta de cemento y de este modo que se pueda apoyar la pasta de cemento en la estructura completa del agregado para soportar estados microestructurales. La Tabla 14 muestra la clasificación realizada por la norma B.S.812 con relación a la textura.

Tabla 14. Clasificación de texturas en agregados gruesos

Grupo	Textura superficial	Características
1	Vítrea	Fractura coloidal
2	Lisa	Desgastada por el agua o losa debido a la fractura de la roca laminada o de grano fino
3	Granular	Fractura que muestra granos más o menos uniformemente redondeados
4	Áspera	Fractura áspera de roca con granos finos o medianos que contienen partículas cristalinas no fácilmente visibles
5	Cristalina	Contiene partículas cristalinas fácil-mente visibles
6	Apanalada	Con poros y cavidades visibles

Fuente: Niño (2014).

2.6.6 Propiedades mecánicas de los agregados

Resistencia del agregado, que en cierta medida está definida por la roca madre; es pertinente conocer la resistencia de los agregados gruesos, debido a que de estos depende la resistencia final del concreto en estado endurecido; está estrechamente relacionada con las propiedades mineralógicas del agregado y su composición química. En la Tabla 15, se presenta la resistencia a compresión simple realizada a algunos tipos de roca.

Tabla 15. Resistencia a la compresión simple

Roca	Resistencia a la compresión kg/cm2
Gabro	150-300
Granito	70-250
Basalto	100-300
Diabasa	60-130
Dolomita	150-250
Caliza	10-70
Arenisca	20
Lutita	20-90
Gnesis	40-70
Mármol	50-80
Cuarcita	30-50
Esquisto	70-200

Fuente: Gutiérrez (2003).

Tenacidad que es la capacidad que tiene el agregado de acumular energía hasta su falla. En agregados gruesos, se presenta en estalla o microfusuración que se va incrementando hasta llegar a fisuraciones y agrietamientos. Depende de las propiedades químicas y mineralógicas de la roca madre y se evalúa en los arios para verificar la capacidad de absorber cargas de impacto.

Adherencia: Se presenta en la superficie de la roca que va a interactuar con el aglomerante; esta característica depende de la forma y textura de los agregados: una mayor capacidad de adherencia va a inducir mejores resistencias en el concreto.

Dureza, que es la propiedad de los agregados a resistir fuerzas de desgaste o abrasión sobreimpuestas a ellas, y se pueden identificar en diferentes obras como pavimentos, pisos de alto tráfico (estaciones para sistemas de transporte masivo), puentes peatonales y vehiculares, canales, etc. Comúnmente seestablece el desgaste con el ensayo de la máquina de los Ángeles, orientado en la NTC 93; otro ensayo establecido es la NTC 183.

2.6.7 Sustancias perjudiciales

Dentro de los agregados se pueden encontrar sustancias dañinas para el concreto, donde se puede afectar la resistencia, el tiempo de fraguado y la apariencia, o generar cambios volumétricos en el concreto.

Contenido de arcilla y material pasa 74 micras: los suelos finos son nocivos en el concreto debido a que afectan los tiempos de fraguado en el concreto; en especial las arcillas, crean a nivel microscópico condiciones de atracción de agua, lo que evita la fácil hidratación de los granos de cemento.

Las arcillas pueden encontrarse en agregados gruesos en formas de terrones o en pequeños granos que se confunden con el agregado grueso; sin embargo, en presencia de agua van a tender a desleírse. El contenido de material pasa um (micras) se mide con el ensayo de lavado sobre tamiz 200 indicado en la NTC 74 um (micras).

Partículas deleznables que hacen referencia a las partículas o a los materiales que se rompen fácilmente, se deslíen o disgregan; para el concreto, este tipo de partículas producen zonas de falla o puntos débiles donde puede variar considerablemente la resistencia del concreto. Se destacan terrones de arcilla, carbón o lignito.

La norma NTC 174 establece parámetros máximos que debe contener un concreto de terrones de arcilla: partículas deleznables, material pasa tamiz 75 um, carbón o lignito.

Tabla 16. Parámetros para partículas que se disgregan

Material	Máximo porcentaje del peso total de la muestra
Terrones de arcilla y partículas deleznables	3,0
Material que pasa el tamiz 75 μm (No. 200):	
Concreto sujeto a abrasión	3,0 (a)
Todos los demás concretos	5,0 (a)
Carbón o lignito:	
Donde la apariencia superficial del concreto sea de importancia.	0,5
Todos los demás concretos	1,0

Fuente: NTC 174.

Materia orgánica, que interfiere en los procesos de hidratación del concreto; por tanto cambia los tiempos de fraguado, principalmente, humus o marga orgánica (Neville, 2013). En ocasiones, puede generar manchas en las superficies del concreto y ocasionar problemas de tipo arquitectónico, e incluir cambios de resistencia en el concreto por falta de hidratación en los granos del cemento, lo que conlleva estados tensionales y microfisuras o fisuras. Se utiliza para su verificación el ensayo especificado en la NTC 127.

Contaminación salina, que se produce en arenas provenientes de playas, estuarios o zonas con alta concentración de sales, utilizadas en la construcción de estructuras de concreto reforzado, y que originan daños en el acero aumentando su volumen; este efecto ocasiona esfuerzo de tensión en el concreto que provoca pérdidas de resistencia, fisuración y agrietamientos en algunos casos.

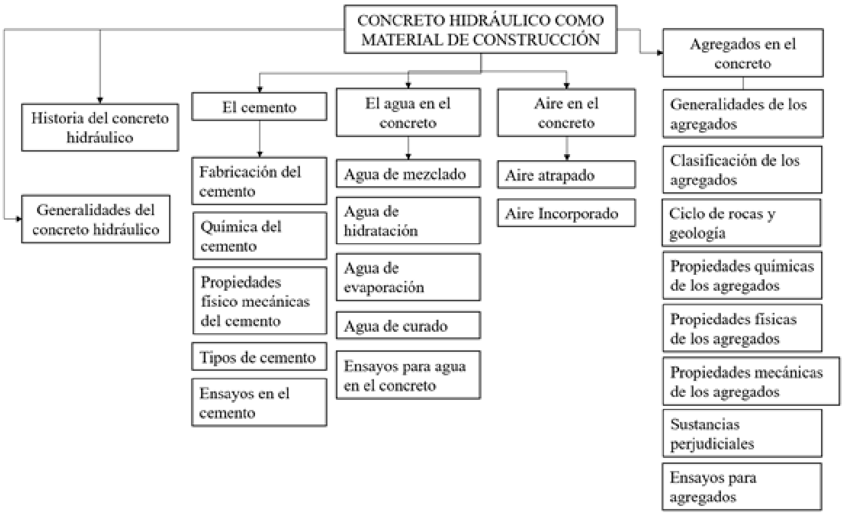
2.6.8 Ensayos para agregados

En la Tabla 17, se presentan los ensayos que normalmente se realizan para agregados.

Tabla 17. Ensayos para agregados

Grupo	Textura superficial	Características
1	Método de ensayo para determinar la resistencia al desgaste de agregados gruesos hasta de 37,5 mm, utilizando la máquina de los Ángeles	NTC 98
2	Determinación de la resistencia al desgaste de los agregados gruesos mayores de 19 mm, utilizando la máquina de los Ángeles	NTC 93
3	Método de ensayo para determinar el porcentaje de terrones de arcilla y partículas deleznables en los agregados	NTC 589
4	Método de ensayo para la determinación de partículas livianas en los agregados	NTC 130
5	Método para determinar la densidad y la absorción del agregado fino	NTC 237
6	Método para determinar la densidad y la absorción del agregado grueso	NTC 176
7	Método para determinar la dureza al rayado de los agregados gruesos	NTC 183
8	Determinación de la masa unitaria y los vacíos entre partículas de agregados	NTC 92
9	Método de ensayo para determinar la solidez (sanidad) de agregados para el uso de sulfato de sodio o sulfato de magnesio	NTC 126
10	Método para determinar por lavado el material que pasa el tamiz 75 m en agregados minerales	NTC 78
11	Método de ensayo para el análisis por tamizado de los agregados finos y gruesos	NTC 77
12	Método de ensayo para determinar por secado el contenido total de humedad de los agregados	NTC 1776
13	Método químico para determinar la reactividad potencial álcali-sílice de los agregados	NTC 175

3.7 Resumen gráfico



3.8 Actividades de apropiación

¿Qué función cumple en el clínker y posteriormente en el cemento el aumento hasta 1500 °C en la cocción?

¿El tipo de cemento varía de acuerdo con el cambio de porcentajes de compuestos químicos? Justifique su respuesta.

¿El agua se puede reemplazar por otro tipo de curado garantizando el 100 % de la hidratación de los granos de cemento?

¿En qué influencia la geología de las rocas madre en los usos de los agregados gruesos y finos?

3.9 Resolución de problemas

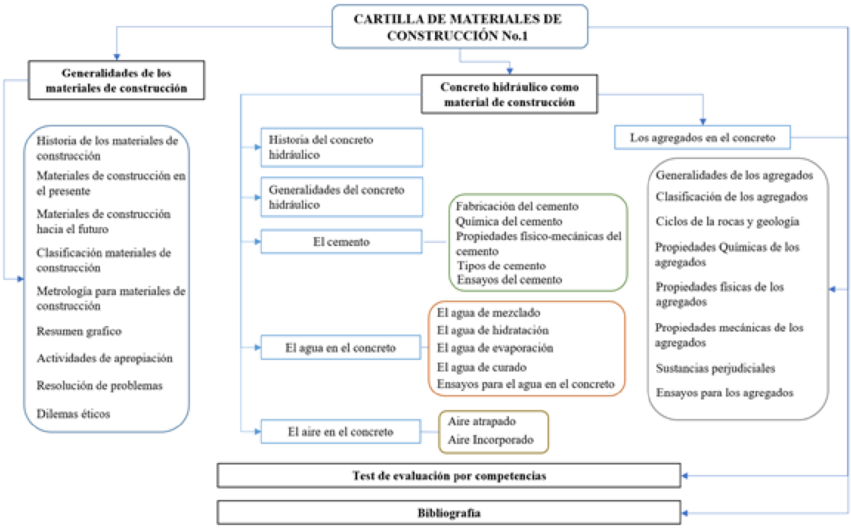
¿Por qué es importante los límites que especifican las NTC y códigos de construcción?

¿De dónde y por qué considera que se han realizado los procedimientos y las especificaciones de los ensayos?

3.10 Dilemas éticos

Según la Corporación Industrial Minuto de Dios (2018), la industria pesada, entre la cual se encuentra el cemento, es una de las actividades de más contaminación por $CO2$ en el mundo debido a las elevadas temperaturas en los hornos, que puede aumentar con malas prácticas de ensayos de laboratorio y usos indiscriminados de materias primas. En la actualidad, se colocan adiciones para mitigar este efecto. La contaminación del medio ambiente y el manejo adecuado de recursos naturales son responsabilidad de todos los involucrados en la industria y la cadena de la construcción, incluso el Gobierno y la sociedad civil.

4. Representación global



5. Test de evaluación por competencias

En la ciudad de Santa Marta, se está realizando una construcción de un edificio cerca del mar; sin embargo, el director y residente de obra tienen dudas sobre qué tipo de cemento se debe aplicar en la obra. Se recomienda utilizar cemento tipo V, porque:

a. Tiene las características químicas para soportar ataques de sulfatos y cloro provenientes del mar, que pueden afectar la estructura del refuerzo y el volumen del concreto.

b. Se debe especificar otro tipo de cemento como el tipo 2 o incluso el tipo 1M, debido a que las concentraciones de sustancias nocivas no son tan altas como para especificar concreto con cemento tipo 5.

c. Se debe realizar una combinación de cementos donde se verifique las concentraciones de sulfatos y cloruros en el suelo de fundación y de acuerdo con las concentraciones utilizar cemento tipo 5; para la estructura se debe establecer un cemento tipo 1M o 2M. O cemento de uso general con aire incorporado, previendo un buen procedimiento o compactación de concreto.

Se realiza una vía que involucra un tráfico alto de camiones pesados, se tienen dos tipos de agregados: el primero es de tipo redondeado y el segundo de tipo angular. De acuerdo con lo visto, se aconseja utilizar:

a. El agregado angular porque genera una mayor interacción entre el agregado grueso y la pasta de cemento, incluso aporta resistencia a esfuerzos microtensionales.

b. El agregado redondeado se acomoda mejor en la mezcla por cuanto brinda una mejor adherencia de partículas de todos los tamaños.

c. Una combinación de los dos tipos de agregados que aporte una mejor acomodación de los tamaños dentro del concreto y ayude a soportar estados microestructurales en la matriz del concreto.

Se realiza un puente vehicular cerca de la ciudad de Ibagué, donde se tiene la duda de si curar el concreto de la obra con aditivos y mantas, o regarlo constantemente con agua. de acuerdo con lo visto, se puede decir que:

a. El método de curado para una estructura de concreto más efectivo es mediante el riego constante de agua, debido a que ayuda a hidratar los granos no hidratados en las primeras fases del concreto en estado fresco.

b. Todos los métodos son válidos y ayudan a hidratar en la misma medida el concreto comparado con el agua de curado.

c. Se debe utilizar una combinación de métodos de curado entre mantas, aditivos y agua para cumplir con las especificaciones técnicas de una obra.

6. Referencias

Alonso Felipe, J. V. (2013). Pinturas, barnices y afines: composición, formulación y caracterización. Madrid, España: Universidad Politécnica de Madrid. Recuperado de http://oa.upm.es/39501/1/ControlCalidadPinturas.pdf

Banco Mundial. (2019). Población, total. Recuperado de https://datos.bancomundial.org/indicador/SP.POP.TOTL

Bea, I. (s. f.). Poblat talaiotic Menorca. Recuperado de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Torre_d %27en_Galm %C3 %A9s_3.jpg

Castañón García, A. M., García Granda, S., Guerrero, A. M. y Gómez Fernández, F. (2012). Estudio de las fases mineralógicas del clínker en una cementera española, utilizando el método de Rietveld. Dyna, 79(173), 41-47. Recuperado de https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/39292

Colavidas, F. (2009). La evolución histórica de la vivienda. Madrid, España: Universidad Politécnica de Madrid. Recuperado de http://oa.upm.es/49574/1/Urrutia_del_Campo_Nagore.pdf

Corporación Industrial Minuto de Dios. (2018, agosto 8). Energías limpias y sustentables. Recuperado de http://mdc.org.co/blog-i3-industrias-contaminantes/

Florián Méndez, A. (2008). Caracterización de la cantera para propagación de señales de RF (Tesis de grado, Universidad de las Américas Puebla, Puebla, México). Recuperado de http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/lem/florian_m_a/capitulo_2.html

Garfinkel, Y. (s. f.). Yiftahel structure with plastered floor. Recuperado de https://en.wikipedia.org/wiki/Yiftahel#/media/File:Yiftahel_structure_with_plastered_floor1.jpg

Goma, F. (1979). El cemento Pórtland y otros aglomerantes. Barcelona, España: Reverte.

Gutiérrez de López, L. (2003). El concreto y otros materiales para la construcción. Manizalez, Colombia: Universidad Nacional. Recuperado de http://bdigital.unal.edu.co/6167/5/9589322824_Parte1.pdf

Hansen, W. C. (1962). Fraguado rápido y falso fraguado en los cementos Pórtland. Materiales de Construcción, 12(107), 29-42. Recuperado de http://materconstrucc.revistas.csic.es/index.php/materconstrucc/article/viewFile/1833/2233

Ibáñez, A. F. (s. f.). Pigmentos, colorantes y tintes: una particular visión, IV. Recuperado de https://www.researchgate.net/profile/Adriana_Ibanez/publication/281716362_pigmentos_colorantes_y_tintes_V/links/55f5de3108ae63926cf4f0b0/pigmentos-colorantes-y-tintes-V.pdf

Instituto Colombiano de Normas Técnicas y Certificación. (s. f.). Norma Técnica Colombiana NTC 1000: Metrología Sistema Internacional de Unidades. Bogotá, Colombia: Autor.

Instituto Colombiano de Normas Técnicas y Certificación. (1982). NTC 321 Ingeniería civil y arquitectura. Cemento Pórtland. Especificaciones químicas. Bogotá, Colombia: Autor.

Instituto Colombiano de Normas Técnicas y Certificación. (1966). Norma Técnica Colombiana NTC 30. Cemento Pórtland. Clasificación y nomenclatura. Bogotá, Colombia: Autor.

Instituto Colombiano de Normas Técnicas y Certificación. (2004). Norma Técnica Colombiana NTC 880. Fósforos integrales. Bogotá, Colombia: Autor.

Instituto Colombiano de Normas Técnicas y Certificación. (2017). Norma Técnica Colombiana NTC 221 Ingeniería civil y arquitectura. Cementos. Método de ensayo para determinar la densidad del cemento hidráulico. Bogotá, Colombia: Autor.

Instituto Colombiano de Normas Técnicas y Certificación. (2017). Norma Técnica Colombiana NTC 118 Cementos. Método de ensayo para determinar el tiempo de fraguado del cemento hidráulico mediante el aparato de Vicat. Bogotá, Colombia: Autor.

nstituto Colombiano de Normas Técnicas y Certificación. (2017). Norma Técnica Colombiana NTC 118. Cementos. Método de ensayo para determinar el endurecimiento temprano del cemento hidráulico (método del mortero). Bogotá, Colombia: Autor.

Instituto Colombiano de Normas Técnicas y Certificación. (2017). Norma Técnica Colombiana NTC 297. Cementos. Método de ensayo para determinar el fraguado rápido del cemento hidráulico (Método de la pasta). Bogotá, Colombia: Autor.

Instituto Colombiano de Normas Técnicas y Certificación. (2017). Norma Técnica Colombiana NTC 220. Cementos. Método para determinar la resistencia a la compresión de morteros de cemento hidráulico usando cubos de 50 mm de lado. Bogotá, Colombia: Autor.

Instituto Colombiano de Normas Técnicas y Certificación. (2019). Norma Técnica Colombiana NTC 110. Cementos. Método para determinar la consistencia normal del cemento hidráulico. Bogotá, Colombia: Autor.

Instituto de Desarrollo Urbano. (2006, mayo 18). Reciclaje de pavimento asfáltico en el sitio con emulsión asfáltica o con asfalto espumado. Recuperado de https://www.idu.gov.co/web/content/7574/ET450-05.pdf

Kosmatka, S. H., Panarese, W. C. y Bringas, M. S. (1992). Diseño y control de mezclas de concreto. Ciudad de México, México: Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto.

López Arce, P. (s. f.). Caraterización de ladrillos históricos. Recuperado de http://digital.csic.es/bitstream/10261/46792/1/Curso_Geomateriales_75_84.pdf.

Matallana Rodríguez, R. (2018). El concreto fundamentos y nuevas tecnologías. Bogotá, Colombia: Constructura Conconcreto.

Melo Jiménez, L. J. (2014). Reactividad álcali-agregado (raa): experiencias en presas colombianas, análisis comparativo de principales variables que intervienen en el fenómeno. Recuperado de https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/52819

Montejo Fonseca, A., Montejo Piratova, F. y Montejo Piratova, A. (2013). Tecnología y patología del concreto armado. Bogotá, Colombia: Universidad Católica de Colombia.

Neville, A. M. (2013). Tecnología do concreto. Bookman Editora.

Niño Hernández, J. R. (2014). Tecnología del concreto. Bogotá, Colombia: Asocreto.

Pxhere.com. (s. f.). Militar, camión, soldado, ejército, vehículo, industria, arma, cañón, cantera, canteras, máquinas pesadas, vehículo militar. Recuperado de https://pxhere.com/es/photo/811721

Pexels.com. (s. f.). Sandeep Vidwans. Recuperado de https://www.pexels.com/es-es/foto/523234/

Sobkowski, A. (s. f.). Wykopaliska na Tell es-Sultan w Jerychu. Recuperado de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jerycho8.jpg

Sánchez de Guzmán, D. (2001). Tecnología del concreto y del mortero. Bogotá, Colombia: Pontificia Universidad Javeriana.

Sanjuan Barbudo, M. A. y ChinChón Yepes, S. (2014). Introducción a la fabricación y normalización del cemento Pórtland. Alicante, España: Universidad de Alicante.

Segarra Foradada, J. (2005). Envejecimiento de presas por reacciones expansivas en hormigón. Recuperado de https://upcommons.upc.edu/handle/2099.1/3315

Silven, K. E. (2011, mayo 25). There are alternatives: Organic building materials. Recuperado de http://www.earthtimes.org/green-blogs/green-living/organic-building-materials-25-May-11/

Solucionas Ambientales. (s. f.). ¿Qué son los geosintéticos? Recuperado de https://www.geosai.com/geosinteticos/

Taus, V. L. (2003). Determinación de la absorción capilar en hormigones elaborados con agregados naturales y reciclados. Ciencia y Tecnología del Hormigón, 10. Recuperado de https://digital.cic.gba.gob.ar/handle/11746/436

elasco, J. (25 de 01 de 2014). https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ciclorocas.png. Recuperado el 4 de 07 de 2019

Weigell, P. (s. f.). Archivo:Lepenski Vir (2).JPG. Recuperado de https://es.m.wikipedia.org/wiki/Archivo:Lepenski_Vir_(2).JPG

UNIVERSIDAD
La Gran Colombia

Este libro se compuso en caracteres
Humanst521 BT de 11 puntos.

Bogotá D.C., Colombia

VERITAS LIBERABIT VOS