

BOXSET, UN MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA DE LA FACTORIZACIÓN.

Luis Javier Báez Ortiz

Elkin Ignacio Rodríguez Carrero



Licenciatura en Matemáticas y Tecnologías de la Información

Facultad de Ciencias de la Educación

Universidad La Gran Colombia

Bogotá

2023

BoxSet, Un Material Didáctico Para La Enseñanza De La Factorización

Elkin Ignacio Rodríguez Carrero

Luis Javier Báez Ortiz

**Trabajo de Grado presentado como requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas y
Tecnologías de la Información.**

Asesor

Anderson Javier Mojica Vargas



UNIVERSIDAD
La Gran Colombia

Vigilada MINEDUCACIÓN

Licenciatura en Matemáticas y Tecnologías de la Información, Ciencias de la Educación

Universidad La Gran Colombia

Bogotá

2023

Dedicatoria.

Cada logro alcanzado es para mis padres siempre, quienes desde el cielo me observan. A mis hermanos les agradezco el apoyo que me han brindado durante mi vida.

Y también, me dedico a mí mismo por no abandonar, a pesar de los obstáculos presentados.

- Luis Javier Báez Ortiz.

A mis padres que fueron mi inspiración para iniciar mis estudios y me ayudaron a mantenerme en ella.

Y también a mis estudiantes que durante mi vida profesional me han ayudado a forjarme y pensando en ellos salen las ideas de la presente investigación.

- Elkin Ignacio Rodríguez Carrero

Agradecimientos.

Agradezco al gran maestro Anderson Mojica, quien, con sus enseñanzas desde el aula, me motiva cada día a ser un mejor docente. De igual manera, por brindarme palabras de aliento que me impulsaron a culminar mi trabajo de grado.

Así mismo, al gran maestro Jimmy Pedraza, quien a través de sus gráficos casi perfectos a mano alzada y el compartir una bebida caliente al salir de clases, siempre me ha enseñado lo que significa dejar huella en los estudiantes.

- Luis Javier Báez Ortiz.

Al maestro Anderson Mojica, quien ha incentivado la investigación desde sus clases y con su ayuda fue posible la estructuración, redacción y culminación del presente trabajo.

Y también a todas las entidades y docentes que ayudaron a que fuera posible proseguir con la investigación.

- Elkin Ignacio Rodríguez Carrero

Tabla de contenido

INTRODUCCIÓN.....	8
CAPÍTULO I.....	10
1.1 PROBLEMÁTICA.....	10
1.2 PREGUNTA PROBLEMA.....	10
1.3 OBJETIVOS.....	12
<i>1.3.1 Objetivo General.....</i>	<i>12</i>
<i>1.3.2 Objetivos Específicos.....</i>	<i>12</i>
1.4 JUSTIFICACIÓN.....	13
<i>1.4.1 ¿Por qué es importante crear una secuencia didáctica para la enseñanza de la factorización?.....</i>	<i>13</i>
1.5 ANTECEDENTES.....	14
CAPÍTULO II: MARCOS DE REFERENCIA.....	18
2.1 MARCO TEÓRICO.....	18
<i>2.1.1 Educación matemática y escuela francesa.....</i>	<i>18</i>
<i>2.1.2 P.I.A.R.....</i>	<i>20</i>
2.2 MARCO CONCEPTUAL.....	23
<i>2.2.1 Recursos y material didáctico.....</i>	<i>23</i>
<i>2.2.2 Matemática.....</i>	<i>25</i>
2.3 MARCO LEGAL.....	29
CAPÍTULO III: METODOLOGÍA.....	31
3.1 ENFOQUE Y DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN.....	31
CAPÍTULO IV: DESARROLLO DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA.....	33
4.1 FASE 1. ANÁLISIS PRELIMINAR.....	33
<i>4.1.1 Análisis encuesta de caracterización de material didáctico.....</i>	<i>33</i>
<i>4.1.2 Obstáculos epistemológicos.....</i>	<i>39</i>

4.1.3 <i>Obstáculos ontogenéticos.</i>	43
4.1.4 <i>Obstáculos didácticos.</i>	45
4.2 FASE 2. CONCEPCIÓN Y ANÁLISIS A PRIORI	47
4.2.1 <i>Concepción de la propuesta didáctica.</i>	47
4. 2.2 ANÁLISIS A PRIORI.	50
4.2.2.1 <i>Prueba de pilotaje.</i>	51
4.2.2.2. <i>Grupo focal.</i>	54
4.2.2.2.1 <i>Diseño y planificación.</i>	54
4.2.2.2.2 <i>Análisis del grupo focal</i>	58
4.2.2.3 <i>Prueba de testeo frente al material didáctico BoxSet con personas con discapacidad visual.</i> 59	
4.2.2.4 <i>Diseño final del material didáctico Boxset.</i>	61
4.2.2.5 <i>Aprendizaje de la factorización a través de la geometría.</i>	63
4.2.2.6 <i>Algoritmo sugerido para la factorización de trinomios de grado 2.</i>	64
CAPÍTULO VI: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.	68
6.1 CONCLUSIONES.	68
6.2 RECOMENDACIONES.....	72
BIBLIOGRAFÍA.	74

Resumen.

La factorización es quizás uno de los temas que los estudiantes tienden a olvidar con mayor facilidad porque se ha enseñado desde la memorización del algoritmo. El comprender sobre este tema facilita en gran parte el aprendizaje de otros con grado de complejidad mayor. En los docentes, estudiantes e instituciones educativas, hemos encontrado una serie de dificultades (obstáculos) relacionadas con las metodologías implementadas en aula, aprendizajes adquiridos por el estudiante en el que no puede responderse con claridad un ¿para qué?, hasta la carencia de material didáctico en la enseñanza de la factorización.

En el presente trabajo elaboramos una secuencia didáctica a partir de las fases de ingeniería didáctica con el objetivo de fortalecer los procesos de enseñanza de la factorización, atendiendo algunos obstáculos epistemológicos, didácticos y ontogenéticos que allí aparecen. Es así, que las estrategias didácticas planteadas buscan ayudar al estudiante en cuanto a la interpretación, comprensión y aplicación de este concepto, al cual debe brindarse una mayor atención dentro de la enseñanza del álgebra, para mejorar su interpretación y comprensión.

Palabras clave: Factorización, ingeniería didáctica, material didáctico, aprendizaje significativo, braille.

Introducción.

La enseñanza de la factorización históricamente ha sido abordada desde la representación algebraica o algorítmica, dando prioridad al procedimiento memorístico y la mecanización, sin prestarle atención a aspectos importantes como la construcción del concepto, los diferentes registros que se pueden utilizar y la respectiva contextualización.

Esto puede obedecer a una serie de factores tales como la formación de los educadores, donde se privilegia la actividad matemática netamente demostrativa y lo que se hace es reproducir esos conocimientos bajo esa misma metodología. Otra puede ser, la carencia de una transición didáctica de la aritmética al álgebra, lo que puede generar dificultades u obstáculos en el manejo de variables algebraicas.

El sistema de educación a pesar de sus avances, continúa presentando un álgebra descontextualizada, afirmando lo que dice Botero (2014) “como consecuencia, nuestros estudiantes memorizan fórmulas, pero no interiorizan ni comprenden el verdadero significado, las relaciones existentes y la gran aplicabilidad que posee” p.12.

A lo anterior, se puede agregar que aun cuando existen propuestas educativas que enseñan este concepto desde el aspecto geométrico no lo extrapolan a otros contextos como la población con NEE (discapacidad visual para este trabajo) y finalmente el uso descontextualizado de software (Symbolab o Wolfram) y Apps (Photomath, Algebra math) diseñadas para resolver ejercicios donde el estudiante no construye conocimiento y no asume una posición crítica frente a los resultados que obtiene y los avances continuos de la inteligencia artificial, que son capaces hasta de resolver exámenes de ingreso para la universidad.

La factorización de expresiones algebraicas permite crear una perspectiva más amplia frente al reconocimiento y construcción de expresiones que son equivalentes. Y esto puede ser

comprendido cuando el estudiante al ser protagonista y creador de conocimiento, naturalmente pueda relacionar, representar en diferentes registros, diferenciar y contextualizar su aprendizaje de este concepto.

CAPÍTULO I.

1.1 Problemática.

Después de la formalización de la matemática, algunos conceptos concretos fueron abstraídos por un cálculo formal axiomatizado, esto trajo como consecuencia que su enseñanza se transformara en una matemática formal, dejando de lado los contextos reales, lo cual implica un problema didáctico evidenciado en el aula de clase al contribuir en la consolidación de un modelo de aprendizaje tradicional. Lo anterior implica que:

Tradicionalmente el trabajo con las operaciones en la escuela se ha limitado a que los niños adquieran destrezas en las rutinas de cálculo con lápiz y papel a través de los algoritmos formales, antes de saber aplicarlas en situaciones y problemas prácticos, muchas veces sin comprender ni los conceptos que los fundamentan ni el significado de las operaciones (MEN,1998, p. 34).

Por razones como la anterior, los estudiantes al iniciar con el estudio del álgebra, de acuerdo a su contexto, es posible que cuenten con conocimientos aritméticos y formas diferentes de resolver situaciones problema, pero generando barreras respecto a la construcción de ideas más complejas y abstractas que se abordan en el aprendizaje del álgebra.

En consecuencia, se observa aún en muchas aulas, que no se trabaja en la interpretación y argumentación, sobre todo en la básica secundaria y media, sino que más bien el estudiante asume una posición pasiva en la que se limita a copiar y aceptar como válido y verdadero todo aquello que dice el docente. Y aún más preocupante, no se cuestiona el porqué de las cosas que está haciendo, sino que se centra en que lo único que vale es que sus respuestas coincidan con las actividades que propone el docente.

En la enseñanza de la factorización, la poca profundización en desarrollar la argumentación, se hace evidente en el momento en el que se mecanizan procesos, donde el estudiante no es capaz de explicar con claridad sus procedimientos y suele utilizar expresiones como *“así dijo el profe que lo hiciera”* o *“solo es seguir los pasos y ya queda factorizado”*. Por ejemplo, al presentar un paralelogramo de ángulos rectos al estudiante e indicarle que, dada el área del mismo, determine sus dimensiones. Es evidente que el estudiante en primer lugar no se le ocurra hacer uso de la factorización de polinomios para ello, tal como lo expresa Osorio (2020) que *“difícilmente llegan a argumentar de forma precisa y coherente respecto al por qué el procedimiento es válido, pues su utilización en este punto suele ser consecuencia de un proceso memorístico más que del análisis real de la situación”* P.12.

Una contraparte de lo anterior está en la enseñanza de la aritmética, en la que cada vez más se involucra el uso de material didáctico para fortalecer los procesos de aprendizaje, cuestión que observamos al realizar una encuesta de caracterización a los docentes de diferentes niveles educativos (anexo 1), encontrando una mayor utilización de materiales como el ábaco, el dinero didáctico, regletas; entre otros. Los cuales tienen una aplicación con mayor connotación en la educación básica primaria.

Es así que para el presente objeto de estudio, la factorización, se requiere de una metodología afín que contribuya a cambiar el paradigma que se tiene de las clases de matemáticas que solo se centra en procesos tradicionales o de mecanización, que si bien es importante, no es un determinante y tampoco la única manera de aprender; puesto que existen investigaciones como la de Ospina (2015), en la que llegó a demostrar que el uso de material manipulativo *“favorecen un mejor aprendizaje de conceptos abstractos relacionados con el*

álgebra y particularmente con la factorización de polinomios” (como se cita en Osorio, 2020, p.14).

El docente, en la medida que reconozca la validez de la factorización para cada evento pragmático en el aula haciendo uso de material manipulativo y potencializando el desarrollo de procesos de interpretación y argumentación, no solamente podría transformar una perspectiva común de este concepto, sino también una importancia, en definitiva, coherente con diversas problemáticas del desarrollo intelectual.

Por ello, queriendo dar significancia a la enseñanza de la factorización por medio del álgebra geométrica, uso de material didáctico y la argumentación matemática surge la siguiente pregunta problema.

1.2 Pregunta problema.

¿Qué elementos didácticos deben considerarse para la creación de un BoxSet cuyo contenido promueva ambientes de aprendizaje significativos y eficaces en la enseñanza de la factorización en Colombia?

1.3 Objetivos.

1.3.1 Objetivo General.

Diseñar una secuencia didáctica que atienda algunos obstáculos epistemológicos, ontogenéticos y didácticos que permitan fortalecer los procesos de enseñanza de la factorización.

1.3.2 Objetivos Específicos.

Caracterizar los materiales didácticos empleados por los docentes para la enseñanza de la factorización.

Estructurar un BoxSet para la enseñanza de la factorización que atienda algunos obstáculos epistemológicos, ontogenéticos y didácticos.

Validar la pertinencia del Boxset para la enseñanza de la factorización.

1.4 Justificación.

1.4.1 ¿Por qué es importante crear una secuencia didáctica para la enseñanza de la factorización?

Gómez, (2018) argumenta que durante la época de 1961 a 1998 la formación en didáctica de la matemática fue deficiente, ya que se enseñó de forma netamente demostrativa. Por ello estas generaciones sufrieron un estigma, tildando a está, como una asignatura donde hay muchos problemas, es aburrida y tediosa. Gran parte se debe a los métodos implementados que continúan a través de un modelo tradicional que:

Sigue memorizando las fórmulas y no se está otorgando la prioridad a la conceptualización de estas, todo ejercicio elaborado por el docente ha de tener una razón, pero esta no es enseñable y se está dando a ejercer la fórmula mecánicamente más no su lógica (Álvarez, 2009, p. 9).

Al momento de enseñar factorización, los docentes afrontan una serie de dificultades dadas por distintos factores, tales como los que menciona Monge et al (2013): la falta de material didáctico y la cantidad excesiva de estudiantes en el aula, lo cual produce que el proceso no sea enfocado hacia la enseñanza, sino que más bien, tiende a centrarse en mantener la disciplina del aula y controlar los distintos distractores que pueden llegar a presentarse (como se cita en Rivera, 2020, p.15).

En este sentido, de acuerdo con Brosseau (1998) los obstáculos en la enseñanza de la matemática se pueden dividir en tres: epistemológicos, ontogenéticos y didácticos (como se cita en Andrade, s.f., p 1000).

Con respecto a los obstáculos didácticos, son en consecuencia asignados al docente como orientador de la educación matemática, en los que se involucra el uso o carencia de material didáctico, y se evidenció a partir de la encuesta realizada a varios docentes de matemáticas denominada “caracterización de materiales didácticos matemáticos” (anexo 1). Allí se encontró que los docentes desconocen material que puedan aplicar en el aula para la enseñanza de la factorización, lo cual demuestra que la enseñanza de la factorización continúa dándose de forma abstracta y generalmente de manera meramente simbólica.

En virtud de los hallazgos y planteamientos del capítulo presente aparece como válida, necesaria, vigente y urgente la necesidad de crear un BoxSet de materiales didácticos ya que se pueden agrupar distintos tipos de materiales que a su vez convocan diferentes tipos de representación de un mismo concepto que contrarresta los obstáculos epistemológicos, ontogenéticos y didácticos en la enseñanza de la factorización.

1.5 Antecedentes.

En el trabajo titulado “Los recursos multimedia en el aprendizaje de los casos de factorización” propuesto por Cacpata, C. y Montaña, S. (2018) de la Universidad de Guayaquil; los autores plantean la carencia de recursos multimedia para la enseñanza de la factorización, por medio de métodos de investigación como el científico, empírico - analítico, teórico y estadístico; técnicas de investigación como la entrevista y la encuesta. Por lo anterior, el objetivo general fue determinar la incidencia de los recursos multimedia en el aprendizaje de los casos de factorización en los estudiantes, para ello se utiliza software AutoPlay Media Studio. Dicha investigación se tiene en cuenta para la realización de la cartilla BoxSet, en la que se adjuntaron

elementos como códigos QR en los que se anclan videos multimedia y así volverlo más atractivo por medio de recursos digitales.

En el trabajo titulado “Propuesta de enseñanza para la Factorización algebraica” propuesto por Morales, I. (2008) para obtener el título de Maestro en Ciencias en Educación Matemática de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, el autor plantea la factorización de algunos polinomios que tengan raíces en los números enteros por medio del algebra geométrica; El objetivo de la investigación es lograr que los estudiantes de primer año de bachillerato, factoricen polinomios a partir de figuras geométricas rectangulares, se realiza la investigación partiendo de la indagación del álgebra en las distintas culturas del mundo complementado con los trabajos de investigación realizados por otros autores, así pues el investigador realiza el diseño de una secuencia con una serie de ejercicios enfocados en el área de rectángulos, de ahí que BoxSet tome elementos del álgebra geométrica para la creación de las distintas fichas que representan áreas y el cómo se puede llegar a entender el concepto de “Suma de áreas”.

En el trabajo titulado “Propuesta para la enseñanza de las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) y el proceso de factorización de polinomios, con la herramienta didáctica “caja de polinomios”, en estudiantes de grado octavo de la I.E María Cano del municipio de Medellín.” propuesto por Villarroel, J. (2014) para obtener el título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia; el autor plantea que la pedagogía que manejan algunos docentes, al momento de realizar la enseñanza de operaciones básicas con polinomios en grado octavo, se hace a través de una presentación al estudiante de una forma abstracta sin objetos representables o situaciones cotidianas. El objetivo general fue diseñar una propuesta para enseñar operaciones básicas con

polinomios por medio de la herramienta didáctica “caja de polinomios”, en el que hace su fundamento con la teoría cognitiva del aprendizaje significativo de David Ausubel y complementada por el Dr. Marco Moreira el cual pretende usar el material potencialmente significativo para que las operaciones con polinomios adquieran significado para los estudiantes, para ello se plantea la construcción de unas fichas de tres tamaños los que define cuadrado grande, rectángulo y cuadrado pequeño, el cual ubica en un tablero con cuatro subregiones, donde se pueden ejecutar las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) en dicho tablero, después de hacer una fundamentación a los estudiantes, se realiza la aplicación de 7 guías de aprendizaje, posterior a este proceso se concluye que existe un cambio en el ambiente de la clase, ya que el nivel de abstracción que denota el álgebra, se ve mucho más relacionada con el estudiante cuando se compara con elementos geométricos que ya conoce; a partir de dicho aprendizaje generado se rescatan elementos de representación como x^2 , x y 1 ; que servirán de inspiración para las representaciones de algunas fichas que se incluyen en la presente investigación.

El artículo de investigación Enseñanza de factorización, con la ayuda del material didáctico “El álgebra es un juego”, propuesto por Acevedo, H. (2015); planteó como objetivo proporcionar a los estudiantes y profesores de los cursos de álgebra, en particular para el grado octavo una herramienta: “El álgebra es un juego”, que les permita tener otra opción para realizar ejercicios de factorización, que van más allá de los procesos algorítmicos y repetitivos, comprendiendo el concepto de una forma un poco más efectiva. Los estudiantes de grado octavo son muy jóvenes y según los estadios de Piaget en este momento ya están empezando el pensamiento abstracto, lo cual hace que se facilite más entender los temas teniendo un material concreto el cual manipular. Para ello creó un plano con fichas que simbolizan

$x, y, xy, x^2, y^2, x^2y, x^3$ y y^3 , el cual permite realizar ejercicios de factorización de una forma no algorítmica ni abstracta, sino más bien, haciendo uso de material concreto para la enseñanza de la factorización el cual permite realizar ejercicios de factorización de una forma no algorítmica ni abstracta, lo anterior se enlaza con el presente trabajo de investigación dando un sentido al álgebra, mostrándola desde un punto de vista más amigable mediante la geometría para así poder ayudar con los procesos de enseñanza.

En el trabajo titulado “Factotic, plataforma virtual para el aprendizaje de la factorización”, propuesto por Cetina, A. (2017) para obtener el título de Licenciado en Matemáticas y Tecnologías de la Información de la Universidad la Gran Colombia; el autor plantea como el aprendizaje de la factorización se ha convertido en memorístico lo cual no ayuda en su proceso académico y conlleva a una falta de interés por dicho aprendizaje, de modo que se crea una catilla que se enlace con distintos videos y recursos didácticos y así hacer más amigable el aprendizaje de la factorización.

En el trabajo titulado “El álgebra geométrica como recurso didáctico para la factorización de polinomios de segundo grado”, propuesto por Ballén, J. (2012) para obtener el título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia; el autor plantea las dificultades que tienen los estudiantes de grado octavo, ya que los procesos de enseñanza se realizan de modo descontextualizado generando así un aprendizaje memorístico de fórmulas, por ello, crea un compilado de 6 talleres los cuales tienen como base fundamental el aprendizaje de la factorización mediante el álgebra geométrica, mejorando la atracción y la motivación en los estudiantes.

CAPÍTULO II: Marcos de Referencia.

2.1 Marco teórico

2.1.1 Educación matemática y escuela francesa.

La escuela francesa en cuanto a la educación matemática, de acuerdo con Brousseau (1989, p. 135) “estudia las actividades que tienen por objeto la enseñanza, evidentemente en lo que tienen de específicas las matemáticas” (como se cita en Feria (2020)).

Dicho lo anterior, surge la didáctica de las matemáticas en la escuela francesa alrededor de los años setenta, basándose en el trabajo realizado por varios investigadores matemáticos, quienes se enfocaron en atender los semblantes de tipo social, cognitivo y epistemológico que intervienen en la tríada saber, alumno y maestro; haciendo énfasis en el contexto del aula. Además de descubrir, interpretar y atender los fenómenos y los procesos ligados a la adquisición y a la transmisión del conocimiento matemático.

2.1.1.1 Aprendizaje por adaptación del medio. Esta teoría brinda un panorama en el cual el estudiante aprende en relación con el medio o situación problema donde se desenvuelve, el cual según Brousseau (1993, p. 59) se entiende de la siguiente manera:

El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje (como se cita en Diaz, s.f., p. 118).

2.1.1.2 Obstáculos ontogenéticos, epistemológicos y didácticos. Los obstáculos presentes en la enseñanza de la matemática tal como plantea D’Amore & Fandiño (2002, p.8), se pueden abordar en términos de:

Se llaman “obstáculos ontogenéticos” aquellos cuya causa reside en el alumno (por ejemplo: inmadurez para aprender un determinado concepto, deficiencia, condiciones personales,...); se llaman “obstáculos didácticos” a aquellos cuya causa reside en la elección del maestro (por ejemplo: metodología y didáctica, explicaciones precedentes, materiales usados,...); los “obstáculos epistemológicos” son aquellos cuya causa está en la misma matemática, esto es en el concepto matemático que en ese momento es objeto de aprendizaje (como se cita en Del Carmen et al., 2011, p. 4).

Y en particular consideramos que uno de ellos, frecuentemente encontrado en la matemática escolar, se encuentra asociado con la confusión en la simbología algebraica empleada. “El análisis del desarrollo histórico del álgebra muestra claramente que la construcción del lenguaje simbólico ha sido muy lenta y dificultosa, se alternan períodos de mejoramientos progresivos con otros de regresión y parálisis. (Malisani, 1999, p. 5)”. Esta dificultad se manifiesta desde el inicio de la enseñanza del álgebra donde ha sido el concepto más difícil de explicar por el nivel de abstracción que implica, ya que hay poca comprensión en la interpretación, operación y representación de expresiones algebraicas. Es importante resaltar que, en este obstáculo, recae la causa de algunas dificultades, dicho en otras palabras, está relacionado con el concepto que se está trabajando en cierta instancia y para el presente trabajo de investigación, es la factorización.

Los obstáculos didácticos, específicamente son atribuidos al docente como guía de la educación matemática, entre los que se destacan las explicaciones que pueden no ser lo suficientemente claras para los estudiantes, el ritmo acelerado con el que se aborda una temática

determinada, falta de comprensión, interpretación, atención de los estudiantes y falta de material didáctico.

2.1.1.3 Ingeniería didáctica. “La didáctica se interesa no tanto por lo que va a ser enseñado, sino cómo va a ser enseñado” (Nerici,1973, p. 56).

En este sentido, la didáctica es parte fundamental en el proceso de enseñanza de la matemática, porque permite afianzar los procesos generales que se encuentran inmersos en los estándares básicos de competencias en matemáticas, como son, el formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad, comunicar, razonar, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. La unión entre la didáctica y los procesos generales conllevan a una eficacia de la acción del docente, atendiendo en lo posible los intereses de los estudiantes desde una perspectiva cultural, emocional y estableciendo conexiones con su entorno. La noción de ingeniería didáctica trazó su camino en el edificio de la didáctica con esta doble función.

La ingeniería didáctica en el presente trabajo cuenta con una rigurosidad académica y científica, la cual recopila distintos autores que han aportado a la enseñanza del álgebra geométrica, creando o dando nociones respecto a la elaboración de material didáctico para los procesos de enseñanza; legitimando así un compendio que será evaluado, seleccionado, rediseñado, modificado y estructurado, de tal forma que se genere un material óptimo e inclusivo para la enseñanza de la factorización.

2.1.2 P.I.A.R.

Según lo menciona la secretaria de educación del distrito (2020):

El Plan Individual de ajustes razonables es una herramienta utilizada para garantizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las personas con discapacidad, basados en la caracterización

pedagógica y social, que incluye los apoyos y ajustes razonables requeridos para el estudiante, entre ellos los curriculares, de infraestructura y todos los demás necesarios para garantizar el aprendizaje, la participación, permanencia y promoción. Son insumos para la planeación de aula del respectivo docente y el plan de mejoramiento institucional (p. 12).

Por lo anterior, el presente trabajo de investigación, estará enfocado en la elaboración de un material didáctico que contribuya al PIAR de estudiantes cuya condición, y de acuerdo con la clasificación internacional de enfermedades (CIE), se encuentre en alguno de los cuatro niveles de la función visual, tales como normal, discapacidad visual moderada, discapacidad visual grave y ceguera (OMS, 2014).

Así mismo, como la discapacidad visual moderada y la discapacidad visual grave pueden reagruparse comúnmente bajo el término «baja visión»; la baja visión y la ceguera representan conjuntamente el total de casos de discapacidad visual.

2.1.3 Tecnología e innovación.

2.1.3.1 Ecosistemas digitales. La educación se ha ido trasladando a otros espacios que permiten generar aprendizaje y por ende ha venido surgiendo el concepto de ecosistemas digitales.

Según Motz & Rodés (2013) y Barragán (2016) “estos se caracterizan por basarse en sistemas adaptativos capaces de modificarse a partir de diferentes relaciones o interacciones dadas en sentido simétrico entre los componentes del sistema: contexto, usuarios, contenidos, dispositivos, aplicaciones, formas de comunicación, entre otros “(como se cita en Islas & Carranza, 2017, p. 5).

De la misma forma, los ecosistemas digitales son un claro ejemplo del sistema educativo futuro, teniendo como soporte las tecnologías de la información y la comunicación. Y, en consecuencia, tiene como objeto el mejorar las experiencias de aprendizaje mediante actividades interactivas como juegos, aplicaciones, simulaciones, entre otras.

2.1.3.2 Tecnologías de la información y la comunicación (TIC). De acuerdo con Domínguez (2016), "la sociedad actual, llamada de la información, demanda cambios en los sistemas educativos de forma que éstos se tornen más flexibles y accesibles, menos costosos y a los que se puedan incorporar los ciudadanos en cualquier momento de su vida". Con lo cual ha sido necesario que actualmente las TIC sean implementadas en los procesos educativos, tanto de enseñanza y aprendizaje, porque engrandecen al mismo tiempo el proceso de aprender y fortalece la construcción de conocimiento compartido.

2.1.3.3 Tecnologías del aprendizaje y el conocimiento (TAC). Las TAC tienen como objetivo principal la construcción de conocimiento en conjunto con metodologías que están basadas en el uso de la tecnología y que convierten al docente como guía en el proceso educativo. Además, permiten atender la diversidad en términos de contexto y niveles de dificultad de aprendizaje y promover la inclusión educativa. Entre estas se destacan tutoriales de clase, MOOC, videos explicativos, juegos interactivos; entre otros.

En relación con lo anterior, para Valarezo y Jiménez (2019):

Ciertamente las TAC son una oportunidad para provocar el salto cualitativo en los sistemas educacionales necesarios para satisfacer las necesidades de la sociedad, que demanda cada vez más de profesionales capaces de propulsar las constantes transformaciones que el propio desarrollo de la ciencia y la tecnología generan. (p. 182).

2.1.3.4 Tecnologías del empoderamiento y la participación (TEP). El objetivo principal de las TEP es compartir el conocimiento a través de espacios virtuales comunes de trabajo como por ejemplo los Blogger, páginas Web, Edmodo, canales temáticos en Youtube; entre otros. La importancia de las TEP radica en que facilitan la interacción entre personas mediante entornos colaborativos de trabajo.

Complementando lo anteriormente mencionado, para el colegio santa maría de la providencia (s.f) las TEP “no sólo comunican, crean tendencias y transforman el entorno y, a nivel personal, ayudan a la autodeterminación, a la consecución real de los valores personales en acciones con un objetivo de incidencia social y autorrealización personal” (párr. 5).

2.2 Marco Conceptual.

2.2.1 Recursos y material didáctico.

2.2.1.1 Material didáctico. Se define material didáctico, según Guerrero (2009) como “aquellos elementos que empleamos los docentes para facilitar y conducir el aprendizaje de nuestros/as alumnos/as (libros, carteles, mapas, fotos, láminas, videos, software...).” (p.1).

La idea central, radica en que el material didáctico ayuda al docente a mejorar los procesos de enseñanza de la matemática de forma que los conocimientos puedan representarse en el material y así crear una asociación entre lo abstracto y el material, apoyado en la teoría del aprendizaje significativo.

2.2.1.1.1 Box Set. “A collection of related items packaged together in a box and sold as a single unit”.

Se define un box set como “una colección de artículos relacionados entre sí, empaquetados en una caja y vendidos como una sola unidad” (Traducción propia, 2022).

2.2.1.2 Recurso didáctico. De acuerdo con Carretero et al. (1955):

Se diferencian los recursos de los materiales didácticos, indicando que los recursos son todos aquellos materiales no diseñados específicamente para el aprendizaje de un concepto o procedimiento determinado. En cambio, el material didáctico es diseñado con un fin educativo, aunque un buen material didáctico trasciende la intención original y se le puede dar otros usos. Por estas razones vemos que no hay un límite claro entre un material y un recurso (como se cita en Flores., 2011, p. 8).

Para la presente investigación se abordan los recursos didácticos desde la elaboración de videos, uso de pizarra digital; entre otros, que contribuirán en primera instancia a la formación del docente desde la perspectiva de un enriquecimiento desde la parte tecnológica y segundo potencializar el repertorio de insumos y herramientas didácticas con las que cuenta el maestro para la enseñanza de la factorización.

2.2.2.1 Acerca de las representaciones.

2.2.2.1.1 Representaciones semióticas y registro semiótico. Partiendo de lo que afirma Rico (2009):

Las representaciones matemáticas se han entendido desde entonces, en sentido amplio, como todas aquellas herramientas —signos o gráficos— que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas (p. 3).

En el presente trabajo de investigación abordaremos estas representaciones teniendo en cuenta que Duval (2004), considera que:

Un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiótica: primero la formación de una representación identificable, luego el tratamiento, y culmina con la conversión. Estas actividades tienen la propiedad de transformarse en otras representaciones, que pueden conservarse en todo su contenido o parte de ella (como se cita en Lizana & Antezana, 2020, párr. 14).

Figura 1

Procesos cognitivos fundamentales del pensamiento

Un campesino tiene una parcela dividida en cuatro subparcelas. Cada una de ellas, se midió su largo y ancho a conveniencia con objetos del campo tradicional como lo es la vara y la soga. La primera midió 3 varas de largo y 2 sogas de ancho, la segunda midió 3 varas de largo y 3 varas de ancho, la tercera midió 2 sogas de largo y 2 sogas de ancho y la última midió 2 sogas de ancho y 3 varas de largo. El campesino halló el área de cada subparcela con el fin de acceder a un beneficio del gobierno que consiste en brindar insumos para cultivar, teniendo como requisito que dicha parcela debe ser de forma cuadrada. ¿Podrá el campesino acceder al beneficio?

Conversión

Subparcela 1: $6vs$

Subparcela 2: $9v^2$

Subparcela 3: $4s^2$

Subparcela 4: $6vs$

$$\text{Parcela} = 9v^2 + 6vs + 6vs + 4s^2$$

$$\text{Parcela} = 9v^2 + 12vs + 4s^2$$

Tratamiento

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{9v^2} + 12vs + \sqrt{4s^2} & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ 3v & & 2s \\ \swarrow & & \searrow \\ & (3v + 2s)^2 & \end{array}$$

Respuesta: El campesino podrá acceder al beneficio que brinda el gobierno ya que su parcela es de forma cuadrada.

Nota: La figura representa un sistema semiótico para la comprensión de la factorización mediante trinomio cuadrado perfecto. Elaboración propia.

2.2.2 Matemática.

2.2.2.2 Factorización. Consideramos los siguientes elementos como sustento a la propuesta de investigación:

Por factorización entendemos un proceso matemático que implica expresar un polinomio, en dos o más factores irreducibles de menor grado.

Lo que se busca es que el estudiante reconozca y comprenda el concepto de factorización sin estar sujeto a un algoritmo; por ende, se trabajarán con algunos polinomios que no sean irreducibles desde la representación geométrica.

Por lo tanto, lo anterior nos lleva a considerar los siguientes hechos matemáticos:

2.2.2.2.1 Teorema de factorización. Cada polinomio $p(x) \in F[x]$, de grado positivo, es el producto de un elemento diferente de cero de F y polinomios mónicos irreducibles en $F[x]$.

Excepto por el orden de los factores, esta factorización es única. (Torrez et al., 2003, p. 183).

Para efectos de este trabajo de grado asumimos los polinomios reducibles $p(x) \in \mathbb{Z}_+(x)$ tal que $z(x)$ sea de grado 1 y 2, teniendo en cuenta que para efectos de la representación geométrica, se trabajara con una única variable que será X .

Es así, que los polinomios aquí abordados son considerados como un anillo conmutativo sobre \mathbb{Z}_+ .

Ahora bien, los polinomios de grado uno que se consideran en la escuela como factor común, realmente se trata de la propiedad distributiva de la suma con respecto al producto, definida como:

$$p(x) (q(x) + r(x)) = (p(x) q(x) + p(x)r(x))$$

Es así que, los polinomios de grado 2 y 3 que trabajaremos en el presente trabajo de grado, cumplen la estructura de anillo conmutativo, teniendo en cuenta el siguiente teorema:

Sea R un anillo conmutativo con identidad. Entonces $R[x]$ es un anillo conmutativo con identidad.

- **Proposición** Sean $p(x)$ y $q(x)$ polinomios en $R[x]$, donde R es un dominio de integridad. Entonces $\text{gr } p(x)+q(x) = \text{gr } (p(x)q(x))$. Además, $R[x]$ es un dominio integral.
- **Demostración.** Supongamos que tenemos dos polinomios distintos de cero

$$p(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0 \text{ y } q(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$$

Con $a_m \neq 0$ y $b_n \neq 0$. Los grados de $p(x)$ y $q(x)$ son m y n , respectivamente. El término líder de $p(x)q(x)$ es $a_m b_n x^{m+n}$, que no puede ser cero pues R es un dominio integral; vemos que el grado de $p(x)q(x)$ es $m + n$ y $p(x)q(x) \neq 0$. Como $p(x) \neq 0$ y $q(x) \neq 0$, implica que $p(x)q(x) \neq 0$. Concluimos que $R[x]$ también es un dominio integral (W. Judson, s.f, anillos de polinomios)

Para efectos de la representación desde el álgebra geométrica, se tomará $n = (2,3)$ y $a \in \mathbb{Z}^+$ por motivo que estos pueden ser modelados de manera concreta con el material diseñado.

2.2.2.2 Teorema del factor y el residuo. Para los polinomios de grado dos, su factorización puede ser expresada teniendo en cuenta la siguiente estructura, propuesta por Ballen (2012):

Hay una relación entre el residuo obtenido en una división de polinomios $P(x)$ entre un factor lineal $x - r$, y el valor numérico $P(r)$ por lo que hay una forma para hallar el residuo de esta división, utilizando el teorema del residuo, el cual se enuncia a continuación: Si el polinomio $P(x)$ de grado n se divide entre $x - r$, siendo r una constante independiente de x , el residuo es igual a $P(r)$. Esto es $P(x) = Q(x)(x - r) + P(r)$ donde $Q(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$. A partir de lo anterior, si $P(r) = 0$, entonces $x - r$ es un factor del polinomio porque el residuo es cero. Cuando se encuentra un valor de x para el cual $P(x) = 0$, se ha encontrado una raíz del polinomio; esto es conocido como el teorema del factor, que es muy importante porque

permite hallar un factor del polinomio, tanteando posibilidades. Se entiende por teorema como un polinomio $P(x)$ tiene un factor (xc) si y sólo si $P(c) = 0$ (p. 24).

2.2.2.2.3 Definición de casos de factorización. En el Libro II de los elementos de Euclides encontramos proposiciones que nos ayudan a comprender la factorización desde las representaciones en el álgebra geométrica.

2.2.2.2.3.1 Proposición I.

Si hay dos segmentos y uno de ellos se corta en un número cualquiera de segmentos, el rectángulo comprendido por los dos segmentos es igual a los rectángulos comprendidos por el segmento no cortado y cada uno de los segmentos (Castaños, 1991, Elementos de Euclides).

En la proposición I encontramos como un rectángulo cortado de forma paralela a uno de sus lados, la suma de los rectángulos resultantes es igual al rectángulo original, tal como en el caso de factorización por factor Común, se puede analizar desde el álgebra geométrica del mismo modo que lo hizo Euclides en la proposición I anteriormente vista, en el que podemos expresar dos rectángulos con bases o alturas iguales, y expresarlo como un solo rectángulo.

2.2.2.2.3.2 Proposición IV.

Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la recta entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos (Castaños, 1991, Elementos de Euclides).

En la proposición IV se tiene un segmento cortado en una longitud cualquiera, a partir del segmento completo se crea un cuadrado, este cuadrado resultante es igual al cuadrado de los dos segmentos y dos veces el rectángulo contenido entre los dos segmentos, en el caso de factorización Trinomio Cuadrado Perfecto, hallamos la suma de las cuatro áreas mediante álgebra geométrica, teniéndola expresada como un trinomio, cuya solución es el cuadrado de la

base completa, de esta forma se pueden llegar a resolver los distintos casos de factorización que abarcan ciertos trinomios (Trinomio Cuadrado Perfecto, Trinomio de la forma $a^2 + bx + c$, Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$).

2.3 Marco legal.

De acuerdo con el MEN (2006), para que se pueda hablar que un estudiante es matemáticamente competente, se requieren ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas.

Lo anterior, cobra sentido cuando se trabajan las competencias matemáticas, las cuales son: tratamiento y resolución de problemas, la modelación, la comunicación, el razonamiento y la formulación, comparación y ejercitación de procedimientos.

Por otra parte, los estándares básicos de competencia no son solo una guía para el diseño del currículo, sino que también son guía para “la producción de los textos escolares, materiales y demás apoyos educativos, así como la toma de decisión por parte de instituciones y docentes respecto a cuáles utilizar” (MEN, 2006, p. 11).

Por tanto, los estándares básicos de competencia en matemáticas ubican la factorización en el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos de los grados octavo y noveno, y para el presente trabajo de investigación se consideran los siguientes estándares:

- Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
- Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.

En este mismo sentido, el MEN en el año 2016, publica la segunda versión de los derechos básicos de aprendizaje (DBA) en matemáticas, para lo cual en el grado octavo se plantea específicamente: describe atributos medibles de diferentes sólidos y explica relaciones entre ellos por medio del lenguaje algebraico (DBA 4). Y para el presente trabajo de investigación se abordará la evidencia de aprendizaje de este DBA que consiste en: Utilizar lenguaje algebraico para representar el volumen de un prisma en términos de sus aristas.

En conjunto, todo el compendio de documentos de referencia del MEN, en el ejercicio docente nos hace reflexionar en la didáctica aplicada a estos conocimientos, mediante estrategias que sean llamativas para el estudiante y que le generen ese interés por el querer aprender; y no de forma reiterada, resolviendo problemas en contextos irreales, sin realizar una introspección en la importancia del proceso o en el resultado de las operaciones, representaciones o simulaciones. Así mismo, estos servirán de base, guía y soporte para el desarrollo de la metodología del presente trabajo de investigación.

CAPÍTULO III: Metodología.

3.1 Enfoque y desarrollo de la investigación.

La metodología de investigación adoptada se basa en la ingeniería didáctica que plantea cuatro fases: La fase 1 de análisis preliminar, la fase 2 de concepción y análisis a priori de la propuesta para la enseñanza de la factorización, la fase 3 de experimentación y finalmente la fase 4 de análisis a posteriori y evaluación (Artigue et al., 1995, P. 38). Para el presente trabajo se consideró una adaptación o ajuste a dicha metodología, se abordaron las dos primeras fases a través del enfoque de investigación basada en diseño.

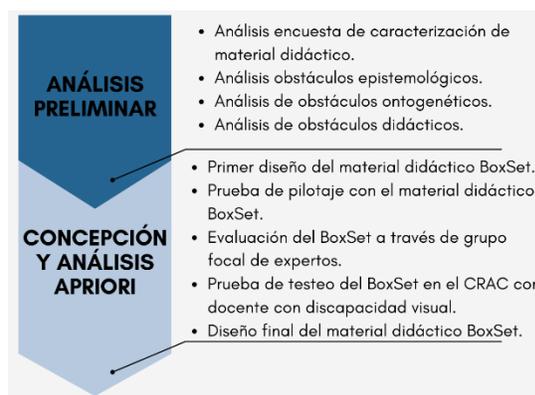
En la primera fase, denominada análisis preliminar, se hace un análisis de la encuesta respecto al uso de material didáctico por parte de los docentes para la enseñanza de la factorización en la educación regular, posteriormente se consideran los aspectos vinculados con los obstáculos epistemológicos en los que se revisan algunas concepciones de la factorización a través de la historia desde la perspectiva evolutiva del lenguaje algebraico: retórico, sincopado y simbólico, y se hace revisión en textos escolares, ya que hace parte de los materiales impresos utilizados como apoyo por el docente. Posteriormente se consideran los obstáculos ontogenéticos a través de una entrevista semiestructurada a una profesora que enseña y tiene discapacidad visual. Por último, se abordan algunos obstáculos didácticos que se podrían presentar en la enseñanza de la factorización. Y es a partir de toda esta información que se consolidan los aspectos teóricos, didácticos y metodológicos que nos lleva a diseñar la primera versión del material didáctico, llamado “BoxSet”, que consta de la producción de la cartilla, caja, fichas y consideración de variables didácticas tales como la atención a población no vidente, considerando los apartados abordados en esta fase.

En un segundo momento denominado análisis a priori, se realiza una prueba de pilotaje con el material BoxSet, a estudiantes del grado octavo del Colegio Centro Lestonnac, Compañía de María de la ciudad de Bogotá, en el barrio Los Cerezos, lo cual permite encontrar fortalezas y al mismo tiempo oportunidades de mejora para la ejecución de este, siendo un gran insumo para hacer el diseño final del BoxSet. Igualmente, se realiza una serie de actividades a modo de pilotaje, en la cual el material BoxSet se evalúa a través de un grupo de expertos profesionales en la enseñanza de las matemáticas en diferentes niveles educativos mediante la estrategia de grupo focal, con el fin de hacer un ejercicio de validación y retroalimentación en cuanto al diseño, metodología y estrategias aplicadas en el mismo. Finalmente se realiza una prueba de testeo del material con una docente de educación especial quien enseña el programa ÁBACO en el centro de rehabilitación para adultos ciegos (CRAC) en la ciudad de Bogotá, quien a su vez posee discapacidad visual grave (ceguera).

Y es a partir de allí, que se aborda el diseño final del BoxSet, teniendo en cuenta las variables didácticas involucradas, los procesos cognitivos (saber saber), procedimentales (saber hacer) y actitudinales (saber ser) que están inmersos en la metodología de ingeniería didáctica y en la propuesta de intervención, involucrando las consideraciones halladas en la prueba de pilotaje y el grupo focal.

Figura 2

*Descripción de las fases de la ID
abordadas en la investigación presente.*



Nota: Elaboración propia.

CAPÍTULO IV: Desarrollo de la ingeniería didáctica.

4.1 Fase 1. Análisis preliminar.

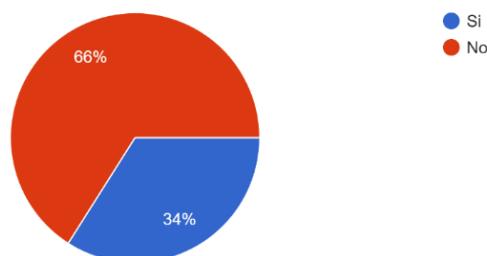
Para comprender las causas y efectos que se han producido en la enseñanza de la factorización a través del tiempo, debe partirse de un análisis epistemológico de su enseñanza. Así como otros factores, tales como los que propone Artigue et al., (1995, p. 38). “el análisis de las concepciones, de las dificultades y de los obstáculos que determinan su evolución”. Por ello en primer lugar se realizó una encuesta a docentes en ejercicio, acerca del uso del material didáctico, la cual se validó por parte del experto en estadística Álvaro Josserand Camargo, quien a su vez labora como docente de la universidad La Gran Colombia. Posteriormente se revisaron de manera contextual los obstáculos didácticos a tener en cuenta en el diseño de la propuesta.

4.1.1 Análisis encuesta de caracterización de material didáctico.

Desde la práctica pedagógica, en la enseñanza de la factorización se han venido diseñando actividades y/o estrategias como: enunciar, completar, relacionar, encuentre el error, solución, aplique; entre otros. Además de contar con gráficos que permiten complementar el aprendizaje del mismo; sin embargo, existe escasez de material didáctico para el mismo. Con respecto a este último elemento, se realiza en la encuesta aplicada a los profesores de matemáticas. Puntualmente en la pregunta, *¿utiliza o ha utilizado algún material didáctico para la enseñanza de la factorización?*, (ver figura 3), el 66% de los docentes no hacen uso de material didáctico para tal fin.

Figura 3

Porcentaje de docentes, según si ha utilizado material didáctico para la enseñanza de la factorización.



Nota: Elaboración propia.

Una de las posibles causas se debe a la falta de suministro de material didáctico por parte de la institución, ya que el 80% de los encuestados afirman no haber recibido material didáctico por parte de la institución educativa (ver anexo 1), desconocimiento por parte del profesorado, decisión propia del docente de no hacer uso de ello; entre otros. Sin embargo, el 34% de docentes afirmaron haber trabajado con material didáctico destinado hacia la enseñanza de la factorización, entre sus respuestas se destacan:

Tabla 1

Codificaciones de material didáctico.

¿Qué material didáctico ha utilizado para la enseñanza de la factorización?	A1	A2	A3	A4
Fichas y bloques	12	4	3	0
Juegos	2	2	2	2
Software	2	1	0	0

Código	Atributo	Explicación codificación
01	Construcción de áreas en diferentes materiales	La primera codificación FICHAS Y BLOQUES, generan los atributos de los códigos 01, 02 y 03; que respectivamente se ubican en las columnas A1, A2 y A3.
02	Construcción de volúmenes en diferentes	

	materiales	
03	Regletas	
04	Tangram	La segunda codificación, JUEGOS, generan los atributos de los códigos 04, 05, 06 y 07; que respectivamente se ubican en las columnas A1, A2, A3 y A4.
05	Dominó	
06	Rompecabezas	
07	Otros (twister, ruleta)	
08	Geogebra	
09	Software	

Nota: La tabla representa las codificaciones de distintos materiales didácticos obtenidos a partir de la encuesta realizada a los docentes de matemáticas, cuyo fin está enfocado hacia la enseñanza de la factorización.

Adaptado de “Preguntas abiertas en encuestas, ¿cómo realizar su análisis?”

(<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7396413>).

En tal sentido, se evidencian tres codificaciones que serán tenidas en cuenta en el desarrollo de la propuesta de investigación.

Las codificaciones “Fichas y bloques” y “Software”, donde se desarrolla un aprendizaje significativo para la enseñanza/aprendizaje de la factorización, ya que se utiliza material tangible o digital como los bloques que ayudan a identificar los términos que conforman la representación abstracta del presente binomio mediante el registro gráfico; haciendo un proceso de abstracción y

relación entre material y concepto, fortaleciendo el aprendizaje de la factorización mediante el álgebra geométrica.

Seguidamente, en la codificación “juego”, se hace hincapié, en el sentido que en algunas ocasiones esta genera un aprendizaje memorístico, como en el caso del juego de dominó algebraico, donde un extremo tiene un polinomio y la respuesta es la que se enlaza con el extremo de otro factorizado, donde el estudiante puede conectar correctamente, conectar según su conveniencia para culminar con rapidez la actividad, algún compañero le brindó las respuestas, el docente brinda pistas (efecto Topaze) o le dice que está correcto a pesar que no esté bien (efecto Jourdain); sin generar un proceso de pensamiento del porqué es esa la respuesta correcta.

Estas codificaciones mencionadas, conducen a un mismo fin, aprendizaje, y su funcionalidad puede ser diversa y por lo tanto se pueden agrupar por familias, como lo expresa (Alsina et al., p.14) , por ejemplo: Fichas, bloques, juegos y software; corresponden a la familia de *materiales para el descubrimiento de conceptos y materiales para resolver problemas* y desde la propuesta, contribuirán a la construcción por parte de los estudiantes sobre el aprendizaje de la factorización mediante modelación geométrica y algebraica, acompañando procesos de metacognición, y como complemento se pueden abordar situaciones problemas como el ejemplificar áreas de cierta complejidad y relacionarla con un contexto determinado.

Las codificaciones anteriores, están relacionadas con la variabilidad de materiales didácticos que existen para la enseñanza de las matemáticas; sin embargo, estos están más presentes en la básica primaria que en secundaria puesto que allí la construcción de conocimiento en los niños es dada a través de la lúdica ligado a la articulación con procesos de retroalimentación, lo que ayuda a que el estudiante desarrolle y/o potencialice las habilidades

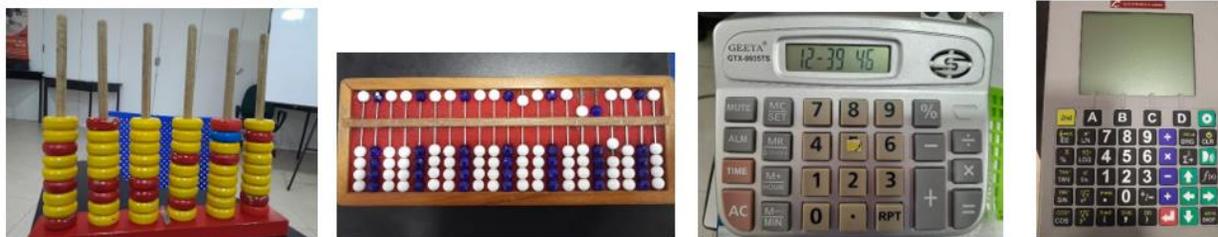
para su proceso formativo. Dicho de otro modo, en la encuesta, cerca del 78% que enseñan en los grados de básica secundaria, cuando se les pregunta, *¿qué material didáctico ha utilizado para la enseñanza de la factorización?*, se obtienen respuestas como cartulina para hacer rectángulos, dominio de expresiones factorizadas, GeoGebra, cubo de madera para binomio al cubo o ningún material (anexo 1).

Comparativamente, en la entrevista realizada a la docente de educación especial (anexo 3), se realiza la pregunta, *¿qué materiales didácticos ha utilizado para la enseñanza de las matemáticas en braille?*, respondiendo:

Tablas en negativo (para resaltar los puntos de las gráficas en relieve), ábaco abierto (niños), cerrado (adolescentes y adultos), calculadora parlante y calculadora científica convencional, reemplazando la hoja y el esfero. Sin embargo, aclara que “estas herramientas no se enseñan a los de baja visión, sino que se les enseña ayudas como la lupa que les amplían la letra para que puedan acceder mejor a la información. y los apuntes si los toman en tinta haciendo uso de marcadores gruesos”.

Figura 4

Material didáctico para la enseñanza del programa de ÁBACO.



Nota: La figura representa materiales didácticos para la enseñanza de las matemáticas para personas con dificultades visuales. Tomado del CRAC.

Teniendo en cuenta lo anterior, existe una situación real y es la carencia de material didáctico y esto se confirma, cuando se le pregunta a la profesora, *¿usted cree que existen suficientes materiales didácticos para enseñar matemáticas en braille?*, comentando que *“suficientes materiales no, porque hay algunos que los mismos familiares los adaptan para que los niños puedan acceder a la información porque no se consiguen o sus costos son elevados”*.

Es así que, desde nuestra propuesta, queremos que el estudiante reconozca que las matemáticas pueden estar al alcance del mismo, dando paso al desarrollo de nuevas destrezas que ayuden a compensar la dificultad visual, teniendo en cuenta lo propuesto por Álvarez et al., (2000), respecto al aprendizaje de las matemáticas:

1. Partir de la experiencia del alumno, es decir, partir de lo que el alumno/a sabe.
2. Aprendizaje desde la problematización. Plantear el problema con referencias de la realidad para que pueda contrastar y llegar a la solución.
3. Aprendizaje significativo, como va mejorando y va adquiriendo conocimientos constructivistas.
4. Aplicabilidad científica. Hacer conscientes a los alumnos/as con discapacidad visual de la importancia que tiene el papel de las matemáticas para comprender la realidad, así como de resolver los problemas de distinta naturaleza. (como se cita en Blázquez,2014, p.22):

Con el fin de impulsar hacia el conocimiento y uso de materiales didácticos dentro del aula, a continuación, presentamos la propuesta del material didáctico BoxSet para la enseñanza de algunos casos de factorización.

4.1.2 Obstáculos epistemológicos.

4.1.2.1 Interpretación de variable algebraica. Uno de los obstáculos presentes en la enseñanza del álgebra es la concepción de variable, en los que de acuerdo con Küchemann (1978), la interpretación de variable puede ser caracterizada como “letra evaluada, letra no usada, letra como objeto, letra como incógnita, letra como número generalizado y letra como variable (como se cita en Rojas et al., 1999, p. 32).

El estudiante al enfrentarse a la variable, se convierte en una tarea confusa ya que ha realizado un trabajo concreto en aritmética utilizando cantidades numéricas; mientras que se necesita un nivel de abstracción para poder comprenderla, la cual no ha sido madurada a través de los años.

Por lo anterior, no se hacen ejercicios iniciales en la transición de la aritmética al álgebra, tal como lo expresa Kieran (1989), “los escolares al comenzar el estudio del álgebra traen nociones y enfoques de uso en el trabajo aritmético, pero que no son suficientes para abordar el trabajo algebraico, ya que éste no es una simple generalización del aritmético” (como se cita en Rojas, 2010, p. 119).

Por ello, en cursos posteriores se presentan situaciones en las que encuentran confusiones al operar variables como $x + x$ ó $x + y$; donde en la primera se sigue manteniendo la confusión si es $2x$ o x^2 ; mientras que en la segunda brindan como respuesta xy .

4.1.2.2 Evolución del lenguaje algebraico. Desde sus inicios, el álgebra se ha constituido en por una serie de eventos que están ligados desde tres etapas históricas descritas a continuación:

Tabla 2

Evolución epistemológica del álgebra y su lenguaje.

<p>Retórica: Los problemas que se planteaban, así como sus soluciones se describen mediante lenguaje natural, el cual no incluía símbolos u operaciones.</p>	<p>En el siglo XVI A.C. Los babilonios realizan soluciones a ecuaciones cuadráticas como “Completar cuadrados” e implícitamente se utiliza la factorización para llegar a dicha solución, esto se realizaba por métodos abstractos ya que no contaban con la notación moderna.</p>
<p>Sincopada: De acuerdo con (Santos, s.f.) “se apoya del lenguaje natural, con la diferencia que los conceptos y operaciones se abordan a través de abreviaturas” (p.3).</p>	<p>En Grecia, en el siglo III A.C. los libros de los elementos escritos por Euclides, se encuentra en el libro 2, donde se hallan elementos del álgebra descritos desde un álgebra geométrica, visualizando donde prueba geoméricamente algunos casos de factorización (Delgado y Butto, 2015, p. 56).</p>
<p>Simbólica: Reemplaza el lenguaje natural, haciendo que la relación entre objetos matemáticos se expresa a través de símbolos, como lo menciona (Santos, s.f.), “hay símbolos para las constantes, las variables y las operaciones” (p. 3)</p>	<p>Brahmagupta, en la India del siglo VII D.C. Realizó aportes en el con su abstracción, denotando cantidades desconocidas como letras (Sánchez, s.f., p. 22).</p>

Nota: Elaboración propia.

Lo anterior, brinda un panorama frente al proceso evolutivo que ha tenido el álgebra hasta su consolidación en tiempos actuales, encontrándose con obstáculos epistemológicos como el planteamiento de la ecuación de segundo grado (Santos, s.f.) y que de alguna forma su aprendizaje es complejo, lo cual nos lleva al interrogante propuesto por (Santos, s.f.) ,“ ¿no será que las dificultades que tiene un estudiante que ha recibido un curso de aritmética para entender el álgebra son semejantes a las que tuvieron los matemáticos para pasar de la aritmética a la elaboración del álgebra simbólica?” (p.3).

4.1.2.3 Interpretación del concepto de factorización. Tomando este último interrogante como base, los estudiantes no reconocen el concepto de factorización y por ende se hace un acercamiento al mismo desde los significados institucionales, teniendo como referencia los libros de texto que usan diferentes instituciones educativas, ya que estos son una guía y herramienta más cercana al docente, aún con el auge de la tecnología con que se cuenta actualmente para enseñar, para orientar el proceso de enseñanza y así mismo para el aprendizaje del estudiante en cuanto al concepto de factorización.

Algunas de estas definiciones, tomadas entre el periodo de 1941 y 2019 son:

Tabla 3

Desarrollo del concepto de factorización entre los periodos de 1941 y 2019.

Descomponer en factores o factorizar una expresión algebraica es convertirla en el producto indicado por sus factores. (Baldor, 1941, p.143)
Para (Barnett y Uribe, 1978, p. 43) “es el proceso inverso de la multiplicación, en donde se dice que un polinomio está completamente factorizado cuando está escrito como el producto de sus factores primos” (Como se cita en Mejía, 2004, p.39).
Según Bedoya y Londoño (1985, p. 138) “es el proceso que consiste en hallar los factores

<p>primos en que se puede descomponer una expresión algebraica” (Como se cita en Mejía, 2004, p.39).</p>
<p>Si un polinomio se escribe como producto de otros polinomios, cada polinomio del producto es un factor del polinomio original. Al proceso de expresar un polinomio como un producto se le da el nombre de factorización. (Swokowski, 1988, p.28)</p>
<p>Camargo et al. (2002, p. 139), menciona que “es convertir la expresión algebraica al producto de otras expresiones algebraicas” (Como se cita en Mejía, 2004, p.39).</p>
<p>Para factorizar una expresión, escribimos la expresión como un producto de sus factores. (Bello, 2005, p.292)</p>
<p>La factorización de un polinomio consiste en la descomposición en factores primos que son polinomios, diferentes a él.(Ramírez et al., 2010, p.100)</p>
<p>Factorizar un número es expresarlo como producto de dos o más factores. Al igual que los números compuestos, existen polinomios que se pueden expresar como producto de polinomios más simples. Este proceso se denomina factorización de polinomios. (Joya et al.,2019, p.75)</p>

Nota: La tabla representa la evolución del concepto de factorización algunos los libros de texto que se han utilizado en la educación colombiana durante el periodo de 1941 y 2019. Elaboración propia.

Haciendo una revisión a las definiciones anteriormente mencionadas, se utilizará la siguiente definición:

- La factorización consiste en el proceso de expresar *como producto de sus factores una cantidad o expresión algebraica*.

Esta definición ayuda a comprender de mejor manera el sentido de la representación geométrica en términos de base por altura; sin embargo, existen algunas expresiones algebraicas

que pueden ser factorizadas por más de un caso, lo que implica que en el aula es posible generar una discusión de manera intencional, desarrollando un nuevo concepto para el estudiante, como:

La factorización consiste en el proceso de expresar *como factores irreducibles una cantidad o expresión algebraica*.

4.1.3 Obstáculos ontogenéticos.

4.1.3.1 Enseñanza de matemáticas en personas con dificultades visuales. Los estudiantes con discapacidad visual, presentan una limitación para recibir información. Es allí donde el docente es quien en primera instancia debe proporcionar la información, ayudando a interiorizar, para hacer interpretaciones mediante el tacto o el oído especialmente con la intención que puedan crear sus propios procesos de generalización y modelación matemática (Rivera et al., 2021).

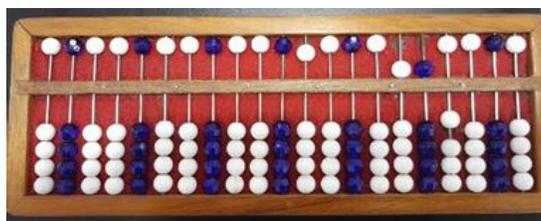
Partiendo de lo anterior, se realiza una entrevista semiestructurada con la profesora Andrea Rocha cuya formación es en educación especial, quien además posee dificultad visual severa y ha trabajado por trece años en el centro de rehabilitación para adultos ciegos (CRAC) en la ciudad de Bogotá, orientando la enseñanza del Braille y el programa de ÁBACO (anexo 2). Allí, la metodología se basa en la enseñanza de la escritura de números y símbolos matemáticos en braille. Para la representación de operaciones se hace a través del ábaco abierto (en niños) y ábaco cerrado (adolescentes y adultos).

Por ejemplo, a través del ábaco cerrado, se enseña primero a reconocer todas las partes del ábaco, en las que se incluye, el palo de forma horizontal que contiene marcas metálicas que indican las unidades de mil, millón, entre otros. Posterior a ello, se aborda la representación de cantidades a ambos lados (izquierda y derecha), lectura de cantidades a ambos lados. Esto se

hace porque se realizan las operaciones de forma horizontal. Y se les enseñan operaciones de suma, resta, multiplicación, división, regla de tres simple y porcentaje. Y en el caso de los estudiantes que asisten a educación regular, se les enseña potenciación, operaciones básicas con números fraccionarios, números mixtos, raíz cuadrada y cubica. La profesora Andrea, comenta que *“solo se enseñan estas porque son las básicas para poderse desempeñar en las demás áreas que conforman las matemáticas”* (la transcripción completa de la entrevista se presenta en el anexo 2).

Figura 5

Material didáctico para personas con discapacidad visual.



Nota: La figura representa el ábaco, como una de los materiales didácticos para la enseñanza de las matemáticas para los asistentes con dificultades visuales en el CRAC. Tomado del CRAC.

Complementando lo anterior, la docente comenta respecto a los estudiantes que asisten a educación regular que *“en braille, los chicos toman sus apuntes de las operaciones que les dictan en el colegio para que posteriormente puedan desarrollarlas en el ábaco”*.

Además, comenta que *“al ser un centro de rehabilitación, no enseñamos factorización, álgebra o trigonometría porque son más educativas. Los niños y jóvenes con limitación visual deben de aprender estas áreas en los colegios, en el aula regular, igual que sus compañeros videntes, la metodología que se implementa en la misma, sino que se hace adaptación del material cuando se requiere para que los usuarios con limitación visual logren comprender mejor los conceptos”*.

Lo anterior, nos lleva a situarnos que en la educación actual el docente de escuela pública o privada no cuenta con la formación no solo en el lenguaje braille, sino que también y en palabras de la profe Andrea “*no tienen conocimientos de cómo adaptar material y enseñarlo para que los estudiantes puedan comprender*”.

Y esto es vital, por las siguientes razones:

- La necesidad de traducir el lenguaje para que el alumno pueda comprender respecto a lo que está enseñando, tal y como lo ejemplifica Mantica et al (s.f., p.1025) “para expresar una fracción se anota primero el denominador y luego el numerador (exactamente lo opuesto a la escritura usual)”.
- Precisar su vocabulario para evitar que se generen interpretaciones equivocadas por parte del alumno.
- Debe ser cuidadoso para involucrar diversos registros simbólicos

4.1.4 Obstáculos didácticos.

4.1.4.1 Metodología de enseñanza de la factorización. Muchas veces el docente al enseñar factorización, en primer lugar, opta por “dictar” el concepto que encuentra en el libro de texto que está trabajando o brinda su propia interpretación del mismo y, en segundo lugar, no hace énfasis en su significado o generar esa gran pregunta que incluso inquieta a otros docentes: *¿y este aprendizaje de qué manera lo aplico?*

Posteriormente, procede a enseñar de forma algebraica, método usado con mayor frecuencia, los diferentes casos de factorización.

Lo anterior puede generar como consecuencia que un estudiante en el mejor de los casos, reconozca sin ninguna dificultad el algoritmo para expresar en forma de factores algún o algunos

casos de factorización; sin embargo, si se le pregunta ¿qué significa factorizar?, lo más probable es que responda: *no tengo idea* o pueda decir: *aplicar el paso a paso para resolver el caso que esté indicando el profesor*.

Todo esto se encuentra vinculado respecto a:

- Las formas de enseñanza enfocadas en brindar una matemática demostrativa, sin tener en cuenta la interpretación de los conceptos no corresponden a los tiempos actuales, en los que se respetan los estilos y ritmos de aprendizaje (Olfos et al, 2007).
- Muchos docentes se sienten en una “zona de confort” porque lo han enseñado de la misma forma en reiteradas ocasiones. (la transcripción completa de la entrevista se presenta en el anexo 5).
- No se realizan ejercicios de ambientación o procesos de metacognición.

Con respecto a esto, desde la propuesta, se invita al docente “tradicional” a enseñar desde otra perspectiva que le permita articular esos saberes que él domina junto a otras formas en las cuales se pueden generar aprendizajes realmente significativos, siendo esto un aprendizaje de forma bilateral.

4.1.4.2 Uso del material didáctico. El uso de material didáctico sin lugar a dudas genera ventajas frente al desarrollo de aprendizajes, siendo algunas de ellas las brindadas por González Marí (2010), (como se citan en Navarrete (2017, p.16)):

- Actividades matemáticas interactivas y motivadoras para hacer cambiar la actitud del alumnado hacia el ámbito de las matemáticas.
- Permite progresar con eficacia a la mayoría de alumnos/as mejor que otros procedimientos, técnicas o medios.
- Permiten al alumnado participar activamente y realizar actividades de manera autónoma.

En contraparte, también se presentan una serie de dificultades que están enfocadas “hacia las dificultades que el profesorado pueda tener y en segundo lugar las dificultades y problemas que generan la inducción de los materiales didácticos en un aula” (Navarrete,2017, p.17).

Estas dificultades están asociadas por ejemplo con el apoyo de la institución para la adquisición debido al costo económico, que la cantidad de material sea proporcional a la cantidad de estudiantes o grupos dentro del aula, afán por cumplir con la propuesta curricular de la institución, decisión del profesor para hacer uso del material, optando por enseñanza tradicional; entre otros. Y por supuesto que debe hacerse hincapié como factor determinante la postura de interés y participación que tenga el estudiante de involucrarse con el material.

Con el fin de ayudar a superar algunas de estas dificultades, se espera que la elaboración del material pueda responder a las mismas, tomando como referente a Proenza (2019, p. 22), al decir que “los materiales por sí solos no surten efecto, el poder de quien los utiliza para un fin es lo que los hace valiosos”.

4.2 Fase 2. Concepción y análisis a priori.

Teniendo en cuenta la revisión de la evolución del concepto de factorización, el rastreo de los antecedentes, el análisis de los obstáculos epistemológicos, ontogenéticos y didácticos entorno a la enseñanza y aprendizaje de la factorización y los resultados de la encuesta implementada, se diseña una primera versión de la propuesta didáctica.

4.2.1 Concepción de la propuesta didáctica.

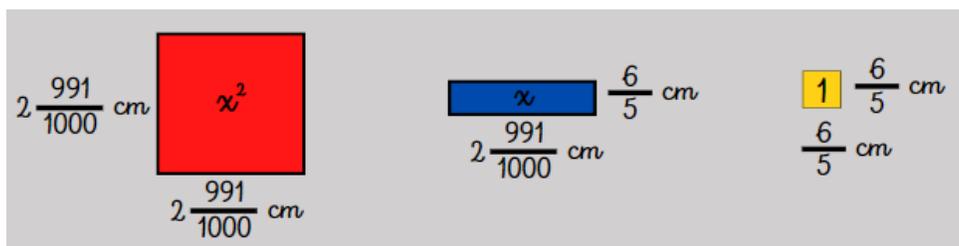
4.2.1.1 Estructura del material didáctico BoxSet.

4.2.1.1.1 Primer versión de las Fichas. En un comienzo, se piensa en el diseño de las fichas desde la idea que al realizar una representación geométrica de las fichas x^2 , x y 1 haciendo

tres tipos de fichas, no pudiese dar lugar a encajar segmentos que no sean correspondiente a la longitud de las fichas, ya que, al momento de determinar las medidas de la base y altura del paralelogramo de ángulos rectos construido, este no coincide con la cantidad de fichas usadas. Hecho que se ratificó posteriormente en la prueba de pilotaje con estudiantes. Por lo anterior, a continuación, se presentan una serie de fichas de colores, las cuales se utilizarán para representar de forma geométrica cada uno de los casos de factorización.

Figura 6

Fichas del material didáctico BoxSet.



Nota: La figura representa las dimensiones de las fichas que conforman el material didáctico BoxSet.

Elaboración propia.

Posterior a ello, se piensa en la impresión 3D de las fichas, mediante filamento eSUN PREMIUM PLA+. Este material se elabora a partir de recurso naturales y renovables como el almidón de maíz o caña de azúcar.

Figura 7

Fichas del material didáctico BoxSet impresas en 3D.



Nota: La figura representa las dimensiones de las fichas impresas en su primera versión, las cuales pueden ser usadas tanto por personas videntes como personas con discapacidad visual. Elaboración propia.

4.2.1.1.2 Primer diseño de la cartilla Boxset. Esta primera versión de la cartilla BoxSet está conformada por una serie de recursos que se describen a continuación:

4.2.1.1.2.1 Matriz de contenidos. Toda la metodología del BoxSet, se desarrolla en este apartado porque básicamente es la guía con la cual el docente podrá abordar los diferentes casos de factorización, partiendo desde ejercicios de representación con las fichas para familiarizar al estudiante con el material. Luego se encuentra con la interpretación geométrica la cual es de gran importancia que se aborde porque se articula con lo construido por el estudiante anteriormente. Seguidamente, se tiene la interpretación algebraica o algoritmo de desarrollo, donde el docente tiene la total libertad de tomar las sugerencias que se hacen o bien puede aplicar un método que él considere adecuado.

Una vez, abordados los procesos anteriores, se presentan unos retos o ejercicios en los cuales el estudiante potencializa las habilidades de representación geométrica de forma simultánea, es decir pasar de un tipo de representación a otra y porque no, el poder diseñar sus propios retos. Por último, se encuentra el cierre del caso abordado, en el cual se trabaja mediante el aprendizaje significativo desde la solución de situaciones problema, ya que a partir de esta es donde quizás se pueda evidenciar con mayor veracidad todo el proceso por el cual ha atravesado el estudiante. La cartilla completa se presenta en el anexo 8.

Figura 8

Cartilla BoxSet.

Recurso	Actividad	Tiempo	Observación
 <p>Fichas</p>	<p>Factorización mediante factor común</p> <p>Exploración BoxSet.</p> <p>2) Se le pedirá al estudiante que construya cuatro terrenos con las siguientes especificaciones:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1- Base $3x$ y altura x. 2- Base $3u$ y altura $2u$. 3- Base $3x$ y altura $2u$. 4- Base $6u$ y altura x. <p>Luego, pídale al estudiante a partir de los cuatro terrenos, una dos de ellos que tengan características similares (base o altura). Realizar el mismo proceso con los dos restantes.</p> 	15 minutos	

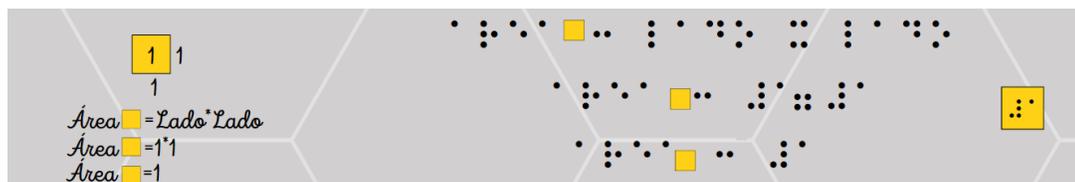
Nota: La figura representa la primera versión de la cartilla BoxSet, en la que se involucran estrategias para la enseñanza de los casos de factorización. Elaboración propia.

4.2.1.1.2.2 Videos explicativos. Es importante mencionar que, para las interpretaciones geométricas y algebraicas, se cuentan con videos explicativos que sirven como retroalimentación para aquellas situaciones donde se presenten inquietudes o el estudiante desee fortalecer estos procesos. Además de contar con un código QR como ayuda para la cartilla física.

4.2.1.1.2.3 Escritura en braille. La cartilla contará con escritura en Braille, ayudando a que más personas accedan a las matemáticas y particularmente en el aprendizaje del álgebra, generando procesos de inclusión y de esta manera aportar hacía la calidad educativa de la que se habla en nuestro país, atendiendo al obstáculo ontogenético considerado.

Figura 9

Cartilla Boxset en braille.



Nota: La figura representa la primera versión de la cartilla BoxSet en la que se involucra la escritura en braille. Elaboración propia.

4. 2.2 Análisis a priori.

Para realizar el análisis a priori se partió de la premisa que un análisis preliminar profundo, riguroso y sustentado debía atender a técnicas de investigación que permitieran cualificar efectivamente la propuesta final en virtud de la atención a diferentes variables didácticas involucradas en el despliegue efectivo de la propuesta en una eventual fase de experimentación, por lo que se realizó una prueba piloto con estudiantes de grado octavo, un

grupo focal con profesores de matemáticas y un testeó del material en braille con una docente con discapacidad visual.

4.2.2.1 Prueba de pilotaje.

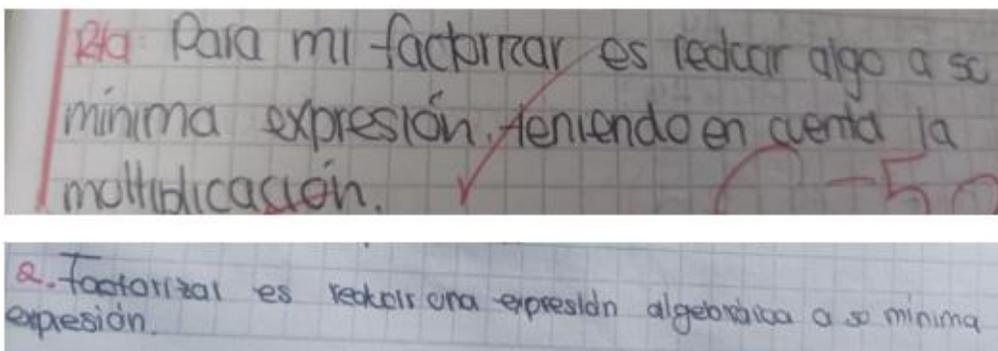
Con todas las estudiantes de grado octavo del colegio centro LESTONNAC compañía de María de la ciudad de Bogotá, se trabajaron algunos casos de factorización aplicando el contenido del material didáctico BoxSet descrito anteriormente. Se trabaja con esta población, ya que uno de los investigadores laboró en dicha institución con la población que se realiza el pilotaje.

En un primer momento se hace revisión del cuaderno de apuntes de algunos estudiantes y se observa que ya han abordado los dos primeros casos de factorización (factor común y por agrupación de términos), únicamente desde la representación algebraica cuyas actividades se centran en la ejecución de algoritmos. Luego, se comienza a trabajar con el material, partiendo de la construcción de las fichas mediante cartulina con unas medidas específicas. Así mismo, con participación de los estudiantes, de manera breve, se refuerza el concepto de área y la manera de hallar la medida de la superficie de cuadrados y rectángulos.

Por último, se ejecuta la guía “introducción Boxset” y posteriormente en un momento de la clase, se recogen los aprendizajes a través de la siguiente pregunta: *¿qué significa factorizar para ti?*, teniendo respuestas como la siguiente (anexo 7).

Figura 10

Proceso de metacognición del caso factor común.

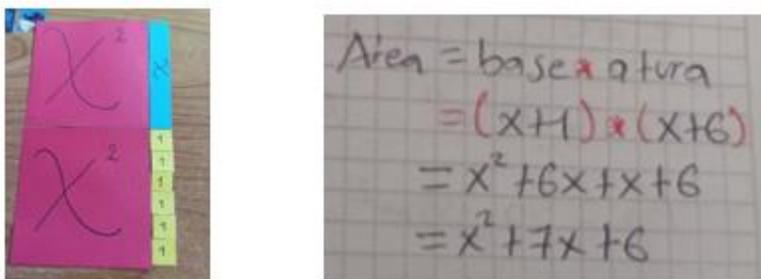


Nota: Tomado del cuaderno de apuntes de dos estudiantes del grado octavo (Lestonnac, 2022).

Por otra parte, con los estudiantes se hace un ejercicio que no está dentro de esta primera guía, pero con la intención de continuar haciendo uso del material. Esta consiste en formar cuadrados o rectángulos haciendo uso de las tres fichas y luego determinar su área, donde nos encontramos con un caso bastante particular. (Figura 10).

Figura 11

Representación geométrica del caso factor común.



Nota: Construcción y cálculo de área de un paralelogramo de ángulos rectos, realizada por una estudiante del grado octavo (Lestonnac, 2022).

Al hablar con la estudiante que realizó esto, nos comenta “*no vi con claridad en el tablero las medidas de las fichas porque no traía mis lentes y me da pena preguntar a mis compañeros o al profesor*” (estudiante 3).

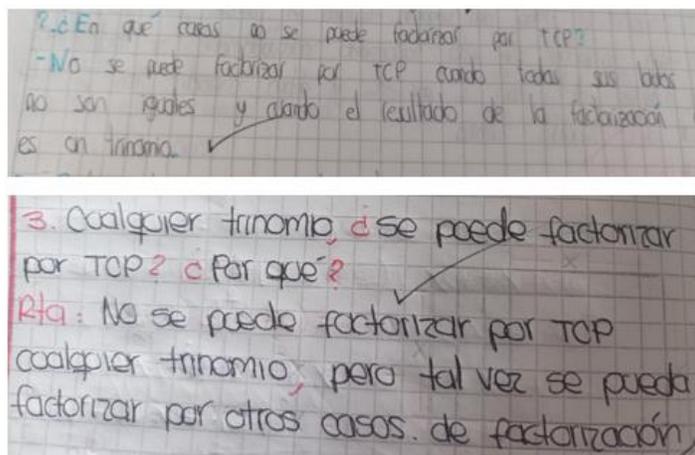
Lo anterior, es una evidencia de las medidas precisas que deben tener las fichas del BoxSet, apoyándose en el uso del tablero que viene en la caja y los videos, porque mitiga en lo posible que puedan hacerse representaciones por “encajar fichas”, ya que, en el momento de determinar el área de estas, y seguidamente hacer la prueba (multiplicar), no coincide con la cantidad de fichas usadas para esta representación.

En las siguientes sesiones, se observa una mayor aceptación del material didáctico por parte del docente y las estudiantes en las que en cada clase hacen uso de el, observando un mayor aprendizaje de la factorización mediante representación geométrica y algebraica por ejemplo para los casos de trinomios del tipo $x^2 + bx + c$; $ax^2 + bx + c$ y TCP. (anexo 7).

Por último, este pilotaje permitió reiterar la intención del BoxSet, en que esté ayuda a que el estudiante no se enfoque en memorizar el algoritmo para factorizar algún caso de factorización, sino que se piense como desde su representación geométrica, cobra sentido la representación algebraica de los mismos, fortaleciendo la esencia del aprendizaje significativo en relación con los aprendizajes desarrollados mediante situaciones reales y contextualizadas (figura 12).

Figura 12

Proceso de metacognición del caso de factorización mediante trinomio cuadrado perfecto.



Nota: Tomado del cuaderno de apuntes de dos estudiantes del grado octavo (Lestonnac, 2022).

4.2.2.2. Grupo focal

4.2.2.2.1 Diseño y planificación.

Partiendo de la propuesta de García y Rodríguez (2000), para la caracterización de población en grupos focales, se recogen elementos que sirven como insumo para la planeación, elaboración y desarrollo de nuestra propuesta hacia el grupo focal, centrándonos en tres hechos relevantes: la formación de los grupos, elaboración del guion y ejecución de la reunión.

4.2.2.2.1.1 Formación de los grupos. La convocatoria se hace a través referencias de colegas en las que se les comparte una invitación para asistir a una reunión el día 19 de junio de 2022 cuyos requisitos eran:

- Ser mayor de edad.
- No hay exclusividad del género.

- Tener experiencia enseñando en algún grado escolar, preferiblemente en secundaria, o en educación superior.
- Haber estudiado licenciatura en matemáticas o carreras afines.

Un número importante de personas fueron convocadas, confirmando su asistencia; sin embargo, el día de la reunión solo asistieron cuatro, con los cuales se desarrolló la reunión.

4.2.2.1.2 Elaboración del guion de la entrevista. El guion se elabora en torno a una serie de preguntas abiertas que están encaminadas hacia la percepción del material Boxset, acompañado de las experiencias en la práctica docente por parte de los participantes en la enseñanza de la factorización. Este guion fue realizado desde la asignatura de investigación II, donde se brindaron las orientaciones, retroalimentaciones y validación del instrumento, tomando como base el formato diseñado por la universidad La Gran Colombia (ver anexo 4).

Para el desarrollo de la sesión asumimos el papel de moderadores de forma alternativa: Elkin comienza realizando preguntas y posteriormente Luis también lo hace. Es importante mencionar que no hubo papel de relator por dos razones:

- Los participantes se encontraban con cámaras apagadas lo cual no permitió observar sus actitudes y/o emociones.
- Como la videoconferencia se encontraba en grabación, no era necesario anotar respuestas ya que después se analizará con detalle.

4.2.2.1.2.1 Entrevista semiestructurada. Este tipo de entrevista permite conocer el punto de vista de los docentes respecto al material BoxSet de una manera natural y cómoda. Por ende, las preguntas diseñadas se pensaron con la intención que se puedan abordar de manera relativamente abierta, respecto a una entrevista estructurada.

Para el desarrollo de la investigación, se realizó una entrevista semiestructurada a través de un grupo focal, entendiéndose en palabras de Martínez y Miguelez (s.f) como “un método de investigación colectivista, más que individualista, y se centra en la pluralidad y variedad de las actitudes, experiencias y creencias de los participantes, y lo hace en un espacio de tiempo relativamente corto” (como se cita en Hamui y Varela, 2013, párr. 1).

4.2.2.2.1.2.1 Grabación de la videoconferencia. Este instrumento permitió que se pudiera analizar con mayor detalle las apreciaciones que hicieron los docentes respecto al material una vez que este se les presentó. Siendo esta de mayor provecho para las mejoras que se realizarán al BoxSet posteriormente, desde su propósito, diseño y metodología con que se podrá enseñar.

4.2.2.2.1.3.1 Presentación CANVA. Al realizar videoconferencia, esta herramienta fue vital para que dar a conocer a los docentes el material, así como los aspectos considerados para su diseño.

4.2.2.2.2 Desarrollo de la reunión. La reunión se hizo de manera grupal a distancia mediante entrevista semiestructurada, usando un sistema de comunicación por internet por videoconferencia llamada Google Meet, que permite la comunicación de forma escrita, imagen, audio y transferencia de documentos. A través de esta plataforma, se pudo crear el escenario adecuado para la ejecución de la entrevista y cuya duración promedio fue de una hora aproximadamente.

Teniendo en cuenta esto, la reunión se desarrolló teniendo en cuenta lo propuesto por García y Rodríguez (2000) en cuatro etapas:

4.2.2.2.2.1 Fase 1: Introducción. Una vez se disponen los participantes en la reunión, el moderador 1 (Elkin) se presenta, da la bienvenida, expone de manera general el propósito de la

reunión el cual es “*conocer la pertinencia del material didáctico BoxSet para la enseñanza de algunas equivalencias algebraicas que se pueden representar geoméricamente*” Luego, explica las características particulares de los participantes, da a conocer aclaraciones preliminares como fomentar la opinión divergente ya que no existen respuestas correctas o incorrectas. Y se establecen reglas generales como la confidencialidad (se solicita autorización por parte de los mismos para grabar la reunión, con el fin que no se perdieran cuestiones importantes que posteriormente se analizaran). y promover la interacción entre los participantes.

4.2.2.2.2 Fase 2. Preparación del grupo. Se comienza con la presentación de cada uno de los participantes los cuales comentan su nombre, edad, formación académica y brevemente comentan su experiencia como docente de matemáticas. Esto ayuda a generar interacción entre los participantes.

4.2.2.2.3 Fase 3. Debate a fondo. Aquí se desarrolla el cuerpo de la reunión, desde el cual con el objetivo de enriquecer nuestro trabajo y de reflexionar sobre la forma en que estamos realizando nuestro proceso de enseñanza alrededor de la factorización, se les formuló la siguiente pregunta: ¿Utiliza o ha utilizado algún material didáctico para la enseñanza de la factorización?

Conociendo sus percepciones frente al mismo, tales como:

“Algunos años he utilizado presentaciones (Power point, Prezi) y Geogebra para representar algunos casos de factorización como trinomio cuadrado perfecto y x^2+bx+c . A su vez mostrar su desarrollo en el plano. Pero como tal con material didáctico, no.”- **Profesor 1.** (la transcripción completa de la entrevista se encuentra en el anexo 5)

Lo anterior, es el preámbulo para un primer acercamiento al material BoxSet. Seguidamente se comparte nuestra propuesta de investigación mediante presentación de CANVA, en la que se muestra todo lo que conforma el BoxSet y a su vez se realizan preguntas

evitando que los participantes tomen el control de la discusión o impongan sus puntos de vista. Esto nos ayuda a retroalimentar la propuesta para posteriormente hacer los ajustes necesarios para la respectiva impresión del material.

4.2.2.2.4 Fase 4. Clausura del grupo. Se finaliza la reunión agradeciendo en palabras del moderador 1 (Elkin Rodríguez):

“Para culminar, queremos darles las gracias por tomar parte de su tiempo, el contribuir con esta investigación. Todas sus opiniones son totalmente válidas que nos sirven, no solamente como el análisis a posteriori, sino que también nos sirve como un ejercicio de retroalimentación frente al material que estamos construyendo, el cual pasará a su versión 3D”.

Por último, después de la reunión, se encuentran los moderadores para comentar el desarrollo de la observación, dando paso al análisis del grupo focal.

4.2.2.2.2 Análisis del grupo focal. El análisis se aborda en primer momento desde la transcripción literal de la grabación (anexo 5), continuando con una lectura preliminar de dicha transcripción y posteriormente se elabora el guion de categorías, tales como, expectativa, beneficios, favorabilidad; entre otros. (anexo 6).

En segundo momento, se procede a la codificación de las transcripciones asignando a cada categoría, fragmentos de las transcripciones según corresponda.

Y en tercer momento, se hace el análisis de cada una de las categorías, centrándonos en las categorías: aspectos relevantes, diseño y limitaciones (la información completa se encuentra en el anexo 6). Estas se tomarán en consideración para el complemento y ajustes del material didáctico BoxSet.

Es así, que el grupo focal ayuda a encontrar aquellas falencias y fortalezas que se encontraron en el primer diseño del Boxset, el cual nos permite elaborar estrategias de mejora del material Boxset, transformándose en aprendizajes.

4.2.2.3 Prueba de testeo frente al material didáctico BoxSet con personas con discapacidad visual.

Por parte del CRAC, se nos hace una invitación para ensayar el material didáctico BoxSet, a través de la docente Andrea Rocha (ya mencionada anteriormente), en el que a través de una entrevista no estructurada se pone a prueba el material y para el presente escrito, tomaremos algunos fragmentos para analizar. (la entrevista completa se encuentra en el anexo 3). Se comienza presentando las fichas impresas, las cuales se les incluyó la numeración en braille para que la docente las manipule y oriente sobre la respectiva lectura. Al tomar la ficha amarilla en un primer momento nos dice que lee la letra “P”, pero seguidamente al rotarla nos dice que lee el número “uno”, por lo tanto, nos hace la sugerencia que *“las fichas en una esquina (la superior por lo general), tengan una parte plana o una textura (curva o un corte) para saber el derecho de la ficha”*.

Seguidamente, nos indica que el relieve escrito en braille que se encuentra en las fichas, es el apropiado, incluyendo la distancia entre los puntos; sin embargo, para el caso de la ficha amarilla, recomienda que esta sea un poco más grande con el fin que la numeración en braille no quede en el borde de la ficha. Ya lo que refiere al grosor y tamaño de las mismas comenta que *“a nosotros, las personas ciegas, nos sudan mucho las manos y este material permite un mejor agarre y no se daña con facilidad”*, por lo cual es apropiado, con excepción de la recomendación anterior de la ficha amarilla.

A continuación, se le indica a la docente que forme un paralelogramo de ángulos rectos, haciendo uso de las tres fichas y se observa que presenta dificultades en la construcción y por ende sugiere que *“diseñar una base y que las fichas tengan un adhesivo, de tal manera que las fichas se adhieran y no se muevan”*.

Figura 13

Manipulación de las fichas del BoxSet.



Nota: La figura construcción de un paralelogramo de ángulos rectos, por parte de la docente con discapacidad visual del CRAC. Elaboración propia. 2023.

Para finalizar, se le pregunta, ¿una persona con discapacidad en algún grado podría llegar a ser un profesional competente si recibiera una educación completa?, a lo cual responde: *“Claro que sí. Nosotros aquí hemos tenido usuarios (estudiantes) que han terminado su proceso de rehabilitación y se han incluido profesionalmente en sus carreras y aun la están ejerciendo. Alguna vez escuche sobre un profesor de matemáticas ciego, pero ha habido educadores especiales, abogados, profesores de idiomas.”*

Es importante mencionar que, debido a la discapacidad visual de la docente, no fue posible mostrar los contenidos de la cartilla para su respectiva percepción y retroalimentación.

4.2.2.4 Diseño final del material didáctico Boxset.

Teniendo en cuenta las diferentes observaciones y hallazgos del pilotaje, el grupo focal y la prueba de testeo, se realizan ajustes, siendo estas oportunidades de mejora que contribuyen al enriquecimiento del material didáctico BoxSet, los cuales se describen a continuación:

4.2.2.4.1 Diseño fichas BoxSet. Se realizan dos diseños de fichas:

- A) Para las personas videntes se mantendrán las dimensiones y forma de las fichas, con las medidas descritas en la fase de diseño.
- B) Para las personas con discapacidad visual, se redimensionan las fichas, así:
- Las fichas en la parte superior derecha, contarán con un relieve diferenciador, de tal manera que indique el orden en el cual se deben ser tomadas manualmente.
 - Se redimensionan las fichas con el fin de que la numeración en braille no se encuentre con los bordes de las fichas.
 - Las fichas contarán en la parte reversa con una cubierta en velcro para mayor agarre frente a la superficie.

Figura 14

Diseño final de las fichas BoxSet.



Nota: Elaboración propia.

4.2.2.4.2 Diseño de la caja. La parte superior de la caja contará con un tablero que servirá como guía para que el estudiante en lo posible cuando se realice una representación geométrica, no interprete esta como la conformación de cuadrados o rectángulos por encaje.

Figura 15

Diseño de la caja BoxSet.



Nota: La figura representa el diseño de la caja BoxSet, teniendo en cuenta que la parte superior cuenta con un tablero que servirá de apoyo en cuanto a la disposición de las fichas. Elaboración propia.

Así mismo, en la parte superior e interior de la caja (reverso), se incluirá un tapete en velcro para que las personas con discapacidad visual puedan apoyar las fichas y estas no se resbalen, lo que permite un mayor agarre.

4.2.2.4.3 Diseño final de la cartilla BoxSet. Para visualizar los elementos descritos a continuación de forma completa, puede dirigirse al anexo 9.

4.2.2.4.3.1 Tipografía. El tamaño de letra se aumenta (ejemplo Arial 14), dado que en primer lugar ayuda a las personas con baja de visión y segundo, al momento de imprimirse en braille (al ser este más grande en términos de espacio entre los puntos), debe ir escrito a la par que el texto en tinta, donde ambos deben coincidir de manera lineal.

4.2.2.4.3.2 Preguntas orientadoras. Antes de abordar los diferentes casos desde el aspecto geométrico, algebraico y aplicativo (situaciones problema), es importante que el estudiante pueda ir construyendo de forma intuitiva su propio concepto de factorización a través

de una serie de preguntas, las cuales aparte de guiar hacia la construcción de nuevos conceptos (factorización), refuerza presaberes (como es el caso de perímetro y área de figuras planas).

4.2.2.4.3.3 Metacognición BoxSet. Este aspecto es importante involucrar en nuestra propuesta porque ayuda al estudiante hacer ejercicios de autoevaluación respecto a lo que está aprendiendo y el cómo lo está aprendiendo en todo momento.

4.2.2.5 Aprendizaje de la factorización a través de la geometría.

“A principios del siglo diecisiete, gracias a la difusión de la obra de Viéte, algunos matemáticos empezaron a comprobar que los métodos algebraicos eran una herramienta muy útil *[sic]* para resolver problemas geométricos”. (Massa,2001, p. 708).

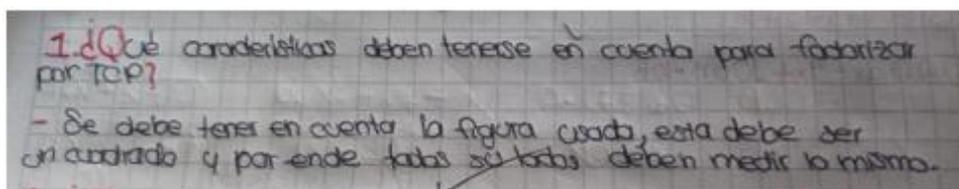
Por consiguiente, realizar un vínculo del álgebra y la geometría ayuda a mejorar los procesos de aprendizaje de la factorización, así como lo demuestra la prueba de pilotaje obteniendo las siguientes inferencias.

- 1- Los estudiantes pueden diferenciar con menos complejidad algún caso de factorización si se hace por representación geométrica respecto a la representación algebraica.
- 2- Los estudiantes pueden contrastar el algoritmo de un caso de factorización si le es posible representar geoméricamente.
- 3- En el docente genera una reflexión en torno al salir de la zona de confort (porque es posible que el docente conozca las representaciones geométricas o durante su formación académica nunca se le enseñaron), invitando a replantearse quizás sobre su metodología en cuanto a la enseñanza de ciertos aprendizajes y porque no, el impulsar hacia la investigación de maneras prácticas de enseñar con materiales didácticos.

De este modo, vemos como la factorización al aplicar otras metodologías, deja de lado el proceso mecánico de hacer ejercicios sin comprensión, llevándola hasta la aplicabilidad de algunos casos de factorización en contextos reales, resaltando el gran trabajo que hizo la geometría en esta propuesta de investigación. (anexo 7)

Figura 16

Metacognición BoxSet.



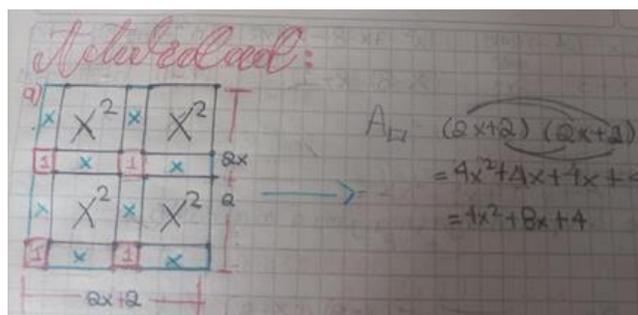
Nota: Cuaderno de trabajo de una estudiante durante la sesión de clase.

4.2.2.6 Algoritmo sugerido para la factorización de trinomios de grado 2.

En la prueba de pilotaje, se les propone a los estudiantes que revisen unas representaciones que realizaron usando las tres fichas en la primera sesión de clase y que traten de determinar a qué tipo de trinomio corresponden (ya habían abordado con anterioridad la factorización de trinomios con el BoxSet). Encontrándonos con lo siguiente.

Figura 17

Representación geométrica.

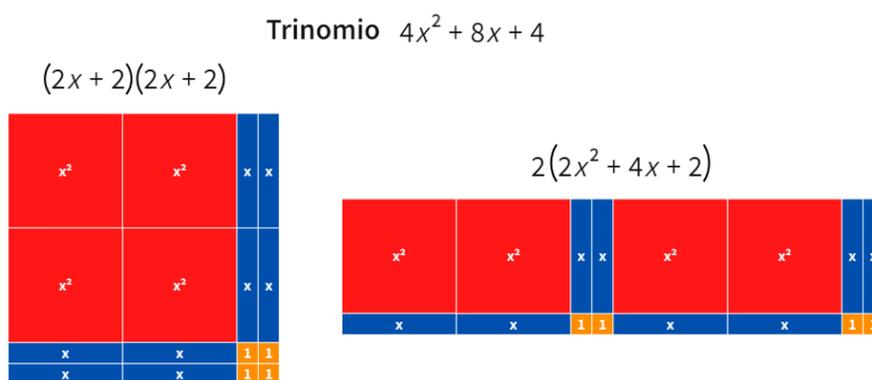


Nota: La figura representa la construcción geométrica de un trinomio. Tomada de “Cuaderno de trabajo de una estudiante durante la sesión de clase”. 2022.

En primer momento podría decirse que esta representación corresponde a un TCP, pues su base y altura tienen la misma medida, sin embargo, encontramos que el trinomio obtenido $4x^2 + 8x + 4$, es posible representarlo geométricamente como algebraicamente mediante los casos de la forma $ax^2 + bx + c$ y factor común.

Figura 18

Representación geométrica de un trinomio mediante software educativo (Mathigon).



Nota: La figura representa la construcción de un mismo trinomio de dos formas distintas, dando lugar que a expresiones algebraicas que pueden factorizarse, usando otros casos de factorización. Elaboración propia.

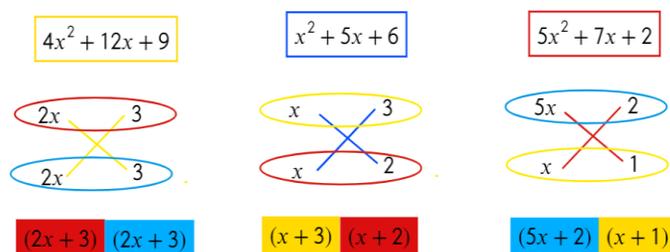
Por consiguiente, nos ha llevado a comprender que hay trinomios que no pueden ser expresados por factorización única sino completa, es decir, haciendo uso de diferentes casos de factorización. Así mismo nos hace cuestionarnos, respecto a la pregunta, *¿Por qué nos enseñan un algoritmo para cada tipo de trinomio?*

Frente a esta incógnita, podemos refutar con otra pregunta, a partir de los hallazgos realizados, *¿sería más práctico abordar los tres tipos de trinomio desde un único algoritmo?*

En efecto, si es posible dar una respuesta clara frente a la pregunta en cuestión a través del siguiente ejemplo.

Figura 19

Representación algebraica de trinomios.



Nota: La figura representa la factorización de tres tipos de trinomios mediante un mismo algoritmo.

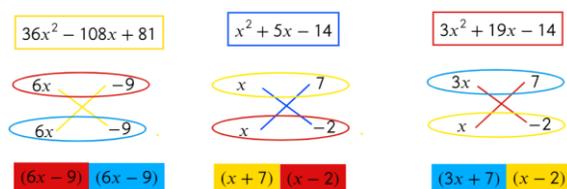
Elaboración propia.

Al revisar los tres trinomios, estos se encuentran con la misma estructura, la cual es $ax^2 + bx + c$, diferenciándose únicamente por el coeficiente “a”, que para el segundo ejemplo (rectángulo azul) toma el valor de 1, por ende, es posible que puedan ser factorizados mediante el mismo algoritmo (explicado en la cartilla) y cuyas representaciones pueden realizarse a través del material didáctico.

Este algoritmo, también se puede abordar con trinomios cuyas expresiones algebraicas contenga signos negativos (ver imagen), haciendo énfasis que en la propuesta de investigación que estos sólo pueden abordarse mediante su representación algebraica (en el marco teórico se explica el motivo).

Figura 20

Representación algebraica de trinomios.



Nota: La figura representa la factorización de trinomios con expresiones negativas mediante el un mismo algoritmo.

Por último, se recomienda el siguiente algoritmo para factorizar trinomios mediante representación algebraica, el cual también es una de las mejoras que se hicieron al material didáctico BoxSet:

1. Descomponer el primer término únicamente en dos factores y luego escribirlos en forma de columna. Seguidamente, se realiza el mismo procedimiento con el tercer término y escribirlo en forma de columna paralela a la anterior formada.
2. Los valores obtenidos en ambas columnas, deben multiplicarse en forma de aspas (cruz), de tal manera que al sumar dichos resultados se obtenga el segundo término.
3. Si lo anterior está correcto, entonces los dos factores a formar serán la unión de los pares que se encuentran de forma horizontal de las dos columnas paralelas. (ver imagen arriba).

A continuación, se presentan las conclusiones que surgieron a lo largo de la presente propuesta de investigación y en la ejecución secuencial de los objetivos específicos, enfocados en determinar los elementos didácticos para el diseño de una secuencia didáctica, específicamente que ayude a fortalecer los procesos de enseñanza de la factorización, acercando a docentes y estudiantes a la construcción y aplicación de la factorización.

CAPÍTULO VI: Conclusiones y Recomendaciones.

Para el presente capítulo, teniendo en cuenta los resultados, hallazgos y descubrimientos obtenidos, teniendo en cuenta la secuenciación de las fases desarrolladas de la ID,

6.1 Conclusiones.

La piedra angular de la propuesta didáctica, parte del análisis de los resultados de la encuesta realizada sobre la caracterización de materiales didácticos, la cual permitió en primera instancia el reconocer que existen algunos materiales para la enseñanza de la factorización tales como domino de expresiones factorizadas, simulaciones en GeoGebra de casos como factor común y TCP, cubos desarmables, y construcción de áreas mediante fichas en papel, cartulina o cartón (adaptado por el docente para tal fin) para representar casos como cuadrado de un binomio. Sin embargo, es claro que también nos permitió rectificar que en efecto hay un desconocimiento de estos por parte de muchos docentes e instituciones para la enseñanza de las matemáticas en básica secundaria y media, lo que posiblemente conlleva a un aprendizaje en el cual se centra en la ejecución de algoritmos para la resolución de problemas.

También, haciendo revisión a varias propuestas como la plataforma MATHIGON, que si bien tienen una clara intención de proponer un material didáctico para la enseñanza de la factorización como la elaboración de fichas con áreas como $x, x^2, y, y^2, xy, -x, -xy, -x^2, -y^2$. En estas últimas (con signo negativo), se presenta una falencia a nivel conceptual porque el estudiante puede entenderlo como “*las áreas pueden ser negativas*” o desde una postura docente tal como “*no es posible restar un área que no existe*” y no con la intención que se propone, que consiste en restar un área respecto a otra como se evidencia en la diferencia de cuadrados del BoxSet, en la que se aborda desde la superposición.

Es así que tomando la ingeniería didáctica como metodología de investigación; nos pensamos desde un comienzo en elaborar unas fichas en material reciclable que no solo mitigue la falencia descrita anteriormente, sino que también se eviten representaciones por encaje (entendiéndose este como aquel proceso en el que las fichas coincidan sus segmentos a una naturaleza diferente de las mismas).

Así mismo, la ID tiene una estructura que permite separar y relacionar acciones que son determinantes para el diseño de la propuesta. Comenzando con un análisis epistemológico, por el cual se hace un acercamiento histórico de la factorización, donde se observa el cambio de su concepto con el tiempo, la forma en cómo se observa y enseña en diferentes épocas.

A partir de esto, se empieza a estructurar un BoxSet para la enseñanza de la factorización que atienda algunos obstáculos epistemológicos como el considerar la evolución del lenguaje algebraico en la medida que se reconoce que a nivel histórico y cultural el tránsito entre diferentes maneras de abordar la letra y la generalidad, pasa por las formas de expresión de estos elementos y que en el mismo sentido el aprendizaje del algebra escolar podría emular estos tránsitos entre diferentes formas de expresión algebraica teniendo en cuenta que ha sido un proceso cognitivo desarrollado por la humanidad en el proceso de darle significado al álgebra y a sus formas de expresión y representación.

De igual manera, se involucran en el BoxSet el atender obstáculos didácticos como la metodología del docente y diseño de material manipulativo para la enseñanza de la factorización, a partir de la creación de una cartilla con un contenido de forma secuencial, visualmente agradable y llamativo.

Durante el diseño de las actividades se presentaron situaciones como “cuantas, y cuales actividades estarían acordes a realizar”, a medida que se abordan los diferentes obstáculos para

mitigar conceptos como “insuficiente”, “extenso” y “complejo” respecto a las mismas. El diseño de actividades depende de quien las elabore teniendo en cuenta el cuándo finalizarlas antes de darle prioridad a la cantidad y que posiblemente no puedan cumplirse.

Así mismo, la cartilla consta de videos de apoyo, elaboración de preguntas metacognitivas para procesos de retroalimentación, construcción de interpretaciones para los casos de factorización a través de un lenguaje menos formal, con el fin de acercar al estudiante hacia el aprendizaje de una manera más amena, elaboración de situaciones problema significativas en las que se trabaja la argumentación matemática y la elaboración de fichas para la representación de áreas de paralelogramos de ángulos rectos para personas con visión normal y para personas con alguna dificultad visual o ceguera, haciendo uso de la escritura en Braille, lo que representa un reto debido al uso de los sentidos en la clase de matemáticas y así realizar un acercamiento al obstáculo ontogenético propuesto.

Frente a lo anterior, queremos mencionar que a pesar que se continúa con el tabú respecto a que las personas con discapacidad cuentan con muchas limitaciones, en la presente investigación nos percatamos que son personas increíbles con formas de aprendizaje diferente, quienes, a través de un proceso de adaptación debido a su condición visual, pueden llegar a ser grandes profesionales si se les apoya y brinda una educación (matemática para este caso) completa.

Por otra parte, el validar la pertinencia del BoxSet a través de la prueba de pilotaje y los aportes del grupo focal, nutren de manera sustancial el diseño de la propuesta. Por ejemplo, el involucrar la metacognición, que en muchas ocasiones no se considera en el aula y por el contrario se finaliza un aprendizaje de manera forzada, hecho que se mitigó y catapultó los resultados de la prueba de pilotaje, donde todo el compendio del BoxSet, generará en el

estudiante un aprendizaje perdurable, visto desde lo geométrico, reconociendo, comprendiendo y argumentando el algoritmo y sentido de la factorización algebraica.

A su vez, existen otras propuestas didácticas (algunas referenciadas en los antecedentes) para la enseñanza de la factorización a través del álgebra geométrica que están apoyadas por Apps y software, sin embargo, esta propuesta no se centra únicamente en reunir casi todos los casos que pueden ser representados geoméricamente junto a un diseño especial de fichas, sino que, da sentido al ¿por qué? y ¿para qué? el aprender factorización, fortaleciendo los procesos de enseñanza, cumpliendo con el objetivo general de nuestra propuesta de investigación .y de esta manera generando aprendizaje significativo, tal y como lo menciona Beltrán (2019), “pues de poco sirve que un estudiante tenga acceso a la información y sea dada por un agente externo si el mismo no tiene una aceptación del mismo.” Además de tener en cuenta a la población con discapacidad visual (p.113).

Lo anterior, acarrea una reflexión sobre algunas dimensiones que conlleva la elaboración de una intervención pedagógica, lo que evidencia la complejidad de la planeación docente y la creación de material didáctico, siendo el resultado de un constructo complejo toda vez que debe atender diferentes particularidades, que desde el enfoque asumido se consideran como variables didácticas.

La experiencia de diseñar material didáctico fue más allá de desarrollar una competencia adicional, llegando a la elaboración de un material impreso en el que se pensó en forma, tamaño, color, textura y diseño que desde los obstáculos didácticos nos permitió atender los objetivos de la investigación.

6.2 Recomendaciones.

6.2.1 Cuando se enseña la factorización algebraica de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$, $ax^2 + bx + c$ y TCP, se presenta un algoritmo para cada caso, ¿por qué se enseñan tres algoritmos distintos si al final todos son trinomios? Por lo cual, sería más práctico hacer uso del algoritmo sugerido y al tener las expresiones factorizadas, basta con diferenciar entre cada uno a partir de unas características particulares (anexo 9).

6.2.2 Las instituciones dentro de las capacitaciones que realizan durante el año, deberían involucrar algunas que están enfocadas en las nociones básicas de lectura y escritura del lenguaje Braille porque de esta manera los docentes pueden enfrentarse a lo que realmente es estar en la posición de las personas con inclusión, enriqueciendo su formación profesional y personal.

6.2.3 En la formación de los docentes de matemáticas, la universidad se enfoca únicamente en la parte algorítmica de diversos temas que, como futuros docentes, enseñaremos al enfrentarnos al aula, sin embargo, es importante que se brinde prioridad al uso de la didáctica porque nos vamos a enfrentar a niños, adolescentes e incluso adultos y a través de esta es posible fortalecer los procesos de enseñanza.

6.2.4 Algunas instituciones educativas y/o docentes, no destinan el tiempo suficiente para abordar la los diferentes aspectos que conforman la factorización, quizás por el afán de cumplir dentro de los tiempos establecidos con el desarrollo curricular (teniendo en cuenta geometría y estadística) que tiene a cargo, por lo cual sería necesario brindar un mayor lapso de tiempo para que pueda llevarse a cabalidad, lo relacionado con el aprendizaje de este concepto desde los ámbitos que se exponen en la presente propuesta de investigación.

6.2.5 Es importante mencionar que, al realizar un material manipulativo, este tenga coherencia con el material escrito que lo soporta. De igual manera, cada vez que se realice la aplicación del

mismo, se encontraran nuevos hallazgos que deben ser reportados para que posteriormente se trabaje desde su retroalimentación para fortalecer sucesivas aplicaciones del material en la que se identifiquen sus oportunidades de mejoramiento.

REFERENCIAS.

- Acevedo Ríos, H. (2015). *Enseñanza de factorización, con la ayuda del material didáctico “El álgebra es un juego”*. RECME, 1(1), pp. 522-526. Repositorio institucional de la Universidad de los Andes. <http://funes.uniandes.edu.co/8560/>
- Alsina, C., Burgués, C & Fortuny, J. (1991). *Materiales para construir la geometría*. Síntesis.
- Álvarez Rodríguez, M.C.(2019). *¿por qué en Colombia las matemáticas han presentado dificultad en el proceso de la enseñanza - aprendizaje, siendo estas una de las bases de la educación de nuestro país?*. [Tesis de pregrado, Universidad Cooperativa de Colombia]. Repositorio institucional. <https://repository.ucc.edu.co/items/5be3e1e0-5afd-48ef-aad2-c848a9c8c78a>
- Andrade Escobar, C. (2011). *Obstáculos didácticos en el aprendizaje de la matemática y la formación de docentes*. En Lestón, Patricia (ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 999-1007). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Repositorio institucional. <http://funes.uniandes.edu.co/5056/>
- Artigue, M & Douady, R., Moreno, L. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. (1ª ed.). Grupo Editorial Iberoamérica. <http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf>
- Baldor, A. (1941). *Álgebra*. Patria. <https://guao.org/sites/default/files/biblioteca/%C3%81lgebra%20de%20Baldor.pdf>
- Ballén Novoa, J. (2012). *El álgebra geométrica como recurso didáctico para la factorización de polinomios de segundo grado*. [Tesis de pregrado, Universidad nacional de Colombia]. Repositorio institucional. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/10836>

- Ballén Novoa, J. (2012). *El álgebra geométrica como recurso didáctico para la factorización de polinomios de segundo grado*. [Tesis de maestría, Universidad nacional de Colombia].
Repositorio institucional. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/10836>
- Bello, I. (2005). *Álgebra*. Thomson.
- Beltrán, J. (2019). *Propuesta de actividades para la enseñanza de las cónicas desde el diseño de una Ingeniería Didáctica*. [Tesis de maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas].
Repositorio institucional. <https://repository.udistrital.edu.co/handle/11349/15277>
- Blázquez, R. (2014). *La discapacidad visual y el aprendizaje de las matemáticas en el contexto aula*. [Tesis de pregrado, Universidad de Salamanca]. Universidad de Salamanca.
https://gedos.usal.es/bitstream/handle/10366/133109/2014_TFG_BI%C3%A1zquezJoya%20CRaquel_La%20discapacidad%20visual%20y%20el%20aprendizaje%20de%20las%20matem%C3%A1ticas%20en%20el%20aula.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- Botero Ramirez, L. S. (2014). *Diseño de una estrategia didáctica para la enseñanza de la factorización utilizando geometría, para los cursos básicos de matemáticas en el primer semestre universitario*. [Tesis de maestría, Universidad nacional de Colombia]. Repositorio institucional. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/54032>.
- Britannica digital learning unabridged. (2023). *Merriam-Webster*. Obtenido el 02 de Enero de 2023, desde <https://www.merriam-webster.com/dictionary/box%20set>
- Cacpata, C & Montaña, S.(2018). *Los recursos multimedia en el aprendizaje de los casos de factorización*. [Tesis de pregrado, Universidad de Guayaquil]. Repositorio institucional. <http://repositorio.ug.edu.ec/handle/redug/36607>

- Cetina, A. D. (2017). *Factotic, plataforma virtual para el aprendizaje de la factorización*. [Tesis de pregrado, Universidad La Gran Colombia]. Recuperado de: <http://hdl.handle.net/11396/4446>. Repositorio institucional. <https://repository.ugc.edu.co/handle/11396/4446>
- Colegio Santa María de la Providencia. (S.f). Proyecto TIC TAC TEP uso de las tecnologías para la mejora del proyecto educativo. <https://www.smprovidencia-alcala.es/proyecto-educativo/nuestros-programas/nuevas-tecnologias-tic-tac-tep/#:~:text=Las%20TEPs%2C%20NO%20SOLO%20COMUNICAN,INCIDENCIA%20SOCIAL%20Y%20AUTORREALIZACI%C3%93N%20PERSONAL>
- D'Amore, B & Fandiño, M. (2002). *Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica"*. Educación Matemática, 14(1), pp. 48-61 . <https://doi.org/10.24844/EM1401.03>
- Del Carmen, B., Digión, M., Llanos, L., Marcoleri, M., Motalvetti, P & Soruco, O. (2011, Junio 26 - 30). *Obstáculos didácticos, ontogenéticos y epistemológicos identificados desde la comunicación en el aula de Matemática*. [Conferencia]. XIII conferencia interamericana de educación matemática, Recife, Brasil. Recuperado de: http://www.unsj.edu.ar/unsjVirtual/diplomatura_educacionNuevasTecnologias/wp-content/uploads/2015/08/738-obstaculos.pdf
- Delgado, J & Butto, M. (2015). El álgebra geométrica de Euclides. Una experiencia en la enseñanza del algebra. *Revista Horizontes Pedagógicos*, 17(2), 53-64. <https://horizontespedagogicos.iberro.edu.co/article/view/17205/767>
- Díaz, F (2016, Octubre 20-21). *Conocimiento del estudiante y saber institucional en situaciones de aprendizaje con uso de software de geometría dinámica*. [Conferencia]. Comunicación presentada en Encuentro de Investigación en Educación Matemática - EIEM. Barranquilla, Colombia. Repositorio institucional. <http://funes.uniandes.edu.co/10450/>

- Domínguez, Y. (2016). La utilización de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) en el aprendizaje universitario. *Universidad y Sociedad* [seriada en línea], 8 (4). pp. 158-163. <http://scielo.sld.cu/pdf/rus/v8n4/rus21416.pdf>
- Euclides. (1991). *Elementos* (Vol. 1). (M. L. Castaños, Trad.). Gredos.
- Feria, M. (2020, agosto). Modelo de las situaciones didácticas (parte II). <https://cuestioneseducativas.uexternado.edu.co/modelo-de-las-situaciones-didacticas-parte-ii/>
- Flores, P., Lupiáñez, J. L., Berenguer, L., Marín, A & Molina, M. (2011). *Materiales y recursos en el aula de matemáticas*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. <http://hdl.handle.net/10481/21964>
- García, M & Rodríguez, I. (2000). El grupo focal como técnica de investigación cualitativa en salud: diseño y puesta en práctica. *Atención primaria*, 25 (3), 181-186. <http://unidaddocentemfyclaspalmas.org.es/resources/5+Aten+Primaria+2000.+Grupo+Focal+Dise%C3%B1o+y+Practica.pdf>
- Gómez Mulett, A.S.(2018). La educación matemática en Colombia: origen, avance y despegue. *Fides Et Ratio*, Volumen (16), 124- 145. http://www.scielo.org.bo/pdf/rfer/v16n16/v16n16_a08.pdf
- Guerrero Armas, A. (2009). Los materiales didácticos en el aula. *Federación de enseñanza de CC.OO de Andalucía*, (5), 1-7. <https://www.feandalucia.ccoo.es/docu/p5sd6415.pdf>
- Hamui, A & Varela, M. (2013). La técnica de grupos focales. *Investigación en educación médica*, 2(5), 55-60. <https://www.elsevier.es/es-revista-investigacion-educacion-medica-343-articulo-la-tecnica-grupos-focales-S2007505713726838>
- Islas Torres, C, & Carranza Alcantar, M. Ecosistemas digitales y su manifestación en el aprendizaje: Análisis de la literatura. *RED*. (55), 1-13. http://www.um.es/ead/red/55/islas_carranza.pdf

Joya, A., Acosta, M., Castaño, J & Tami, J. (2019). *Activamente matemáticas* 8. (1ª ed.). Santillana.

Judson, T. (2022). *Abstract Algebra*. Orthogonal Publishing L3C. <http://abstract.ups.edu/aata-es/section-poly-rings.html>

Lizana, D & Antezana, R. (2021). Representación semiótica en el aprendizaje de conceptos básicos de la estructura algebraica de grupo. *Horizonte de la Ciencia*, 11 (21), pp. 177-188.

<https://www.redalyc.org/journal/5709/570967307013/html/>

Malisani, E. (1999). los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico visión histórica. *IRICE*, (13), 1-10. <https://xdoc.mx/preview/los-obstaculos-epistemologicos-en-el-desarrollo-del-pensamiento-5e28ad8123d2a>

Mántica, A. M., Götte, M & Dal Maso, M. (2014). *La enseñanza de la matemática a alumnos ciegos y disminuidos visuales. El relato de una experiencia*. En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 1023-1030). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Repositorio institucional.

<http://funes.uniandes.edu.co/5660/>

Massa, A. (2001). Las relaciones entre el álgebra y la geometría en el siglo XVII. Lull: *Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, 24 (51), 705-726.

<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=460376>.

Mejía, M.F. (2004). *Análisis didáctico de la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas*. [Tesis de pregrado, Universidad del Valle].

<http://funes.uniandes.edu.co/1761/1/TesisCompletaMar%C3%ADaFernandaMej%C3%ADaPalomino.pdf>

- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. (1ª ed.) Ed. Ministerio de Educación Nacional. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Serie de lineamientos curriculares*. (ed.). https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf.
- Morales, I.(2008). *Propuesta de enseñanza para la factorización algebraica*. [Tesis de maestría, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo]. http://bibliotecavirtual.dgb.umich.mx:8083/xmlui/bitstream/handle/DGB_UMICH/3250/FIS_MAT-M-2008-0002.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- Navarrete, P. (2022, abril). *Importancia de los materiales didácticos en el aprendizaje de las matemáticas*. <https://crea.ujaen.es/handle/10953.1/5752>
- Nerici, I. G (1973). Didáctica. Nerici, I. G (Ed), *Hacia una didáctica general dinámica*. (2da ed., pp. 56-70). Kapelusz. http://biblio3.url.edu.gt/Libros/didactica_general/2.pdf
- Olfos Ayarza, R., Soto, D & Silva Crocci, H. (2007). Renovación de la enseñanza del algebra elemental: un aporte desde la didáctica. *Estudios pedagógicos*, 33(2), 81-100. <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052007000200005>
- OMS. 2014. *Ceguera y Discapacidad Visual*. Organización Mundial de la Salud. Nota descriptiva N° 282. [Consultado el 20 agosto de 2022]. https://www.conadisperu.gob.pe/observatorio/wp-content/uploads/2019/01/discapacidad_visual_OMS.pdf
- Osorio Pinilla, D. M. (2020). *La argumentación en el aprendizaje de la factorización de polinomios cuadráticos*. [Tesis de maestría, Universidad autónoma de Manizales]. Repositorio institucional. <https://repositorio.autonoma.edu.co/handle/11182/1136>.

- Ospina Sepúlveda, M. (2015). *Guía didáctica para el aprendizaje de la factorización del CLEI IV del ITM*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio institucional. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/56850>.
- Proenza, E. (2019). *Introducción al álgebra con material manipulativo en educación secundaria*. [Tesis de maestría, Universidad de Alcalá]. Universidad de Alcalá. https://ebuah.uah.es/dspace/bitstream/handle/10017/43530/TFM_Proenza_Quiros_2019.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- Ramírez, M., Salazar, F., Joya, A & Cely, V. (2010). *Hipertexto matemáticas 8*. (8ª ed.). Santillana.
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/28318960_Sobre_las_Nociones_de_Representacion_y_Compreesion_en_la_Investigacion_en_Educacion_Matematica
- Rincón, W. (2014). Preguntas abiertas en encuestas ¿cómo realizar su análisis?. *Comunicaciones en estadística*, 7 (2), 25-43. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7396413>
- Rivera, D.(2020). *Enseñanza de la factorización a partir de la relación entre álgebra y geometría*. [Tesis de maestría, Universidad nacional de Colombia]. Repositorio institucional. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/77879>
- Rivera, E., Morales, Y & Arango, N. (2021). Estudiantes con discapacidad visual y su aprendizaje de las matemáticas en la educación superior modalidad distancia –tradicional. *Praxis Pedagógica*, 21(31), 57-80. <http://doi.org/10.26620/uniminuto.praxis.21.31.2021.57-80>
- Rojas, P. (2010). (2010, octubre 7-9). Iniciación al álgebra escolar: elementos para el trabajo en el aula. [Conferencia]. *Curso dictado en 11º Encuentro Colombiano Matemática Educativa*, Bogotá, Colombia.

http://funes.uniandes.edu.co/1168/1/115_Iniciacin_al_lgebra_Escolar_Elementos_para_el_Trabajo_en_el_Aula_Asocolme2010.pdf

Rojas, P., Rodríguez, J., Romero, J., Castillo, E & Mora, L. (1999). *La transición aritmética-álgebra*. (2ª ed.). Grupo editorial Gaia.

http://edumat.udistrital.edu.co:8080/documents/47902/262723/LibroTransicion+Aritmetica-Algebra_Grup+MESCUD_U_Distrital_1999.pdf

Sánchez, J. (2022, junio). *La matemática en la India: 500-1200 d. C.*.

https://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/4/4_matematica_india.pdf

Santos, M. (2022, junio). *Reflexiones acerca de un esquema alternativo para la enseñanza de la matemática*. <http://publicaciones.anuies.mx/acervo/revsup/res050/txt7.htm#top>

Secretaria de Educación Distrital (SED). (2020). *Plan individual de ajustes razonables – PIAR*.

[Diapositivas de PowerPoint]. Educación Bogotá.

https://www.educacionbogota.edu.co/portal_institucional/sites/default/files/11---PRESENTACION--LOS-PIAR.pdf

Torres, J. Mora, L. & Luque, C. (2004). *Factorización algebraica*. Memorias XV encuentro de Geometría y II de Aritmética. 177 - 185. Universidad pedagógica.

<http://matematicas.unex.es/~navarro/algebralineal/euclides1.pdf>

Valarezo Castro, J. W., & Santos Jiménez, O. C. (2019). Las Tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento en la formación docente. *Revista Conrado*, 15(68), 180-186. Recuperado de

<http://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado>

Villarroel Solís, J. M.(2014). *Propuesta para la enseñanza de las operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) y el proceso de factorización de polinomios, con la herramienta didáctica “caja de polinomios”, en estudiantes de grado octavo de la I.E María*

Cano del municipio de Medellín. [Tesis de maestría, Universidad nacional de Colombia].

Repositorio institucional. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/51789>

Anexo 1.

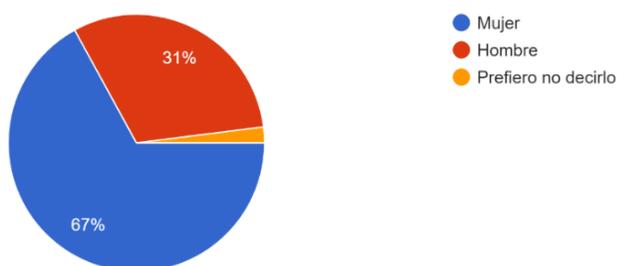
Encuesta de caracterización de materiales didácticos matemáticos.

La siguiente encuesta, se realiza a docentes de matemáticas que han enseñado en cualquier nivel educativo. Centrándose en el uso de material de didáctico que utilizan o han utilizado dentro de sus prácticas docentes para la enseñanza de la factorización.

Link: https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSdyEkp-wUVz_Ccm9PaurhPnXBYLNJzc02GwFVmIIYfEeE_WA/viewform?usp=sf_link

Figura 1

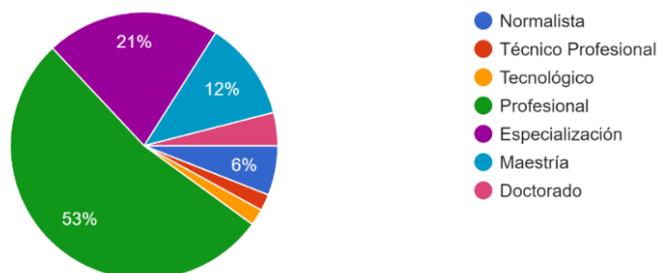
Porcentaje de docentes, según su género.



Nota: Elaboración propia.

Figura 2

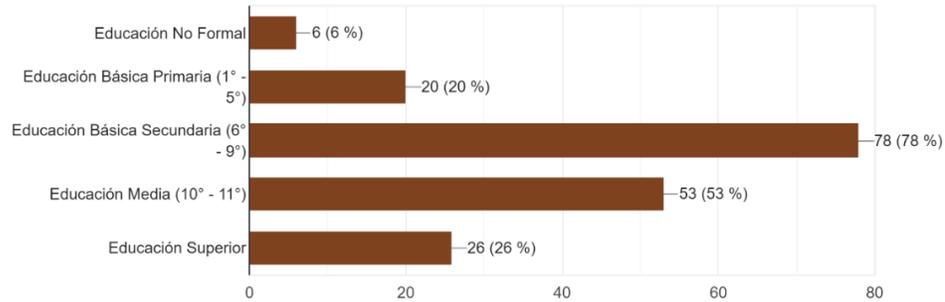
Porcentaje de docentes, según su formación académica.



Nota: Elaboración propia.

Figura 3

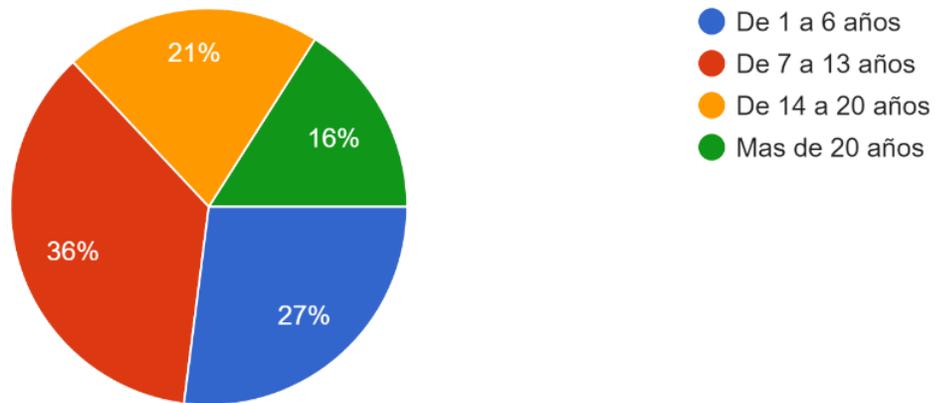
Porcentaje de docentes, según el nivel educativo donde enseñan o han enseñado.



Nota: Elaboración propia.

Figura 4

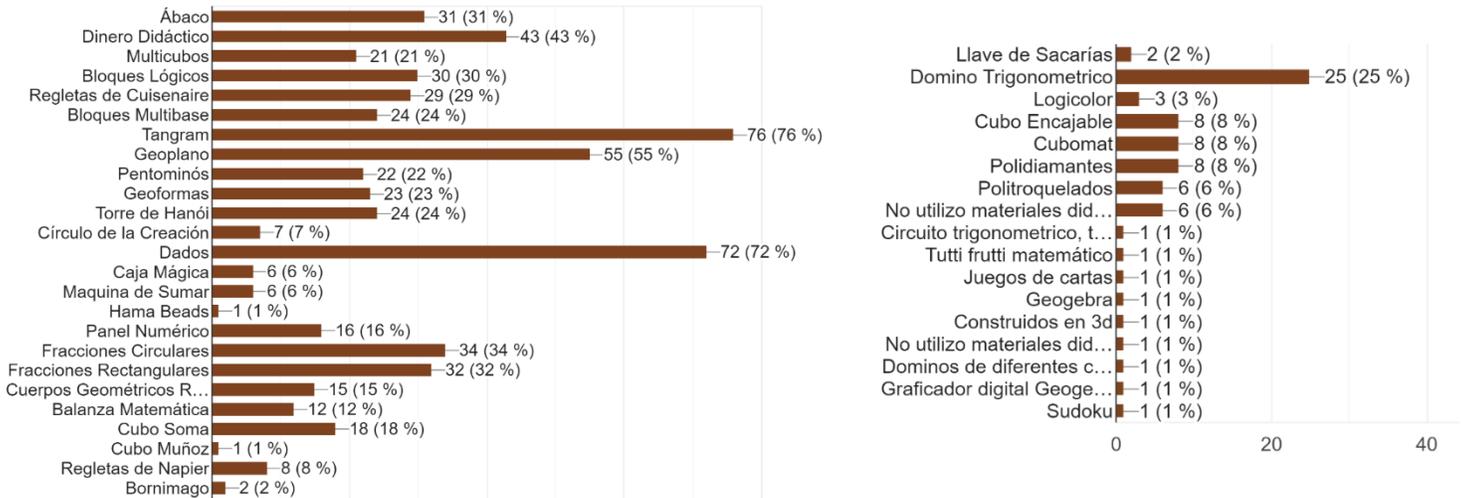
Porcentaje de docentes, según su tiempo de experiencia.



Nota: Elaboración propia.

Figura 5

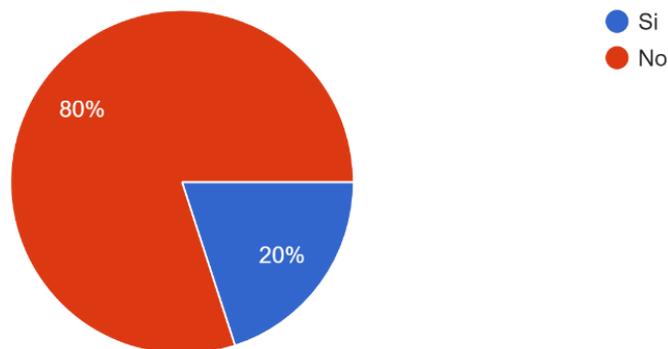
Porcentaje de docentes, según materiales didácticos que utiliza o ha utilizado en la enseñanza de las matemáticas.



Nota: Elaboración propia.

Figura 6

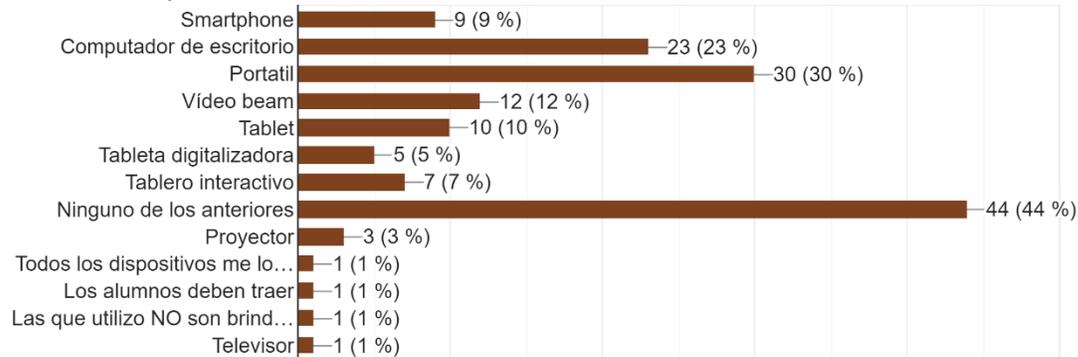
Porcentaje de docentes, según si la institución educativa proporciona o no materiales didácticos para fortalecer los procesos de aprendizaje.



Nota: Elaboración propia.

Figura 7

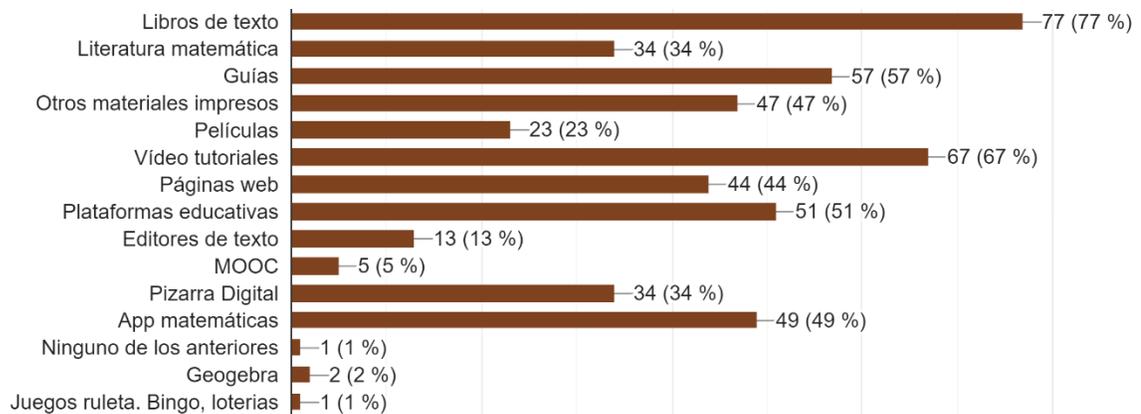
Porcentaje de docentes, según el uso dispositivos electrónicos que la institución ofrece para la enseñanza de las matemáticas.



Nota: Elaboración propia.

Figura 8

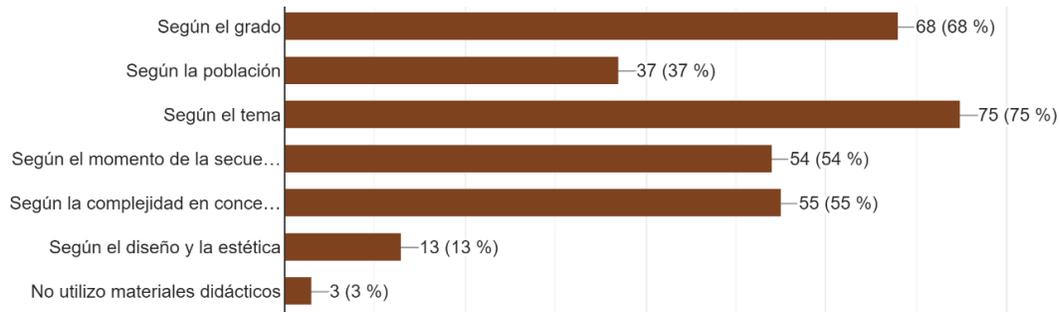
Porcentaje de docentes, según el uso herramientas adicionales utilizadas para la enseñanza de las matemáticas.



Nota: Elaboración propia.

Figura 9

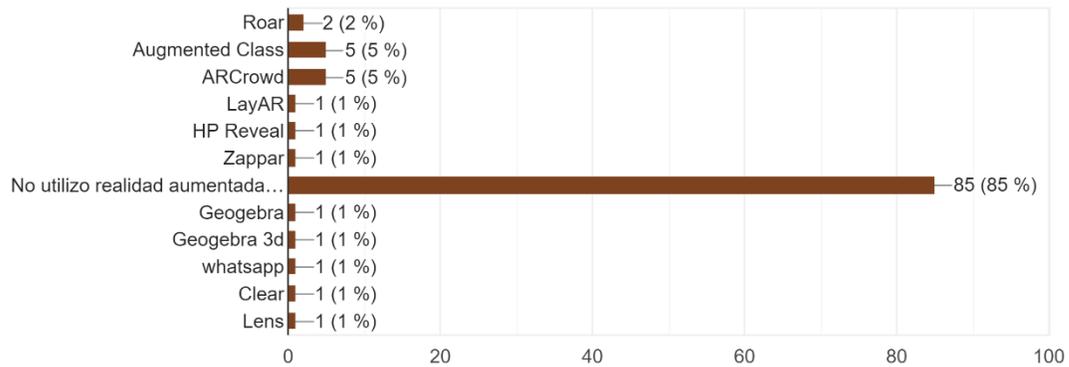
Porcentaje de docentes, según criterios que tienen en cuenta para seleccionar materiales didácticos para la enseñanza de las matemáticas.



Nota: Elaboración propia.

Figura 10

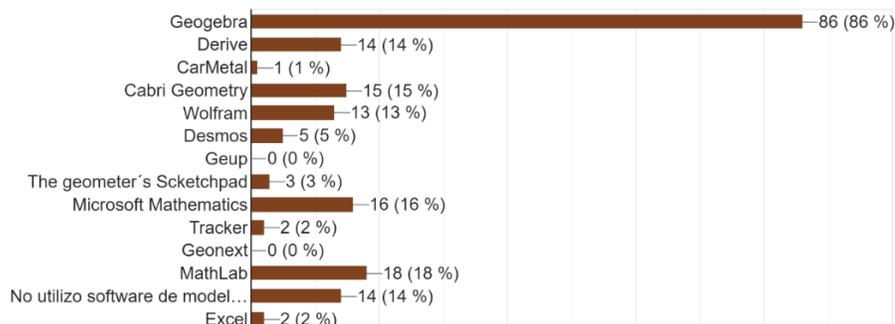
Porcentaje de docentes, según el uso de software para realidad aumentada, enfocado hacia la enseñanza de las matemáticas.



Nota: Elaboración propia.

Figura 11

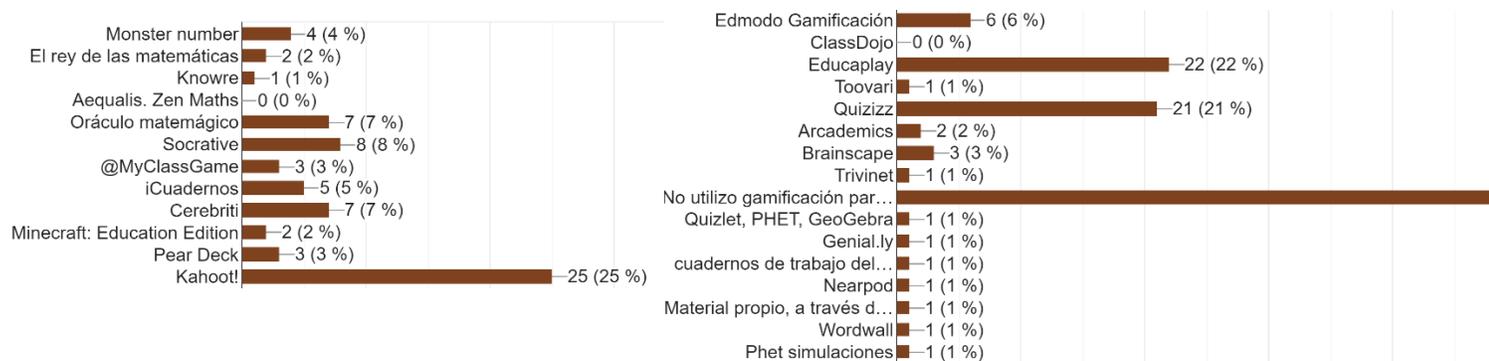
Porcentaje de docentes, según el uso de software para modelación matemática.



Nota: Elaboración propia.

Figura 12

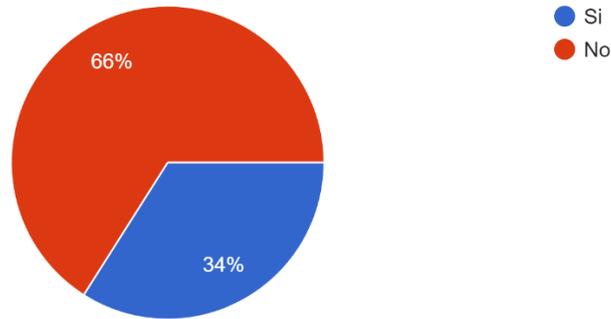
Porcentaje de docentes, según el uso de herramientas de gamificación enfocadas hacia la enseñanza de las matemáticas.



Nota: Elaboración propia.

Figura 13

Porcentaje de docentes, según si ha utilizado material didáctico para la enseñanza de la factorización.



Nota: Elaboración propia.

Figura 14

Material didáctico, utilizado por los docentes para la enseñanza de la factorización.

FICHAS DE CARTON	Representación de sinonimos algebraicos	Figuras en papel
Rompecabezas	Rompecabezas	Domino de Expresiones factorizadas
Ruletas,domino, escaleras	Representación geométrica de multiplicación algebraica.	formas bidimensionales de madera pintada
Regletas de base 10	Memoria	Trabajarlo desde figuras geometricas
cuadrados, rectángulos en cartulina y cubos	Bloques	Dominó de polinomios
Tangram	Sobre área	geogebra
Foami, hojas de papel,	Twister matemático	Material elaborado en clase para factor común
Recortes de cartulina que forman rectángulos	Regletas. Cartas. Figuras geométricas.	Áreas en cartulina
Software	He trabajado con cuerpos y volúmenes cubos desarmables	Cuadrados de cartón, hexágonos para recortar

Nota: Elaboración propia.

Anexo 2.

Transcripción de entrevista telefónica semiestructurada con docente de discapacidad visual del centro de rehabilitación para adultos ciegos (CRAC).

Link: <https://youtu.be/r9c1wUdnoM0>

Moderador 1: Luis Javier Báez Ortiz.

Profesor 1: Andrea Rocha.

Moderador 1: Buen día, mi nombre es Luis Javier Báez y junto a mi compañero Elkin Ignacio Rodríguez estamos realizando un estudio sobre la pertinencia del material didáctico BoxSet para la enseñanza de algunas equivalencias algebraicas que se pueden representar geoméricamente. Es decir, acerca de unos casos de factorización que se pueden representar de manera geométrica.

El objetivo es poder conocer algunos alcances de la educación matemática en población con algún tipo de discapacidad visual o ceguera. En este sentido, puede usted sentirse libre de compartir todas sus ideas en este espacio, ya que, pues no hay respuestas correctas o incorrectas, lo que importa es justamente su opinión sincera y por supuesto objetiva. Y cabe aclarar que la información es solo para nuestro trabajo.

Es así que, para agilizar la toma de la información, pues resulta de mucha utilidad grabar la conversación porque pues tomar notas a mano nos demora mucho tiempo y se pueden perder cuestiones importantes y el uso de la llamada de la grabación es solamente con fines de análisis. ¿Existe algún inconveniente en que grabe la conversación?

Profesor 1: No, ninguno.

Moderador 1: Bueno, entonces desde ya le agradezco en primer momento por aceptar nuestra entrevista. Entonces de primer momento, pues me gustaría que por favor si se pudiera presentar.

Profesor 1: Bueno, mi nombre es Andrea Rocha, soy educadora especial. En este momento trabajó en el centro de rehabilitación para adultos ciegos (CRAC), enseñando las áreas de braille y ábaco.

Moderador 1: Muchísimas gracias. ¿Cuánto tiempo tiene experiencia enseñando matemáticas en braille?

Profesor 1: Enseñando, las llevo 16 años. Y pues, a nivel personal, son prácticamente toda la vida. Porque lo digo a nivel personal, porque yo soy también personas ciegas.

Moderador 1: Gracias, es un dato supremamente importantísimo. ¿Quería preguntar cuál es el rango de edad de los estudiantes a los cuales usted ha enseñado?

Profesor 1: Digamos que aquí en la institución manejamos desde los 6 años. Pero yo no entiendo gen este momento, tengo a cargo nomas adolescentes y adultos.

Moderador 1: Muchas gracias. ¿Puede contarnos un poco acerca de la institución donde usted enseña actualmente?, ¿Cuánto tiempo de pronto lleva allí?, ¿Si esta es una institución privada o de pronto hace parte del Estado?, ¿esto se enseña por cursos o es por niveles?

Profesor 1: Bueno, te comento yo, llevo 13 años en la institución. Se manejan dos procesos, los cuales son el proceso de rehabilitación para niños ciegos entre los 5 y los 15 años. Y el proceso de rehabilitación para adultos ciegos que ya desde la adolescencia hasta el adulto mayor. La institución es privada

Moderador 1: ¿Se enseñanza por cursos, niveles o a nivel general?

Profesor 1: Cada terapia tiene un tope de sesiones y los usuarios y los que están ingresando y mes a mes, digamos que lo máximo es lo que debe durar un usuario son 6 meses.

Ellos inician con un proceso de evaluación y luego son remitidos a las áreas donde con ellos se pactan unos objetivos de acuerdo a sus necesidades y expectativas que tienen en el momento. Y te digamos que la proyección es de cincuenta sesiones en el área de ábaco y braille para cumplimiento de los objetivos, pero también depende del proceso de aprendizaje de cada uno de los usuarios.

Moderador 1: ¿Qué temáticas ha orientado en la enseñanza de las matemáticas en braille?

Profesor 1: Básicamente, en braille se enseña la escritura de los números y la simbología matemática, el cómo representar operaciones en el sistema braille. Pero las operaciones no las realizamos en este haciendo uso del sistema braille sino en el ábaco.

Con los niños se manejan el ábaco abierto, en cual ellos sacan las cuentas con poniéndola sobre la mesa y volverlas a introducir en el material.

Y con la adolescente, si el adulto mayor se trabaja el ábaco cerrado, entonces, ¿qué pasa allí? Por ejemplo, en braille, los chicos toman sus apuntes de las operaciones que les dictan en colegio para que posteriormente las puedan desarrollar en el ábaco.

Moderador 1: ¿Puedes describirnos de pronto la metodología que tú utilizas o has utilizado para enseñar las matemáticas?

Profesor 1: Desde 2009 a al momento se maneja la metodología, el proceso para desarrollar las operaciones. Y los ejercicios se utilizan mismo que en tinta. Que el mismo que manejan en el aula regular.

Moderador 1: Ok, tú me cuentas que tienes discapacidad visual, ¿verdad?, ¿en qué grado se encuentra tu discapacidad?

Profesor 1: Prácticamente estoy entre las personas ciegas. Alcanzo a percibir luz y sombras grandes. Pero necesitan colores, objetos o características específicas, no.

Moderador: Como profesora que, y digamos que, además, contando con discapacidad visual que tú me comentas, ¿qué dificultades encuentras al momento de enseñar matemáticas precisamente?

Profesor 1: Bueno, digamos ayudarle a veces sentido, tanto porque como yo lo he vivido, pues lo que se hace es que el material tenga alto relieve. Cuando yo lo aprendí, los profesores del aula no tenían conocimiento de como adaptar material, de cómo enseñarle a uno.

Es que eso es pronto lo que se ve, no es chicos que hay muchos, donde los docentes, como no han trabajado con personas con discapacidad, no saben cómo adaptar el material, pues para que uno logré comprender.

Moderador 1: ¿Qué materiales didácticos has utilizado para enseñanza de las matemáticas en Braille? Creo que ya me has mencionado algunos, pero si por favor me puedes decir nuevamente.

Profesor 1: Pues más básicamente trabajan, digamos que, para las gráficas, nosotros utilizamos tablas de dibujo en negativo para que los puntos se las figuras que resaltadas. Y en cuanto a las operaciones, como te digo, se maneja el ábaco cerrado. Ya con los adolescentes en los temas de trigonometría en todas partes se maneja la calculadora científica parlante.

Moderador 1: No, personalmente no conocía sobre ese material. ¿Me podrías contar un poquito como qué trata esa esa calculadora que tú hablas?

Profesor 1: Las dos calculadoras son lo mismo, hacen las mismas funciones. Por ejemplo, en

la calculadora convencional que trae para solo hacer las operaciones matemáticas básicas y porcentajes. Y la otra, ya es científica, donde vienen todos lo de seno, coseno, tangente, raíz cuadrada, cúbica, logaritmos y demás. La convencional, al oprimirle los botone, suena, es decir, dice el resultado en voz y la científica si toca conectarle audífonos para que se escuche.

Profesor 1: No sé si la alcanzaste a escuchar.

Moderador 1: Sí, sí, se alcanzó a escuchar perfectamente, pues personalmente considero que es un material que, pues personalmente no había escuchado y la verdad, sí, sí se me hace bastante interesante, la verdad que sí. Quería preguntarte a continuación, ¿Que si usted cree que existen suficientes materiales didácticos para enseñar matemáticas en braille?

Profesor 1: Suficientes materiales no. Hay algunos que toca que los mismos familiares los adapten porque no se consiguen, además que los costos son altos. Por ejemplo, uno de los materiales que no se consiguen, son la tabla periódica, entonces los familiares lo adaptan para que los hijos puedan acceder a la información

Moderador 1: Ok, muchas gracias. ¿Alguna vez usted ha tenido la oportunidad de enseñar álgebra en braille?

Profesor 1: No, no.

Moderador 1: ¿O de pronto ha conocido algún caso de un docente o un estudiante que haya aprendido o enseñado braille?

Profesor 1: No, lo que te digo. El braille es la escritura por medio de puntos de las operaciones. Y en el desarrollo de las operaciones como tal, ya es haciendo uso del ábaco y de su efecto del cálculo.

Moderador 1: Oh, OK, gracias de pronto tienes el conocimiento del ¿por qué digamos que, por lo general, solo se enseña aritmética y de pronto no se hacen otros aprendizajes que van un poco más allá en la educación matemática en braille?

Profesor 1: No te entendí tu pregunta.

Moderador 1: Si tú conoces porque solamente se enseña aritmética, digamos en educación matemática, braille y de pronto nos enseñan otros aprendizajes, digamos no sé ecuaciones o factorización.

Profesor 1: No, sí. Sí, d a nosotros nos enseñan eso, pero eso hace parte del colegio como tal, pero nosotros aquí en la institución no manejamos eso porque eso hace parte prácticamente educativo, es decir del colegio.

En el de los niños, no sé, si ahorita mi compañera está reforzando esos temas. Porque la mayoría de los niños que nos llegan a la institución, están en colegios distritales donde hay el aula de apoyo y hay un educador especial quien les refuerza esos temas. En el colegio a ellos se les enseña los procesos para desarrollar una ecuación y demás. Y en esos casos ya quedan casi que ellos hacen calculo mental.

Moderador 1: Y, por último, ¿Usted cree que una persona no vidente puede llegar a ser un profesional competente si recibe una educación escolar completa, es decir, lo que conocemos hasta grado once?

Profesor 1: Si, tenemos profesionales, que han llegado a esos niveles recibiendo una educación completa.

Moderador 1: Ok, muchas gracias, pues en este momento hemos finalizado con la entrevista. De antemano, pues agradezco las respuestas que su merced me da compartido, pues

recuerde que es con fines netamente académicos, no sé si tenga de pronto alguna duda, alguna inquietud al respecto.

Profesor 1: No, no está claro.

Moderador 1: Ok, muchísimas gracias, profe Andrea por colaborarnos con esta entrevista. Muchas gracias de verdad.

Profesor 1: Bueno, que es muy bien y con cualquier cosa, pues estoy atenta.

Moderador 1: Ok, profe, muchísimas gracias.

Profesor 1: Bueno, que estés bien.

Información complementaria, segundo audio.

Link: <https://youtu.be/DyZKPYfB53U>

Profesor 1: Para complementar la información anteriormente dada. Yo soy funcionaria del centro de rehabilitación para adultos (CRAC). Esta institución lleva funcionando 60 años en pro de la inclusión de las personas con limitación visual a nivel educativo, social, laboral, etcétera.

Nosotros manejamos 3 procesos que es el de habilitación básica funcional, que va de los 5 a los 14 años. El proceso de rehabilitación integral, personas ciegas y el proceso de regresión integral personas bajas, visión.

En el proceso de rehabilitación básica funcional y rehabilitación integral personas ciegas, se enseña braille como sistema de lectoescritura y el área de ábaco, donde se les enseña el manejo del ábaco abierto, ábaco cerrado, calculadora parlante convencional, calculadora científica convencional como medios alternativos para realizar sus cuentas de que esto reemplaza lo que la hoja y el esfero.

En el caso de los chicos o de los niños, jóvenes y adultos con baja visión, no se les enseña estas herramientas porque lo pueden hacer a través de la tinta y del uso de ayudas como la lupa, entre otras, que son las que les amplíen la letra para que puedan acceder mejor a la información.

En cuanto a los apuntes, los toman en tinta haciendo uso del marcador, micropunta o sharpie. Es declarar que nosotros somos una entidad de rehabilitación. Por lo tanto, nosotros no enseñamos el área de matemáticas, factorización, álgebra y trigonometría; ninguna de estas áreas porque son más educativas.

Los niños y jóvenes con limitación visual deben de aprender las áreas anteriormente mencionadas en los colegios, en el aula regular, igual que sus compañeros videntes.

Ya la metodología que se implementa en la misma, sino que se hace adaptación de material cuando se requiere para que los usuarios con limitación visual logren comprender mejor los conceptos que se le están dando.

Anexo 3.

Entrevista semiestructurada sobre la percepción de material didáctico BoxSet en el centro de rehabilitación para adultos ciegos (CRAC).

Se realiza una visita al CRAC en la ciudad de Bogotá, para conocer la percepción del material didáctico BoxSet por parte de la docente Andrea Sierra, quien es docente de allí y al mismo tiempo cuenta con discapacidad visual severa.

Para mayor información, a continuación, puede dirigirse al siguiente link, para observar la entrevista.

Link: <https://youtu.be/iM-f6M9Tif0>

Anexo 4.

UNIVERSIDAD LA GRAN COLOMBIA

GRUPO FOCAL “DOCENTES MATEMÁTICAS BÁSICA SECUNDARIA”

OBJETIVO GRUPO FOCAL			
Objetivo: Conocer la pertinencia del material didáctico BoxSet para la enseñanza de algunas equivalencias algebraicas que se pueden representar geoméricamente.			
Fecha	19 de junio de 2022	Hora	10:00 am
		Duración	1 hora

GRUPO FOCAL 1	
Moderador	Elkin Ignacio Rodríguez Carrero
Relator	Luis Javier Báez Ortiz
Observadores	Elkin Ignacio Rodríguez Carrero - Luis Javier Báez Ortiz

RELACIÓN DE PARTICIPANTES GRUPO FOCAL		
NOMBRES Y APELLIDOS	DOCUMENTO	FIRMA
1. Paola (Internacional - EE. UU)		
2. Juan Carlos Beltrán (Primaria - Magister).		
3. Angelica Sánchez (Bachillerato- magister)		
4. Alexandra Gaitán (Bachillerato- coordinadora)		

TEMA DE DISCUSIÓN GRUPO FOCAL 1

TEMA DE DISCUSIÓN

Pertinencia del material didáctico BoxSet para la enseñanza de algunas equivalencias algebraicas que se pueden representar geoméricamente.

Preguntar: ¿Utiliza o ha utilizado algún material didáctico para la enseñanza de la factorización?

Introducción:

- 1) Si yo les digo BoxSet de factorización, ¿Qué es lo primero que se le viene a la mente?, ¿Por qué?
- 2) Hoy en día, ¿Qué beneficios creen que aportan los materiales didácticos en el aula? ¿Por qué?
- 3) Este es el material didáctico sobre el que hablaremos en el día de hoy, ¿alguna vez habían probado o visto algo similar?

Profundización:

- 4) ¿Cuáles son los aspectos más favorables del material didáctico?
- 5) ¿Cuál es el impacto que puede generar este material en sus procesos de enseñanza de las matemáticas?
- 6) ¿Cree usted que a más docentes le gustaría usar en sus aulas este material didáctico?, ¿por qué?
- 7) Sí pudieran cambiar algo de este material didáctico (material, forma, colores, etc.) ¿Qué sería?

Cierre:

- 8) ¿Cuáles cree usted que son las principales limitaciones que encuentra en este material didáctico para su uso masivo en la escuela?
- 9) ¿Cuáles cree usted que serán algunas ventajas de usar este material didáctico para los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar?

10) ¿Cuáles serán las desventajas de usar este material didáctico para los procesos de enseñanza y aprendizaje?

Nota: Formato de pregunta para el grupo focal de docentes de matemáticas. Tomado de “los grupos focales”, A. López. S.f. (https://cea.uprrp.edu/wp-content/uploads/2013/05/grupo_focal.pdf)

Anexo 5.

Presentación del material didáctico BoxSet a través de entrevista semiestructurada con el grupo focal.

Link: <https://youtu.be/ZbnDVSADC5g>

Moderador 1: Elkin Rodríguez.

Moderador 2: Luis Báez

Profesor 1: Juan Carlos Beltrán

Profesor 2: Paola Cárdenas

Profesor 3: Alexandra Gaitán

Profesor 4: Angelica Sánchez

Moderador 1: Vamos a comenzar.

Muy Buenos días para todos, mi nombre es Elkin Rodríguez y junto a mi compañero Luis Javier Báez estamos realizando una investigación acerca de la enseñanza de la factorización por medio de un material didáctico. Entonces, permítame, ya les comparto la pantalla.

Moderador 1: Pues la idea es que estamos haciendo un grupo focal y el objetivo de este grupo focal que estamos realizando, es conocer la pertinencia del material didáctico BoxSet para la enseñanza de algunas equivalencias algebraicas que pueden representar geoméricamente.

Tenemos algunas aclaraciones preliminares para esta pequeña partecita y lo primero es que nosotros queremos conocer las distintas opiniones que tienen ustedes frente al uso del material que les vamos a presentar.

Queremos que se sientan ustedes libres de compartir las ideas en este espacio, creemos que no hay ninguna respuesta que sea correcta o incorrecta. Lo único que queremos saber son sus percepciones acerca del material que le vamos a presentar y partiendo desde la objetividad, entonces queremos que sean muy objetivos a partir de lo que queremos mostrar, de lo que nos vayan a decir. Tampoco queremos generar alguna controversia o tener algún choque de opiniones sobre el material.

Esta información, todo lo que vamos a almacenar, toda la información que vamos a tener en este grupo focal va a ser de manera anónima y por motivos de mejorar o de poder tomar notas, poder tomar apuntes y para no perder ningún tipo de información, pues se va a grabar la reunión, entonces no sé si ¿alguno tenga algún inconveniente con que grabemos la reunión para poder almacenar datos. Sin embargo, no va a salir ninguno de los nombres de ustedes en el proyecto, sino que va a estar como profesor 1, profesor 2, profesor 3, profesor 4. Entonces, no sé si alguno tenga algún inconveniente con la grabación.

Profesor 1. Ningún problema.

Profesor 2. Ningún problema.

Profesor 3. Ningún problema.

Profesor 4. Ningún problema.

Moderador 1: Gracias profesor 1, profesor 2, profesor 3 y profesor 4.

Bueno, antes de continuar quisiéramos que nos presentemos un.

Me pueden decir su nombre y hablar un poco sobre la experiencia que han tenido ustedes en la docencia. Entonces quiero por favor empezar por Angelica. Entonces cuéntame cómo te llamas y un poco sobre tu experiencia.

Profesor 4: Hola, buen día a todos.

Mi nombre es Angélica Sánchez, soy Licenciada en matemáticas de la universidad Distrital. Actualmente enseño en matemáticas en los grados séptimo, octavo y noveno, junto con geometría y estadística.

Moderador 1: Vale, muchísimas gracias.

Juan Carlos. Preséntate y cuéntanos un poco de tu experiencia docente.

Profesor 1: Mi nombre es Juan Carlos Beltrán, soy Licenciado en matemáticas de la Universidad Distrital y Magíster en educación aplicada a la matemática de la universidad Distrital también. He tenido alrededor de 7 años de enseñanza en educación primaria, junto a experiencia en los grados sexto, séptimo, octavo, noveno, décimo y once. Y actualmente me desempeño en la sección de primaria de la institución educativa.

Moderador 1: Vale, muchas gracias. Paola.

Profesor 2: Buenos días. Mi nombre es Paola Cárdenas, soy licenciada en educación básica, con énfasis en matemáticas de la universidad Distrital y mi experiencia. ha sido en educación media y secundaria. Llevo 6 años ejerciendo como docente. Actualmente me encuentro en Estados Unidos ejerciendo como docente de matemáticas bilingüe, en colegio de inversión en educación media.

Moderador 1: Vale, muchísimas. Gracias, Paola.

Alexandra por favor.

Profesor 3: Buenos días. Mi nombre es Alexandra Gaitán. Soy licenciada en lingüística y literatura de la universidad La Gran Colombia. Tengo 6 años de experiencia.

Moderador 1: Bueno, muchísimas gracias. Voy a continuar por acá, pero antes, agradecerles a ustedes por la presencia, por el tiempo. La idea es no extendernos tanto, entonces iremos vamos a ser muy concretos en toda la información que se vaya dando.

Vamos a hacer una parte de presentación, vamos a hacer preguntas en la parte en la que se vaya a presentar el material didáctico. Voy a seguir de largo haciendo la explicación y cualquier duda que tengan o inquietud acerca del material de lo que está explicando por favor, lo pueden tomar como nota y después de que termine de explicar todo el material, toda la estructura que se tenga, pues pueden hacer las preguntas respectivas para no interrumpirnos preguntando.

Nuestro grupo focal es mixto, tenemos diferentes experiencias, diferentes años, diferentes universidades y pues lo primero que es una pregunta más enfocada a las a los docentes que han dado factorización o álgebra, es preguntarles si *¿utiliza o ha utilizado algún material didáctico para enseñar la factorización?*

Profesor 1, tienes experiencia dictando en algún punto álgebra o factorización, ¿cierto?

¿Me puedes contar un poco sobre si has utilizado algún tipo de material didáctico para enseñar la misma?

Profesor 1: Algunos años he podido y gracias a las posibilidades que tiene el colegio, utilizarse presentación (digital) y conexión a computadora para utilizar Geogebra y mostrar gráficamente el desarrollo de algunos casos de factorización. Pero, reconozco que ha sido muy simplista en el sentido de solo ilustrar el caso de trinomio cuadrado perfecto, trinomio de la forma x^2+bx+c . Pero lo que es con casos específicos, no.

Moderador 1: Vale, perfecto. Y profesor 4.

¿Tú también has tenido experiencia dictando álgebra o factorización?

Profesor 4: Sí, yo he trabajado, sobre todo con geometría los casos esenciales y se usa material tangible con los estudiantes, para que ellos puedan identificar el proceso que se realiza.

Moderador 1: Muchas gracias.

Bueno, les voy a comentar nosotros en esta investigación ya vamos bastante tiempo, llevamos más de un añito realizándose, y en un comienzo de investigación realizamos un análisis preliminar que fue una encuesta de caracterización y en esa encuesta de caracterización realizamos la misma pregunta que les acabo de realizar, a ustedes y nos encontramos con los resultados que un 81% de los encuestados nos dijeron que no utilizan ese tipo de material didáctico, sino que continúan con el método tradicional tablero, marcador, libros de texto y demás para enseñar la factorización.

Esto nos lleva a sacar unas hipótesis y es por qué no se utiliza la factorización y la primera hipótesis de las tres que les voy a plantear es: primera, no hay material didáctico y tangible para la enseñanza de factorización, segunda puede ser de que hay desinformación respecto a que no se conoce ese tipo de material o el cómo puedo utilizarlo para enseñar a factorización, o la tercera hipótesis es, que simplemente los colegios o instituciones educativas donde laboramos no nos brindan ese apoyo respecto al material para enseñar factorización.

Revisando un poco los obstáculos didácticos, nos encontramos con que, en la básica primaria, si nos encontramos con mucho material didáctico para la enseñanza, ya que nos encontramos con un aprendizaje significativo, en el cual, pues el estudiante le queda mucho más fácil memorizar, aprender conceptos, comparando las cosas tangibles, lo que está tocando, y lo que está viendo, con lo que está aprendiendo.

Pero al momento de hacer la transposición desde la aritmética hasta el álgebra, en el cual, pues estamos haciendo sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, siempre estamos dando la respuesta, por ejemplo: dos más dos es igual a cuatro, entonces ya sabemos que la pregunta tiene

una respuesta, pues no estamos pasando al álgebra en el cual estamos viendo incógnitas, estamos viendo coeficientes, parte literal, estamos viendo muchas cosas que el estudiante no tiene con que enlazarlas. Y, por lo tanto, se le vuelve un poco más complicado para el estudiante el aprender álgebra y en algunas ocasiones se puede generar un momento de estrés.

Nos encontramos ante esta situación porque la educación en Colombia está radicando en el obstáculo epistemológico y es en el momento en el que estaban aprendiendo álgebra. Los estudiantes de álgebra y demás, desde 1961 hasta 1998, los libros y las cátedras que se daban en la época eran muy demostrativas. Entonces siempre iban, era demostrar el algoritmo y nunca hubo ese enlace, por eso los estudiantes que hubo en esa época tienen ese estigma de que la matemática y más precisamente que el álgebra es muy difícil, que es muy aburrida, que es muy tediosa, pero pues por el mismo método que se está manejando.

Para ello, nosotros pretendemos con este proyecto ayudar o mejorar este tipo de prácticas en las cuales nosotros enseñamos el álgebra, en este caso la factorización, y pues queremos llegar a reducir y eliminar un poco más de los estigmas que tenemos acerca de este aprendizaje.

Para ello, pues, tenemos un material didáctico.

Entonces, Luis ya está por acá.

Moderador 2: Buenos días, ¿cómo están?

De primera impresión procederemos a un acercamiento frente a nuestra propuesta de investigación y me gustaría preguntarles, si nosotros les decimos BoxSet de factorización, ¿cómo a qué les suena?, ¿qué se le viene a la mente?

Profesor 1: Cuando lo mencionas y yo pienso que es una serie de herramientas en las cuales se pueden ver algunas situaciones, algunas formas de factorizar, del cómo a partir de algo visual, meramente tangible se puede hacer paso a paso la factorización. También el mover ciertas cosas, se puede mostrar una igualdad.

Profesor 4: Material tangible, algo manipulable para poder mirar cómo pues una caja con cosas como para entender la factorización.

Profesor 2: Yo diría que hace más relación con los recursos que se pueden implementar para comprender lo que pasa.

Moderador 2: En ese orden de ideas profes, ¿qué beneficios, ustedes creen que aportan los materiales didácticos en el aula?

Profesor 3: Ayudan a que la clase sea tan monótona. Ayuda a que los muchachos generen interés. Y, además, que hay una recordación o una apropiación de la temática.

Profesor 1: Dado a mi experiencia docente y formación de la misma, debo mencionar que hay diferentes estilos de aprendizaje. Lastimosamente la factorización y por ejemplo no solamente

es visual, sino que, con este tipo de herramientas, creo que amplía más la forma visual y complementaria mucho más el aprendizaje de la factorización

Moderador 2: muchas gracias. Bueno, pues básicamente este es el material sobre el que nosotros vamos a hablar. Vamos a ofrecer de manera muy detallada, por supuesto que esperamos sus comentarios u opiniones al respecto para poder mejorar en cuanto a este material.

- A partir de este momento a través de la presentación proyectada, se muestra todo el material que conforma al BoxSet.

Moderador 1: Bueno, estábamos revisando y escuchándolos en sí, en parte cada uno tiene su razón, su sustento.

Vamos a partir un poco revisando la caja y efectivamente es un BoxSet y es un poco una caja compilatoria. En este caso, queremos compilar elementos, herramientas, material didáctico, el cual nos pueda llegar a ayudar a enseñar la factorización.

Acá necesitamos hacer un pequeño paréntesis, y es que esta caja está diseñada para enseñar factorización, pero no únicamente la puedo utilizar un docente, sino cualquier persona que quiera, que desee enseñar a factorizar con la caja; es una herramienta que le ayuda hacer este proceso.

Toda la investigación está basada en la ingeniería didáctica, entonces más que todos los conceptos y el tipo de enseñanza que se va a manejar, es el aprendizaje por adaptación del medio en pro de la ingeniería didáctica, estamos siempre siguiendo esa línea.

La caja va a tener varios elementos dentro de la caja, nos encontramos con estas fichas que estamos viendo en pantalla, como son las fichas de color amarillo, azul y rojo. Las fichas de color

amarillo son unas fichas que miden una unidad cuadrada, las fichas de color azul son unas fichas que miden x , y las fichas de color rojo son unas fichas que miden x^2 .

Como podemos ver, nosotros tenemos una ambición muy grande y estamos atacando muchos problemas, tanto en epistemológicos, didácticos y ontogenéticos y en los problemas ontogenéticos nos estamos enfocando mucho en las dificultades y discapacidades visuales; por tanto, como estamos viendo, las fichas, cada ficha está marcada para una lectura táctil para que las personas con este tipo de dificultades también la puedan leer.

También queremos llegar a fortalecer con el proyecto, porque al momento nosotros realizar la investigación, pues evidenciamos que en Colombia la educación matemática para las personas de esta población, los no videntes o con alguna dificultad visual, cuentan con muy poco en estudios matemáticos, entonces, cuando empezamos a realizar la investigación encontramos que en Colombia es muy básico lo que se enseña de matemáticas para las personas no videntes, entonces queremos apoyar, queremos empezar a enfocarnos en ellos, queremos plantar ese granito de arena con esto.

Las fichas de color amarillo son un total de 64 fichas, las fichas de color azul son un total de 41 y las fichas de color rojo son un total de 9 fichas. Todas esas fichas se van a basar y van a empezar a trabajarse mediante una guía, que es la cartilla. Como estamos diciendo, todo va a estar en braille, lo que implica la traducción de la cartilla, todavía estamos en ese proceso de construir la cartilla y de hacer esa traducción, porque pues si necesita varias revisiones por expertos en el lenguaje braille que nos ayuden haciendo la estructura, pero pues la idea es que al final si se imprima y se mantenga la cartilla, con las dos traducciones que son en español y en braille.

Todas las explicaciones y manejo de las fichas, se va a encontrar en la cartilla que estamos viendo en pantalla.

En nuestro BoxSet vamos a encontrar esta cartilla que se va a encontrar de manera en física, también estamos pretendiendo que mediante esta cartilla se pueda llegar a dar la clase, se puede llegar a enseñar y si digamos tiene no algún recurso, digamos no cuenta con televisor, no cuentan con Internet, estamos en un sitio remoto donde no encontramos esas tecnologías; con solo la cartilla se puede llegar a enseñar la cartilla. También cuenta con otros elementos como lo son vídeos, códigos QR que ayudan a complementar la enseñanza, pero no necesariamente es obligatorio ver los vídeos para poder enseñar porque la cartilla lo contiene.

Estamos hablando de esta cartilla (se muestra la cartilla en pantalla y todo lo que la conforma). La idea de boxeo es crear muchas cajas recopilatorias, pero en este caso es de la factorización y nos vamos a enfocar en este primer módulo en estos casos de factorización: que son los dos factor común (factor común y por agrupación de términos) , los tres tipos de trinomio (trinomio cuadrado perfecto, x^2+bx+c y ax^2+bx+c), la diferencia de cuadrados y el cubo de la suma. Únicamente nos enfocamos en ellos porque estos son los casos de factorización, los cuales podemos representar mediante el álgebra geométrica. Entonces podemos llegar a representarlos utilizando las fichas que demostramos anteriormente.

- Aquí se muestran los elementos que conforman la cartilla.

Moderador 2: Gracias. En primera instancia, vamos a encontrarnos con algo que se llama introducción BoxSet. Aquí lo que nosotros pretendemos básicamente es familiarizar tanto al estudiante como al docente con el material propio que se está diseñando. Entonces hay una fase que es de preámbulo, donde básicamente ellos van a contar con una cantidad de fichas determinadas, que es también la cantidad de fichas de forma física que vamos a contar y, a partir

de ello, se va a hacer una serie de ejercicios de ambientación, es decir, vamos a manejar que las fichas de valor de x , de valor de x al cuadrado y las de valor que tienen uno de área

Nosotros vamos hacer primero un acercamiento o una familiarización con este material donde ellos se les va a indicar que formen diferentes áreas cuya condición es que no les puede sobrar ninguna de las fichas o no puede haber espacios entre las áreas que se van a conformar. También esta parte se compone, respecto que hay un video que sirve más de ayuda o retroalimentación en caso de que se necesite, donde en este caso se hace la explicación de las fichas que se van a hacer. Entonces, si usted observa, hay una especie de código QR que es el cual nos va a permitir visualizar ese trabajo que se ha venido haciendo todas las fechas. Entonces, si gustan pueden hacer uso de su teléfono y a través del escáner pueden mirar este código QR que está ahí en pantalla y poder observar el video (en este caso es sobre el uso de las fichas).

Moderador 1: En un principio nosotros encontramos en el anexo 1 que es el que estamos viendo en pantalla. Estas son las mismas fichas y la idea que encontramos con este anexo 1 es llegar a imprimirlo. ¿Qué quiere decir?

Digamos, yo me encuentro explicándole factorización a un estudiante no vidente, me puedo remitir a lo que viene siendo las fechas de material tangible las que las que van a estar impresas en 3D las que va a estar dentro de la caja para que el estudiante las pueda llegar a leer.

Si yo me encuentro con un curso masivo, con un salón más grande, de 30 a 40 estudiantes, puedo llegar a llevar el anexo 1, que es este anexo que estamos viendo acá para que el estudiante recorte estas fichas y el estudiante pues tenga su propio material cada 1 por individual, entonces acá lo estamos revisando en.

Acá en el preámbulo, efectivamente nos están diciendo que cada estudiante debe tener la fotocopia del anexo 1 para que el estudiante haga con su vida recorte, pues recorte sus fichas y cada 1 tenga su propio material.

Moderador 2: Gracias. Después de esa fase, digamos de exploración donde ellos (estudiantes) forman áreas, teniendo primero un acercamiento, pues hay una sección que se llama interpretemos un poco que lo que tiende es básicamente es empezar a darle sentido a ese concepto de factorización., pues esto nos pasa muy frecuentemente, porque ellos se aprenden el algoritmo de la factorización para los diferentes casos y así sucesivamente, pero no saben el concepto como tal. Y eso nos pasa como docentes, se nos olvida como tal, que es la factorización, más allá de saber manejar el algoritmo.

Por último, en esa primera fase, se hace el cierre de la clase que tiene que ver básicamente, darle un problema que tenga como un enfoque de tipo significativo para el estudiante, haciendo un pequeño cierre de clase, aplicando lo que es el modelo del aprendizaje significativo y por lo que también se aplica el aprendizaje por adaptación al medio.

Ahora pues, vamos a desarrollar de manera muy detallada en esta sesión, lo que tiene que ver con el primer caso, que es el caso de factorización de factor común.

Como estarán observando cuenta con una temática que debe incluirse, con una duración estimada de 90 minutos, pero sabemos que puede variar, dependiendo de ciertas ciertas condiciones y siempre en lo posible contar con un logro, un objetivo o una meta de aprendizaje, lo

cual es lo que nosotros esperamos al final de cada sesión abordar; en este caso que el estudiante logre lo que es la factorización con precisión de polinomios mediante el caso de factor común.

En este caso particular, tenemos una exploración BoxSet. Lo primero que nos invita es a que el estudiante va a construir cuatro terrenos, pero esos cuatro terrenos que él va a ser como ya tiene una familiarización previa con las fichas, entonces él los va a formar de acuerdo a las condiciones que se le van a colocar ahí, que es la primera base, la cual tiene que ser de $3x$ y altura x ; entonces tomó el material utilizado y lo voy armando y formando el área, con la condición que no se puede sobrar ningún espacio, como ya se había familiarizado en la etapa anterior, sin embargo, es importante como recordar ese proceso.

Aquí, digamos que va a tener de la característica para que vayan empezando a asimilar, bien sea la base o bien sea la altura que deben tener esa particularidad en común.

Después de eso, vamos a entrar a una parte que se llama la interpretación por representación geométrica, donde a través del uso del álgebra geométrica, el docente va a realizar el proceso de la construcción del factor común, netamente desde la parte de la geometría; cabe aclarar que nosotros no estamos manejando definiciones formales, que es una nota muy importante por mencionar, sin embargo nosotros le sugerimos al docente, la cual puede abordar la representación geométrica, no solamente de este caso, sino todos los casos de que posteriormente se encontrará.

Entonces acá el docente tiene como esa libre decisión si toma la sugerencia que nosotros hacemos o tiene su propia forma de abordar la factorización por representación geométrica. Lo que queremos es que de pronto no esté muy desligada al momento que él lo vaya a enseñar.

Estos vídeos que ustedes están viendo, que dicen video BoxSet 1 y ese código QR, hacen referencia respecto a que, si se necesita como ejercicio de retroalimentación, incluso puede funcionar como especie de repaso para los docentes, entonces puede ayudar muchísimo a la

retroalimentación sobre ese tipo de circunstancias, pues aquí vamos a observar uno de los vídeos que desde la representación geométrica.

Moderador 1: Todos los vídeos que vayamos encontrando en la cartilla están enlazados con un QR. También para el que tenga la cartilla en digital, pues se va a poder enlazar mediante un clic e igualmente, como lo dijimos al comienzo, si no tiene Internet, no tiene acceso a internet a este tipo de herramientas, en la misma cartilla se hace la explicación completa.

Moderador 2: Los invitamos a ver este primer video.

-Se proyecta el video de factorización de factor común por interpretación geométrica-
(<https://youtu.be/r8aP27HZWOY>)

Moderador 1: Ah, qué pena interrumpo, nosotros estamos hablando, digamos acá en la parte de coeficientes de parte literal, es más adelante se habla un poco para poder hallarlo mejor con el máximo común divisor.

La idea que nosotros tenemos en los vídeos es ya tener conocimientos previos. Quiere decir que si yo estoy hablando acá de coeficientes hay un video anterior, un video antecesor en el cual nosotros explicamos lo que son los coeficientes, lo que la parte literal, lo que son las partes de un término y igualmente para cuando explicamos factor común, pues en el mismo video no explicamos cómo sacar factor común, porque ya hay un video previo en el cual se está enlazado y puede llegar a pasar a ese otro video donde explicamos un factor máximo común, divisor. Y

después volver a este video para entender porque sacamos así el máximo común divisor y por qué nos dio esa respuesta.

-Se continua con la proyección del video anteriormente mencionado.

Moderador 2: Listo, entonces, este es uno de los vídeos que se van a encontrar en cada uno de los casos de factorización que se irá manejando en esta cartilla.

Después, continuamos con una fase que le llamamos la interpretación algebraica.

En la interpretación algebraica lo que nosotros vamos a manejar es lo que nosotros comúnmente le decimos el algoritmo de construcción, que es básicamente ese paso a paso para que el estudiante pueda hallar en este caso el factor común de un polinomio o dado una serie de expresiones algebraicas, pues también mencionar que nosotros hacemos es una sugerencia de un modelo que podría seguirse, pero pues digamos es que es de libre criterio. El docente para que lo pueda manejar, entonces en este caso nosotros tenemos que primero se halla el máximo común divisor de los coeficientes, luego se hallan las partes literales en común, si es que las tiene y toma la parte literal de menor exponente, unir el paso 1 y paso de los cuales se encontraban en común y bueno, así haciendo los pasos sucesivamente.

También cabe aclarar que también se hace un ejercicio dentro de retroalimentación o un ejercicio de refuerzo que, como decimos también en cápsulas son muy útiles y que pueden ser virtud, son como una herramienta para el docente, pero también sirve como un ejercicio de retroalimentación estos indicadores.

Este segundo video BoxSet 2, es una cápsula respecto a cómo se maneja la factorización desde la representación álgebra.

Sí gustan lo pueden escanear a través de su teléfono. Igual ya se les va a proyectar en pantalla y los compartiremos.

-Se proyecta el video de factorización de factor común por interpretación algebraica de forma breve- (<https://www.youtube.com/watch?v=xDOnpbNShIA>)

Por cuestiones de tiempo, pues vamos a saltar un poco esta parte, pero en el momento que esté completo al 100% con el modelo del grupo, compartiremos este material para ver las observaciones.

Hay una penúltima parte, que nosotros vamos a manejar, que se llama momento BoxSet.

Aquí es muy importante que el docente ya conozca de antemano cómo funciona todo el material, todo, todas esas paradas o esas escalas que se han hecho a lo largo de este trabajo porque aquí es donde el docente le propone al estudiante situaciones que él puede comenzar a manejar. Entonces acá el docente puede manejar dos estilos: Factorizar desde la representación de la representación algebraica hacia la representación geométrica o puede comenzar desde la representación geométrica hacia la algebraica.

Este es un ejercicio que nos sirve para mirar básicamente en cómo vamos, si se ha logrado un avance o no, si es necesario hacer algún tipo de retroalimentación, sí es ser hacer algún tipo de aclaración, hacer básicamente el refuerzo, porque sabemos que no todos los estudiantes aprenden de la misma manera y esta etapa nos puede permitir el verificar y de alguna manera diseñar esta u otra estrategia para poder ayudar a aquellos que están presentando falencias para la representación,

en este caso de factor común para las dos etapas anteriores, pues digamos que no se cumplieron a cabalidad.

Por último, tenemos la etapa que se llama apliquemos lo aprendido, que es básicamente como darle un contexto, una situación; donde el estudiante pues puede hacer uso de lo que tiene que ver, básicamente en este caso con la factorización para decir y solventar de otra manera esa pregunta tan clásica que nos hacen en clase y no solamente aplica con eso, sino con todos los temas y es profe, ¿esto para mí, para qué me sirve? Entonces aquí nosotros podemos trabajar un sinnúmero de habilidades que puede ser desde la formulación, desde la ejercitación, desde la creación, desde el análisis; que tiene que ver básicamente con las competencias que nosotros en matemáticas estamos desarrollando y potencializando.

Moderador 1: Bueno, después de la de la cartilla, nosotros en el BoxSet nos encontramos con la tapa superior que tiene una doble funcionalidad, tiene un anverso y un reverso, el cual la podemos llegar a utilizar dependiendo lo que vayamos a explicar.

En el anverso, que es la principal que nos encontramos, es una cuadrícula en el cual las fichas que acabo de mostrar las podemos llegar a encajar, entonces las fichas de x al cuadrado las podemos encajar acá en los cuadrillos que miden x al cuadrado. Las fichas tienen que encajar de forma exacta, las fichas que miden x las podemos encajar en los rectángulos, en cualquier forma, horizontal o vertical, y las fichas que miden 1, pues las podemos llegar a encajar acá (señala la sección de la tapa). Esto lo hacemos pretendiendo que el estudiante no se salga y/o no empiece a realizar otro tipo de figuras, que le salga cosas que no sean paralelogramos de ángulos rectos, es decir, la idea es siempre al realizar áreas, es que siempre nos den paralelogramos de ángulos rectos, entonces esto nos encasilla a que el estudiante sí o sí le dé ese tipo de figuras.

Y en el reverso, ya después de explicar toda la parte de la factorización, el reverso nos funciona para, con las mismas fichas, poder hacer un despeje de ecuaciones de primer grado, haciendo, pues, trasposición de términos.

Antes de continuar, o sea, en teoría ya acabamos de ver todo lo del BoxSet, en cuanto a fichas, cartilla y caja, nosotros vamos a realizar unas preguntas, pero antes queremos saber si usted tiene alguna pregunta acerca de algo del material, relacionado con el manejo, algo que no haya quedado claro y demás.

Entonces, no sé si alguno tenga alguna duda, pregunta o inquietud.

Profesor 4: No, por mi parte, no.

Profesor 1: Más que una duda, de pronto cuando piensan en el material aplicado en un grupo focal con estudiantes, tener en cuenta que pues no todos tienen el mismo ritmo aprendizaje y con el mismo ejemplo podrán entender.

Desde el momento que se entiende que la explicación inicial, que todas tengan eso, claro, pero pensar en diferentes niveles de ese, por ejemplo, se van a mirar ese caso de factores en el rectángulo que estás mirando.

Como algunos un poco más sencillos, unos un poco más complicados como bueno. Ese será el nivel 1. Nivel principiante, es el segundo nivel y el nivel experto. Que se puede asegurar que con los dos primeros niveles el tema está comprendido, pero para aquellos estudiantes hombres o mujeres que tengan esa facilidad con la matemática, pues de presentarles algo que realmente parece llegue a ser un desafío, porque muchas veces la preocupación es “esto es muy complicado y por eso no le pongo interés”.

También, por el contrario, esto es muy fácil y no necesito poner atención a ese tipo de cosas y eso al final se vuelve también una dificultad del aprendizaje, porque el no prestar atención

totalmente a las cosas, el estudiante que normalmente es pila para la matemática pues no está teniendo falencias, pero sí, porque incluso este pelado que es inteligente, esa muchacha inteligente, tiene las dificultades.

Moderador 1: Vale, gracias, no sé, profe 2 y profe 3 si tienen alguna duda sobre el material.

Profesor 2: No, no tengo.

Profesor 3: Es más como una apreciación.

Comparto lo que dice Profe 1. Siento que como docentes y dueños del material, deben presentarlo de una forma más dinámica, digamos, si es un aprendizaje que los chicos puedan utilizar, no sé en su vida cotidiana. Obviamente fue una breve presentación del BoxSet, pero siento que tampoco lo están presentando como debe ser.

Por ejemplo, yo voy a decir: voy a representar tal ecuación mediante estas fichas, no se una secuencia de factorización de tal, pero no se le dice para que se utiliza, no nos lleva a ver nuestra relación con la vida cotidiana.

Moderador 1: Partimos que el BoxSet, está enfocado para la enseñanza. Quiere decir que la herramienta es únicamente de uso para el docente, o sea, es una herramienta que va a utilizar el docente hacia los estudiantes. ¿Entonces, quizás cuando nos pongamos a ver la cartilla no va a tener tantos elementos de imágenes, no va a tener tantos elementos lúdicos para el estudiante porque es una cartilla con la cual el docente se va apoyar, es decir, es de uso netamente del docente y con ella va a tener una guía del docente.

Ahora, la idea de lo que le estamos mostrando porque digamos, es un preámbulo en la primera parte, pues se enseña toda la parte de las fichas, cómo se manejan las fichas.

En teoría cada una de las fases, cada uno de los casos de factorización, pues va a tener un apartado en el cual empezamos por el área de terrenos, por ejemplo, la primera parte que no se les mostró porque es una introducción, solo mostramos el caso de factorización, pero antes de mostrar el caso de factorización, los estudiantes tienen que tener en cuenta que tener claro qué es factorizar.

Entonces, se empieza a plantear la factorización es la forma de escribir un área en términos de base por altura de un rectángulo, de un cuadrado, y se empieza mostrando ejemplos como, digamos, los apartamentos. Un apartamento, cuando usted va caminando y ve una valla publicitaria y ve un apartamento que dice que mide 32 m², entonces decimos que si el apartamento mide 32 m², ¿cuánto cree que tiene que tener de frente y de fondo, para que me dé 32 m²?. Entonces el estudiante puede llegar a decir: “bueno. puede medir 16m por 2m. O puede medir 8m por 4m y ahí ya tendríamos completos el largo y el ancho del del apartamento”.

Al estudiante se supone que, si le daremos la herramienta para empezar a enlazar eso, ¿entonces? Ah, bueno, usted está factorizando al momento que usted me está diciendo “que ese apartamento que mide 32 m² es porque la el frente mide 8 metros y la profundidad mide 4 metros. Eso es una factorización; expresarlo en términos de base, por altura o de frente por profundidad, pues es factorizar. Siempre se tiene la idea de que si vamos a enlazar todos los casos de factorización desde el preámbulo para que el docente pueda enseñarlo desde casos de la vida cotidiana, obviamente, más adelante se volviendo un poco más abstracto, pero por eso nosotros los enlazamos y no estamos brindando definiciones formales, no estamos yendo a lo que dice el libro de siempre, sino que las definiciones que nosotros damos siempre vamos a dar a entender que estamos manejando son terrenos, entonces en una parte en la que moderador 2 estaba explicando, estaba mostrando terrenos, entonces si usted tiene un terreno de 32 unidades

cuadradas, pues como lo puede escribir en base de altura, estamos hablando de terrenos, de tierra que se va a construir.

Profesor 3: Vale. gracias.

Moderador 1: Bueno, no sé si hay alguna otra duda. Pregunta. Inquietud.

Ahora nosotros vamos a preguntar, pero no sé si hay alguna otra duda.

Moderador 2: En ese orden de ideas, y a partir de todo lo que han visualizado del material, ¿cuáles creen que son los aspectos más favorables de este material?

Profesor 1: Si puedo comenzar respecto a lo que he visto, lo que han presentado como BoxSet, lo chévere es que no solo se quedan en lo típico, sino que los videos explicativos que proponen son sencillos, sino que además permite al estudiante interactuar con él.

Al tener esas fichas, poderlas manipular, se cuenta que si bien $12X$ puede ser “x” y dos en forma de factorizar. Se puede trabajar por $2X$ y 6 y trabajarlo de una manera continuada.

Por lo que entiendo muchas más cosas y yo creo que es esas cosas, del hacerles recordar que hay videos sobre tal caso de factorización, trabajar con las fichas en el papel, donde habrá más tiempo para practicar y trabajarlas en primaria con este material, pero tocaría mirar de qué manera se realizaría y trabajar a partir de otros materiales por ejemplo el mínimo común múltiplo a partir de trozos de lana para mirar que tanto para que cierta cantidad sean iguales o el máximo común divisor también es cuál es el mayor costo de hacer.

Y esto permite que el estudiante y el docente que ha estado trabajando con él, puede ver las mejoras en su proceso a través del material, haciendo procesos de retroalimentación, por ejemplo, diciendo algo como “recuerda que puedes repetir esta unidad”, eso es como yo lo veo.

Moderador 2: Profesor 4, su opinión, por ejemplo.

Profesor 4: Sí pues, la verdad es que es bastante interesante. Los estudiantes puedan interactuar con él en álgebra y en la factorización, porque muchas veces eso en el aula se deja un proceso o precedentemente, entonces como dijo profesor 1, ellos puedan identificar, ubicar, ellos mismos puedan diseñar y/o construir la factorización y eso mayor recordación y pues mayor sentido en este concepto.

Moderador 2: Ok, profe. Gracias.

Profesor 3: Yo creo que otra ventaja de este recurso, es que está diseñado para las personas no videntes.

Sabemos que el proceso de inclusión en Colombia pues en todas las áreas y en todas las mentes es compleja, sí más que todas las matemáticas, entonces están apostando a un proceso de cambio.

Moderador 2: Bueno, la siguiente pregunta es, ¿cuál es el impacto que puede generar este material dentro del proceso de las enseñanzas de matemáticas?

Profesor 4: Considero que es importante observar en la parte manipulativa porque se brinda una mayor oportunidad de comprender lo que se está haciendo, lo que implica que sea “x” al cuadrado, que sea dos x, porque muchas veces ellos confunden los exponentes, piensan que “x” al cuadrado es igual a 2x.

Pues me parece que usando este material les permite obtener esa esa claridad de qué es lo que sucede cuando el en ese momento, la “x” acompaña al exponente o al coeficiente en ese momento. Y creo que es más sencillo para los estudiantes abordar más contenidos, más adelante.

El álgebra es como el inicio para comprender las funciones y su comportamiento a través del tiempo.

Profesor 1: No, pues, ya lo socialicé con la pregunta anterior.

Profesor 2: Sí, tengo una apreciación a lo que han abordado y es como que se debe tener en cuenta, a que algunos no puedan tener las herramientas básicas, sólo puede conseguir lo demás.

Creo que nosotros, como docentes, no necesariamente tenemos que decirles cual es el algoritmo de la factorización, cual es el máximo común divisor o frente a los exponentes que menciono profesor 4 y demás; sino que también debemos permitirle que dirijan las actividades con el material. Sí, antes de enseñar la factorización, enseñar factores y además, les entregó el material y les digo como tengo estas piezas, fichas de colores y ver esas opciones que pueden armar. Y les pregunto, ¿Qué diferencias encuentran entre ellas?. Es decir, el poder generar unas preguntas orientadoras. Por ejemplo, si yo digo que la pieza de color rojo mide x^2 , pero la de color azul es " x ", entonces, ¿cómo puede expresar la longitud de los lados?, ¿Cómo se halla el área?, ¿Cómo se halla el perímetro? Y todo ese tipo de preguntas, sin siquiera mencionar lo que es la factorización, sino que ellos tengan primero un acercamiento y con ellos, cuando yo vaya, entonces la participación para ellos va a ser un poco más cercano.

Personalmente hice una apuesta en Colombia frente al hecho de no enseñar factorización por los casos de factorización, sino como el proceso que mediante el uso de la propiedad distributiva entre diferentes factores y también es dejar de lado esa perspectiva tan cuadrículada de que es un caso, este es el otro, es un trinomio cuadrado perfecto o este no es trinomio, porque finalmente todos son trinomios y lo que pasa es que las caracterizamos por unas diferencias que se tienen.

Conocer este tipo de herramientas es distinto en el que nosotros como docentes, nos invita a retornos y hacer que los estudiantes lo aprecian porque tienen un aprendizaje más significativo y desde antes, el hacer interacciones con preguntas orientadoras.

Moderador 2: Muchas gracias.

La siguiente pregunta es: ¿Creen ustedes que a más docentes les gustaría usar en su aula?

Profesor 3: Como lo mencionaba el profesor anterior, esto depende de cómo presente y se perciba y se maneje el material, porque siento que de alguna u otra manera el docente intenta innovar y el Boxset a su vez no es tan complejo de manejar, teniendo en cuenta el agregar las preguntas orientadoras con el fin que tanto docente como estudiante, se sientan mas amenos al uso del material y no hacer las matemáticas tan estructuradas.

Profesor 4: Me parece que es interesante porque dije anteriormente, si la interacción en este material permite cómo hacer una perspectiva a álgebra, sin embargo, no sé hasta qué punto los docentes como dispuestos a formarse y capacitarse porque sí, claro que requieren manejar muy bien el material, las preguntas que van hacer con los estudiantes y demás. No es para nadie un secreto, que los docentes se basan en lo que ya saben y conocen (comodidad), haciendo lo de enseñar el algoritmo y dejando ejercicios para practicar y este material los lleva a salir de esa zona de confort. A su vez, el innovar para algunos docentes los lleva a que no se les altere el normal desarrollo de los contenidos.

Moderador 2: Dentro de las últimas preguntas que tenemos de profundización, si ustedes pudieran cambiar algo de este material, es decir, el material en sí, forma, colores, tamaño, ¿qué le cambiarían?

Profesor 1: Pues no sé, de pronto como este material va a ser cortado (se refiere a la hoja llamada ANEXO 1 de las fichas), entonces hacerlo e imprimirlo en otro que sea más grueso y a su vez más resistente que permite que dure mucho tiempo más.

Profesor 4: Estoy de acuerdo con el profesor 1.

Moderador 2: Listo. Entonces, continuó moderador 1.

Moderador 1: Traigo unas preguntas ya de cierre para terminar, ¿cuáles cree usted que son las principales limitaciones que encuentra este material didáctico para su uso masivo en la escuela?

Profesor 1: De pronto una limitación, puede ser que el material no sea lo suficientemente resistente ya que, al ser manipulado tanto por la población no vidente como la vidente, que requiere de un uso masivo. Además, tanto en escuelas públicas o privadas, implicaría el imprimir nuevamente por si llegan a recortar más, gastos de papelería, posibles reclamos por parte de los padres de familia, quizás por la cuestión de tener que reponer el material, etc... Por ende, en un material más resistente puede resultar más útil para ellos.

Otra situación que puede presentarse es que a mayor cantidad de estudiantes (sobre todo en escuelas públicas, donde se observa con mayor veracidad este evento), mayor pueden presentarse mayores posibilidades de pérdida o se dañe el material o la se preste para situaciones típicas de los estudiantes “profe no traje las fichas”.

Profesor 3: Yo creo que otra limitación puede ser que la cartilla debe estar acompañada del docente así cuente con los videos y toda la explicación que ofrece la misma. Un claro ejemplo es como sabemos que la educación virtual (que tuvimos casi por dos años) a la educación netamente presencial, pues tiende a confundirse entonces.

Además, los vídeos, aunque son explicativos, tienden a ser un poco largos y aburridos.

Entonces creo que eso sería una limitante para que el estudiante si le genere interés esa caja y pueda trabajarla de forma individual.

Moderador 1: Gracias. La última pregunta es, ¿cuáles cree usted que serían algunas ventajas de usar este material didáctico para los procesos de enseñanza del álgebra escolar?

Profesor 4: Ayuda en el proceso de recordación en los estudiantes y también en el darles contexto a los conceptos y en este caso al de la factorización. Considero que esto es fundamental.

Profesor 1: Esa cadena de conceptos, que sencillamente nos va ayudar a mirar que no es un tema simplemente que muestra el profesor, sino que es la contextualización de cierta cadena de conocimientos. Y que el estudiante pueda devolver en cualquier momento a revisar el proceso, es una gran ventaja.

No es solamente, que aprendan únicamente en factorización, sino que también tienen todas las herramientas necesarias para trabajar para unificar conceptos y avanzar.

Moderador 1: Listo. Gracias. Continuo moderador 2.

Moderador 2: Para culminar, queremos darles las gracias por tomar parte de su tiempo, el contribuir con esta investigación. Todas sus opiniones son totalmente válidas que nos sirven, no solamente como el análisis posteriori, sino que también nos sirve como un ejercicio de retroalimentación frente al material que estamos construyendo, el cual pasará a su versión 3D.

Nuevamente les agradecemos por el espacio que nos han brindado. Y les estaremos comentando más adelante los resultados obtenidos, a partir de la retroalimentación que nos han hecho.

Muchísimas gracias y que continúen teniendo un excelente día. Ya se pueden desconectar si de pronto no hay alguna duda, alguna inquietud.

Profesor 1: Hasta luego. Gracias.

Profesor 2: Gracias.

Profesor 3: Hasta luego.

Profesor 4: Hasta luego. Feliz resto de día.

Anexo 6. Categorías del material didáctico Boxset que son analizadas posteriormente a la presentación del material en el grupo focal.

<p style="text-align: center;">Categoría analizada: Expectativa.</p> <p>Permite analizar la perspectiva del material dentro de un imaginativo (idea mental) o suposiciones que puedan hacer de ello en cuanto a beneficios, utilidad, manipulación; etc...</p>
Observación
<p>Profesor 1: Cuando lo mencionas y yo pienso que es una serie de herramientas en las cuales se pueden ver algunas situaciones, algunas formas de factorizar, del cómo a partir de algo visual, meramente tangible se puede hacer paso a paso la factorización. También el mover ciertas cosas, se puede mostrar una igualdad.</p> <p>Profesor 4: Material tangible, algo manipulable para poder mirar cómo pues una caja con cosas como para entender la factorización.</p> <p>Profesor 2: Hace más relación con los recursos que se pueden implementar para comprender lo que pasa en la factorización.</p>
<p style="text-align: center;">Categoría analizada: Beneficios.</p> <p>Busca el impacto que puede llegar el trabajar con material didáctico, respecto a recursos tradicionales como tablero, cantidad exagerada de ejercicios para aprender una temática.</p>
Fortalezas
<p>Profesor 3: Primero ayuda a que la clase no sea tan monótona. Segundo, ayuda a que los muchachos generen interés. Además, que hay una recordación o una apropiación de la temática.</p> <p>Profesor 1: La factorización no solamente es algebraica, sino que, con este tipo de herramientas, creo que amplía más la forma visual y complementaria mucho más el aprendizaje de la factorización.</p>
Categoría analizada: Novedoso.

<p>Permitirá que se analice la innovación que tiene este material, ya sea por su forma, colores o propósito que tendrá el mismo.</p>	
<p>Fortalezas</p>	
<p>Profesor 1: No solo se quedan en lo típico, sino que los videos explicativos que proponen son sencillos, y además permite al estudiante interactuar con material.</p> <p>Profesor 3: Este material incluye a la población que presenta algún tipo de discapacidad visual, lo que implica que están trabajando también el tema de la inclusión educativa.</p>	
<p>Categoría analizada: Favorabilidad.</p>	
<p>Determinar los aspectos positivos favorabilidad del material didáctico, así como lo negativo para poder mejorar.</p>	
<p>Fortalezas</p>	
<p>Profesor 1: Hacerles recordar que hay videos sobre tal caso de factorización, trabajar con las fichas en impresas en papel y en plástico, donde habrá más tiempo para practicar.</p> <p>Profesor 4: Los estudiantes puedan interactuar con él en álgebra y en la factorización, porque muchas veces eso en el aula se deja un proceso o precedentemente, entonces como dijo profesor 1, ellos puedan identificar, ubicar, ellos mismos puedan diseñar y/o construir la factorización y eso mayor recordación y pues mayor sentido en este concepto.</p>	
<p>Categoría analizada: Impacto.</p>	
<p>Pretende analizar la sensación que puede dejar el material en los procesos de enseñanza.</p>	
<p>Fortalezas</p>	<p>Aspectos a mejorar</p>
<p>Profesor 4: Considero que es importante observar en la parte manipulativa porque se brinda una mayor oportunidad de comprender lo que se está haciendo, lo que implica que sea “x” al cuadrado, que sea dos x, porque muchas veces ellos confunden los exponentes, piensan que “x” al cuadrado es igual a 2x.</p>	

Profesor 1: Lo bueno es que permite recordarles que hay videos sobre tal caso de factorización, trabajar con las fichas en el papel, donde habrá más tiempo para practicar.

Categoría analizada: Aspectos relevantes.

Analizar aquellos elementos o aspectos importantes que permitirán que en el docente se genere un gusto por el material y así poderlo compartir con otros colegas.

Fortalezas	Aspectos a mejorar
<p>Profesor 4: Si la interacción en este material permite cómo hacer una perspectiva al álgebra, sin embargo, no sé hasta qué punto los docentes están como dispuestos a formarse y capacitarse porque sí, claro que requieren manejar muy bien el material, las preguntas que van hacer con los estudiantes y demás.</p>	<p>Profesor 3: Determinar cómo se va a presentar el material porque esto influye en cómo se perciba y se maneje el material, porque siento que de alguna u otra manera el docente intenta innovar y el Boxset a su vez no es tan complejo de manejar.</p> <p>Profesor 4: No es para nadie un secreto, que los docentes se basan en lo que ya saben y conocen (comodidad), haciendo lo de enseñar el algoritmo y dejando ejercicios para practicar y este material los lleva a salir de esa zona de confort. A su vez, el innovar para algunos docentes los lleva a que no se les altere el normal desarrollo de los contenidos.</p>

Categoría analizada: Diseño.

Permitirá tener otros diferentes puntos de vista y/o sugerencias en cuanto al diseño del material como colores, tamaños, forma; entre otros. Siendo esto una retroalimentación para la entrega final del mismo.

Fortalezas	Aspectos a mejorar
<p data-bbox="123 289 672 688">Profesor 2: Conocer este tipo de herramientas es distinto en el que nosotros como docentes, nos invita a retornos y hacer que los estudiantes lo aprecian porque tienen un aprendizaje más significativo.</p> <p data-bbox="123 726 672 1052">Profesor 4: El color de las fichas es adecuado porque también brinda un sello colombiano. El tamaño de las fichas y la forma que tiene tanto cartilla y caja son visualmente agradables.</p>	<p data-bbox="704 289 1500 468">Profesor 1: Tener en cuenta que pues no todos tienen el mismo ritmo de aprendizaje y con el mismo ejemplo podrán entender.</p> <p data-bbox="704 506 1500 684">Pensar en diferentes niveles de situaciones, ejercicios o representaciones por cada caso, que invite a retar a aquellos estudiantes que de alguna forma sobresalen dentro de la clase.</p> <p data-bbox="704 722 1500 837">Profesor 3: Mejorar la manera en la cual se presentará el BoxSet, es decir, hacerlo más interactivo desde el inicio.</p> <p data-bbox="704 875 1500 1860">Profesor 2: Debemos permitirle que dirijan las actividades con el material. Sí, antes de enseñar la factorización, enseñar factores y además, les entregó el material y les digo como tengo estas piezas, fichas de colores y ver esas opciones que pueden armar. Y les pregunto, ¿Qué diferencias encuentran entre ellas? Es decir, el poder generar unas preguntas orientadoras. Por ejemplo, si yo digo que la pieza de color rojo mide x^2, pero la de color azul es "x", entonces, ¿cómo puede expresar la longitud de los lados?, ¿Cómo se halla el área?, ¿Cómo se halla el perímetro? Y todo ese tipo de preguntas, sin siquiera mencionar lo que es la factorización, sino que ellos tengan primero un acercamiento y con ellos, cuando yo vaya, entonces la participación para ellos va a ser un poco más cercano.</p>

	<p>Profesor 1: Pues no sé, de pronto como este material va a ser cortado (se refiere a la hoja llamada ANEXO 1 de las fichas), entonces hacerlo e imprimirlo en otro que sea más grueso y a su vez más resistente que permite que dure mucho tiempo más.</p>
--	---

Categoría analizada: **Limitaciones.**

Ayuda a identificar el alcance que tiene el material, hasta donde se puede llegar y lo que no sería viable de hacer con dicho material didáctico.

Aspectos a mejorar

Profesor 1: Puede ser que el material no sea lo suficientemente resistente ya que, al ser manipulado tanto por la población no vidente como la vidente, que requiere de un uso masivo.

Profesor 3: Yo creo que otra limitación puede ser que la cartilla debe estar acompañada del docente así cuente con los videos y toda la explicación que ofrece la misma.

Categoría analizada: **ventaja y desventaja.**

Estas dos preguntas nos permitirán ver las condiciones a favor o en contra, que tiene este material para la enseñanza de la factorización.

Fortalezas	Aspectos a mejorar
-------------------	---------------------------

<p>Profesor 1: Esto permite que el estudiante y el docente que ha estado trabajando con él, puede ver las mejoras en su proceso a través del material, haciendo procesos de retroalimentación, por ejemplo, diciendo algo como “recuerda que puedes repetir esta unidad”.</p> <p>Profesor 4: Pues me parece que usando este material les permite obtener esa esa claridad de qué es lo que sucede cuando el en ese momento, la “x” acompaña al exponente o al coeficiente en ese momento. Y creo que es más sencillo para los estudiantes abordar más contenidos, más adelante.</p>	
---	--

Profesor 3: Sabemos que el proceso de inclusión en Colombia pues en todas las áreas y en todas las mentes es compleja, sí más que todas las matemáticas, entonces están apostando a un proceso de cambio.

Profesor 1: Esa cadena de conceptos, que sencillamente nos va ayudar a mirar que no es un tema simplemente que muestra el profesor, sino que es la contextualización de cierta cadena de conocimientos. Y que el estudiante pueda devolver en cualquier momento a revisar el proceso, es una gran ventaja.

No es solamente, que aprendan únicamente en factorización, sino que también tienen todas las herramientas necesarias para trabajar para unificar conceptos y avanzar.

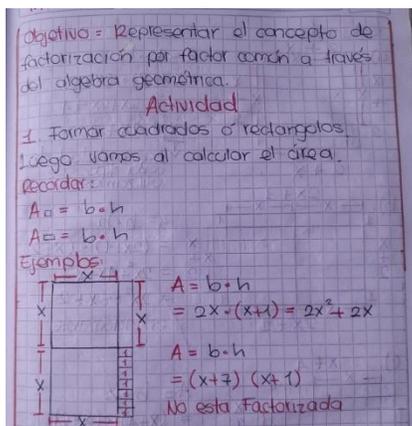
Anexo 7.

Prueba de pilotaje con estudiantes del colegio Lestonnac compañía de María haciendo uso del primer diseño del BoxSet.

1. Factor común.

Figura 1

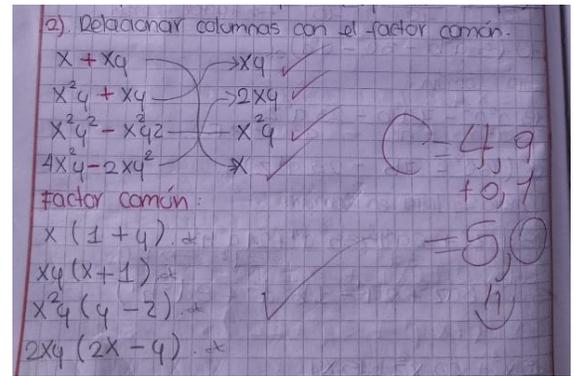
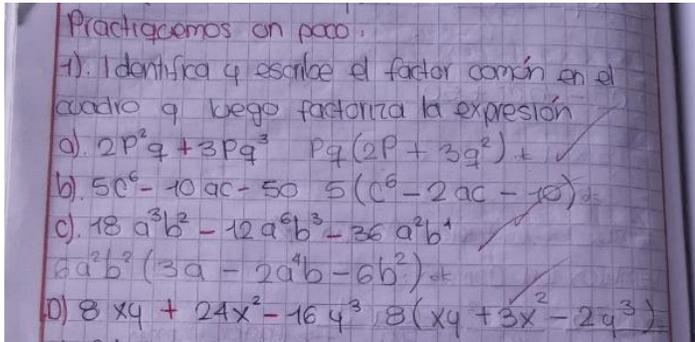
Construcción de paralelogramos de ángulos rectos por parte de las estudiantes, haciendo uso de los tres tipos de fichas.



Nota: Cuaderno de trabajo de una estudiante durante la sesión de clase.

Figura 2

Aplicación del algoritmo para representar algebraicamente el presente caso de factorización, a través de las habilidades de identificar y relacionar.

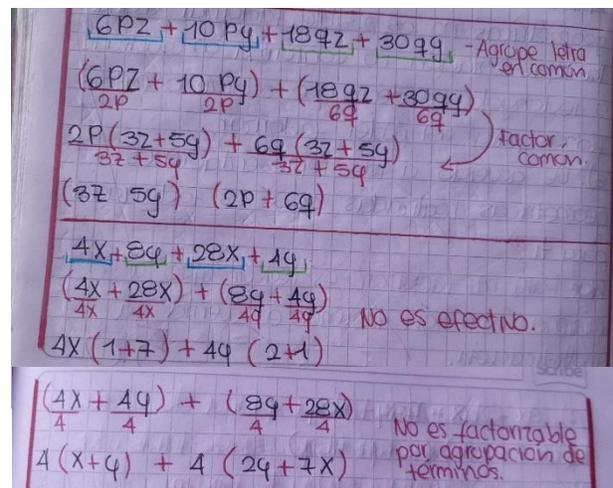
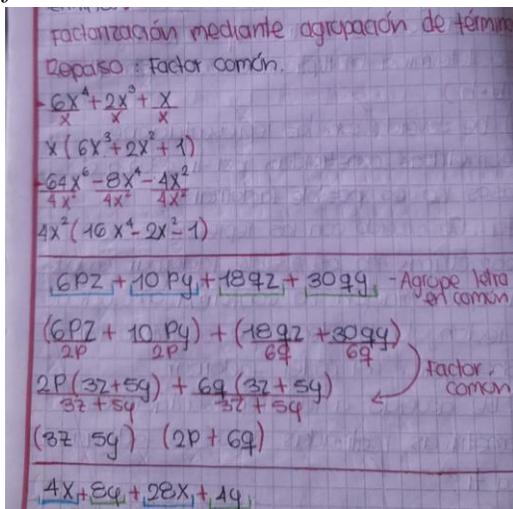


Nota: Cuaderno de trabajo de una estudiante durante la sesión de clase.

2. Factorización mediante agrupación de términos.

Figura 3

Aplicación del algoritmo para representar algebraicamente el presente caso de factorización.

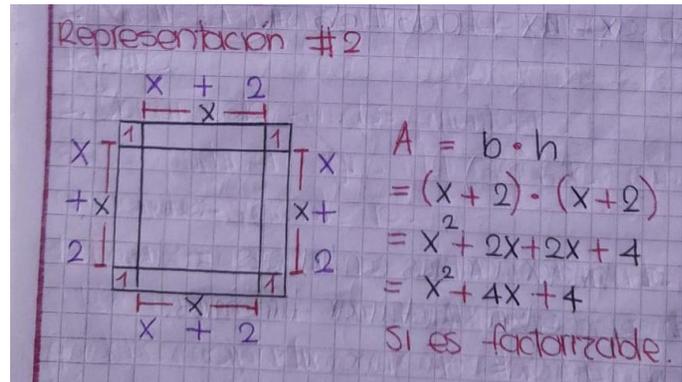
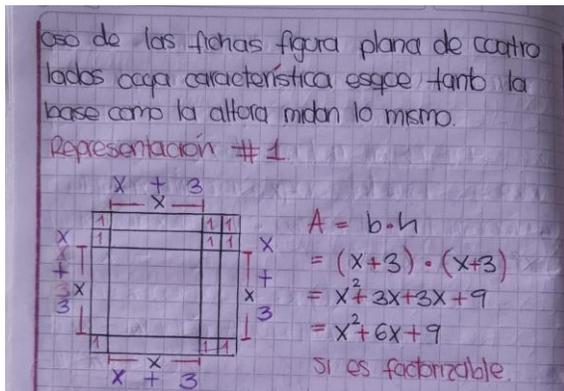


Nota: Cuaderno de trabajo de una estudiante durante la sesión de clase.

3. Factorización de trinomios.

Figura 4

Construcción de paralelogramos de angulos rectos, haciendo uso de los tres tipos de fichas y determinar la medida de su base y altura.

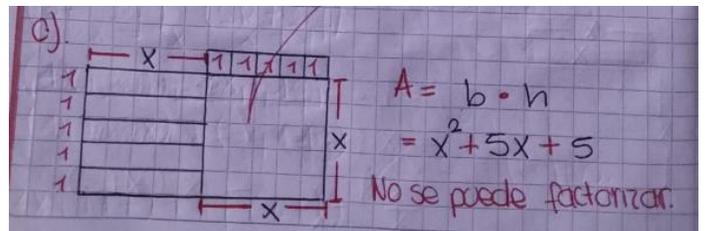
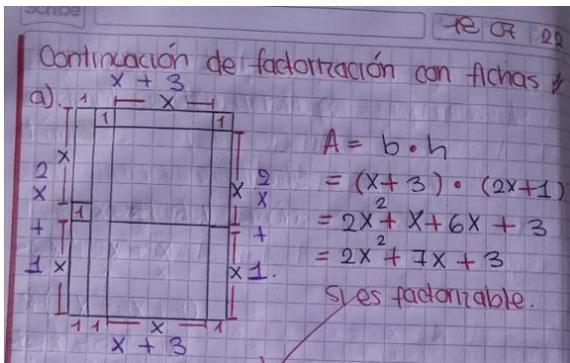


Nota: Cuaderno de trabajo de una estudiante durante la sesión de clase.

3.1 Trinomio cuadrado perfecto (TCP).

Figura 5

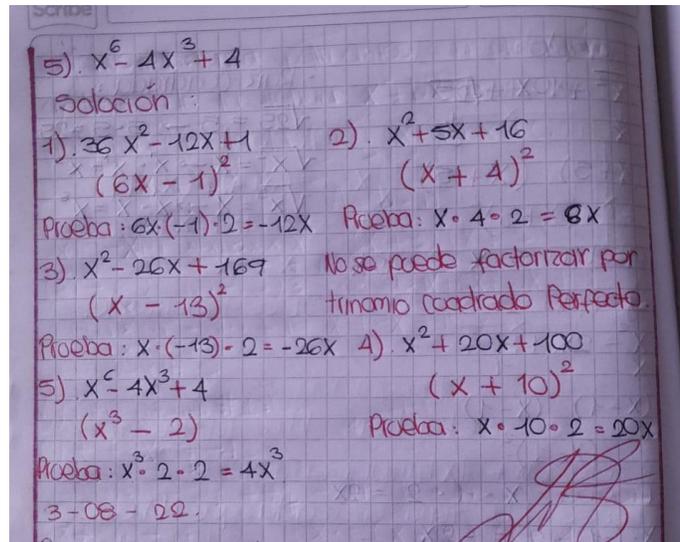
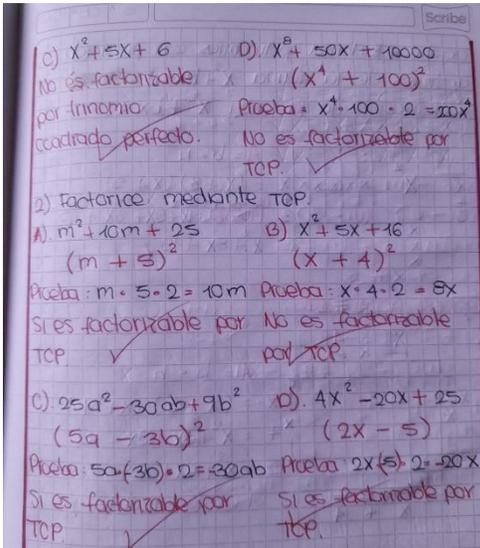
Representación geométrica



Nota: Cuaderno de trabajo de una estudiante durante la sesión de clase.

Figura 6

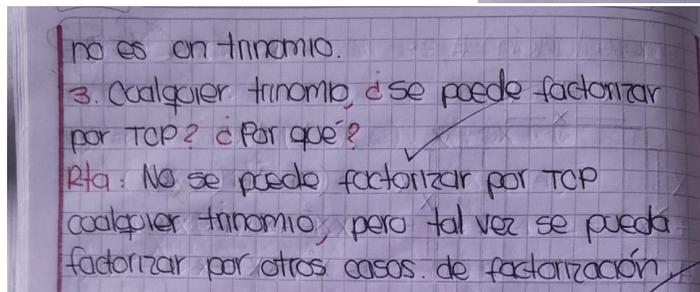
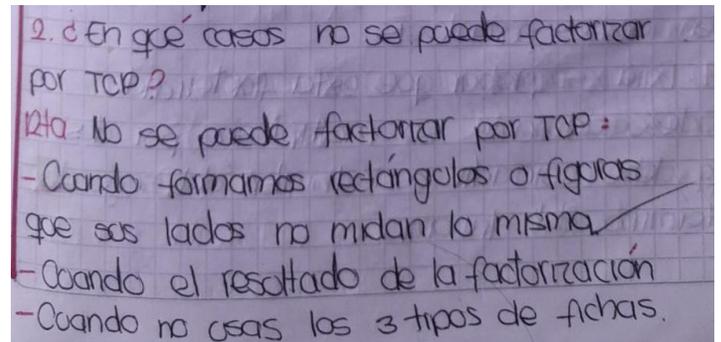
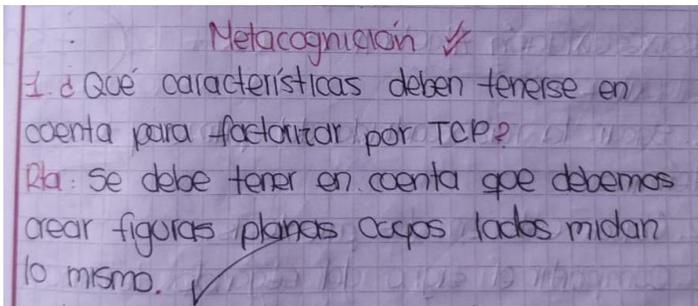
Representación algebraica



Nota: Cuaderno de trabajo de una estudiante durante la sesión de clase.

Figura 7

Se realiza proceso de metacognición, con el fin de retroalimentar el proceso de aprendizaje.

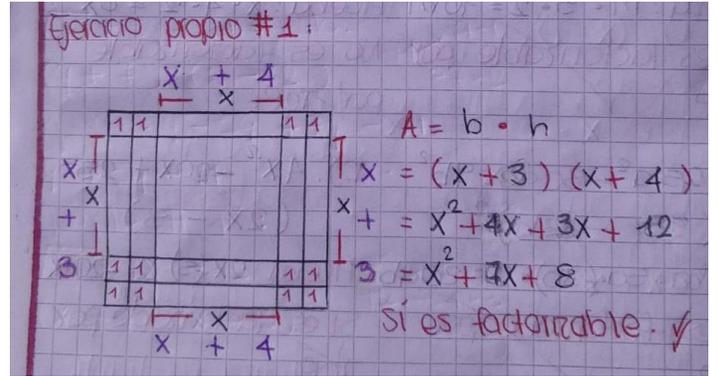
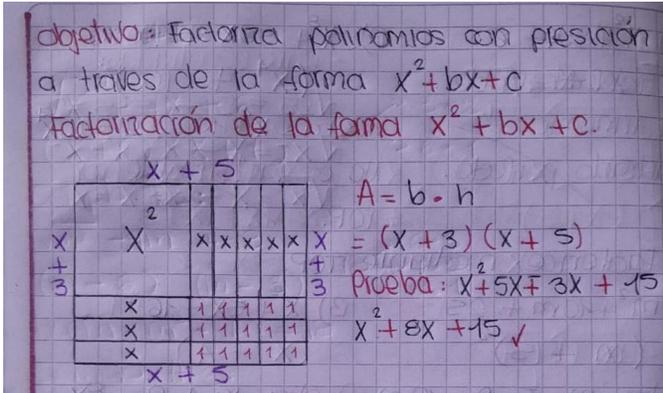


Nota: Cuaderno de trabajo de una estudiante durante la sesión de clase.

3.2 Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.

Figura 8

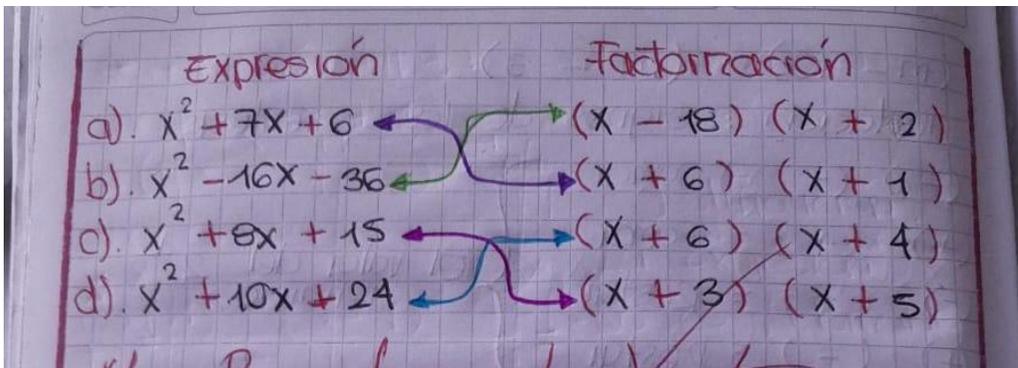
Representación geométrica



Nota: Cuaderno de trabajo de una estudiante durante la sesión de clase.

Figura 9

Representación algebraica

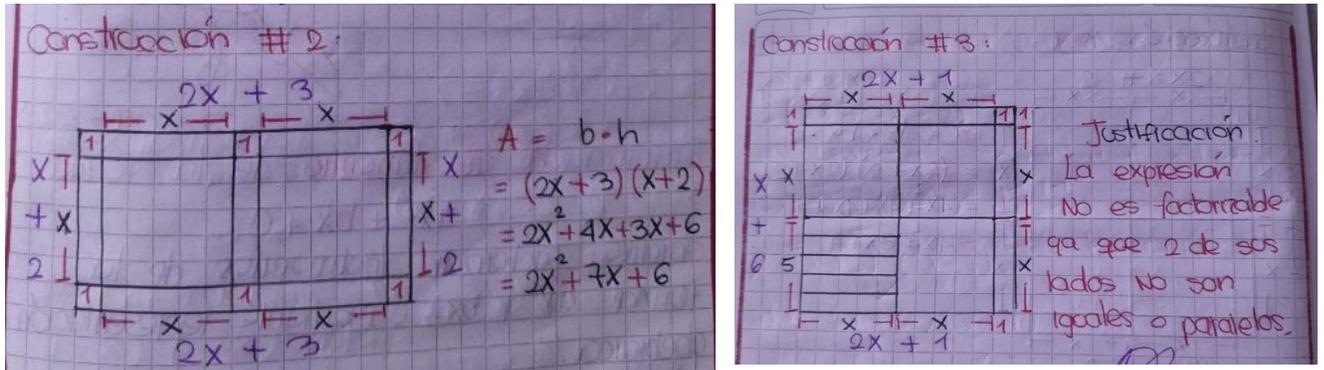


Nota: Cuaderno de trabajo de una estudiante durante la sesión de clase.

3.3 Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.

Figura 10

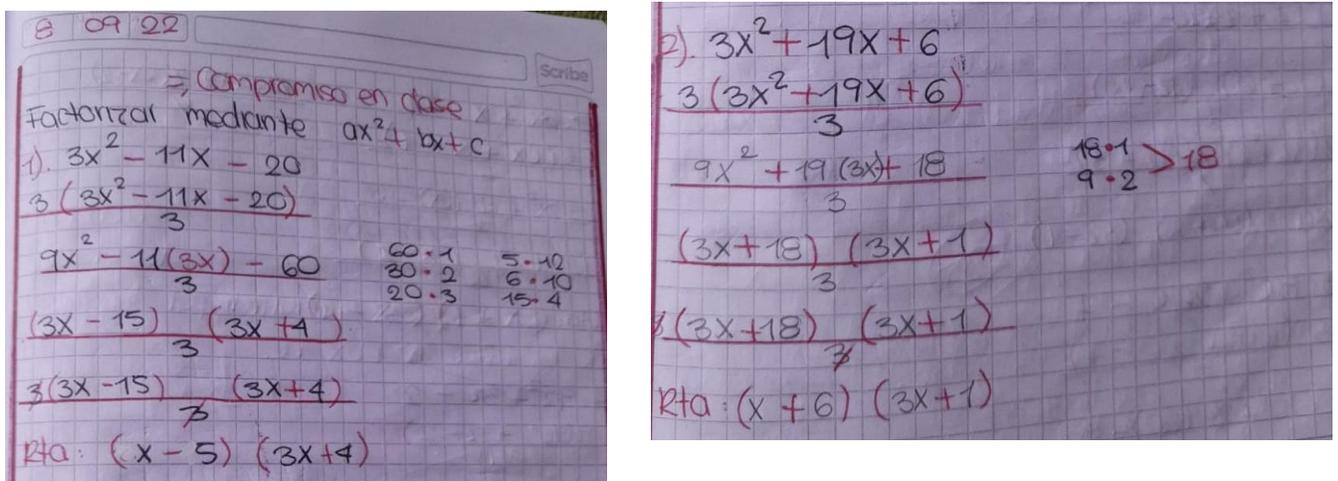
Representación geométrica.



Nota: Cuaderno de trabajo de una estudiante durante la sesión de clase.

Figura 11

Representación algebraica

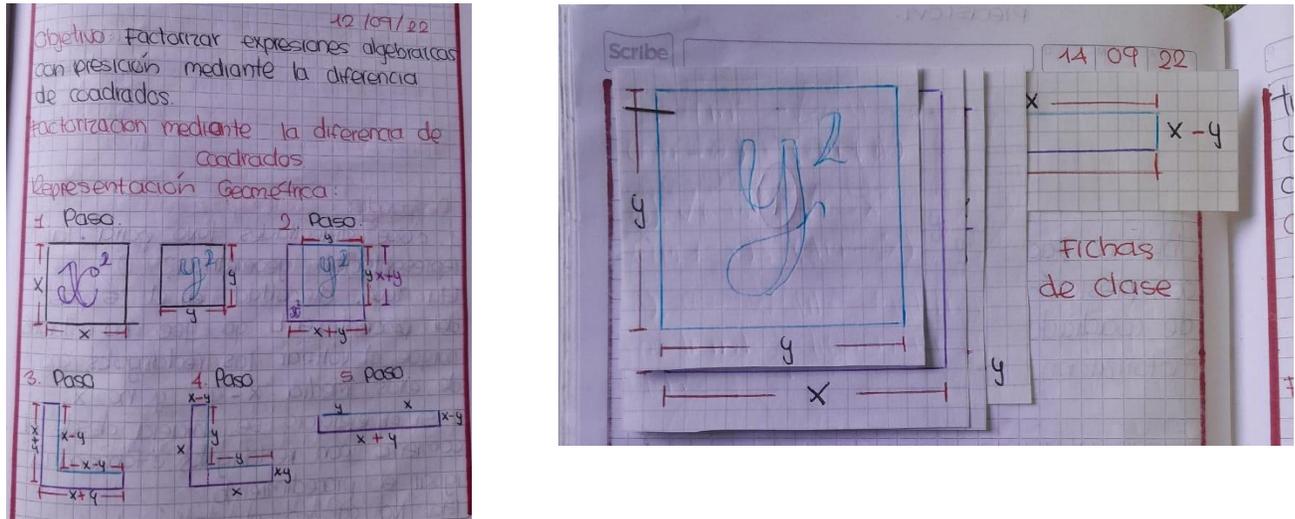


Nota: Cuaderno de trabajo de una estudiante durante la sesión de clase.

4. Factorización mediante diferencia de cuadrados.

Figura 12

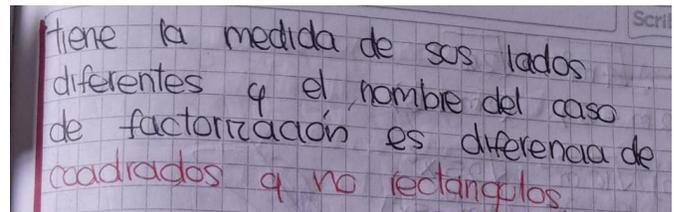
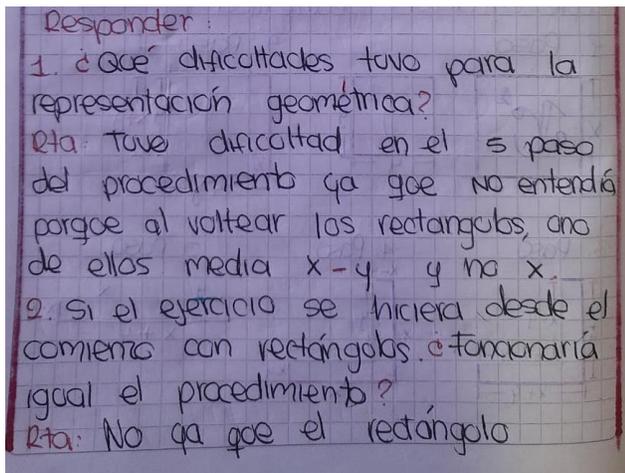
A través del uso del álgebra en papel, representan la diferencia de cuadrados, mediante una serie de indicaciones brindadas por el docente.



Nota: Cuaderno de trabajo de una estudiante durante la sesión de clase.

Figura 13

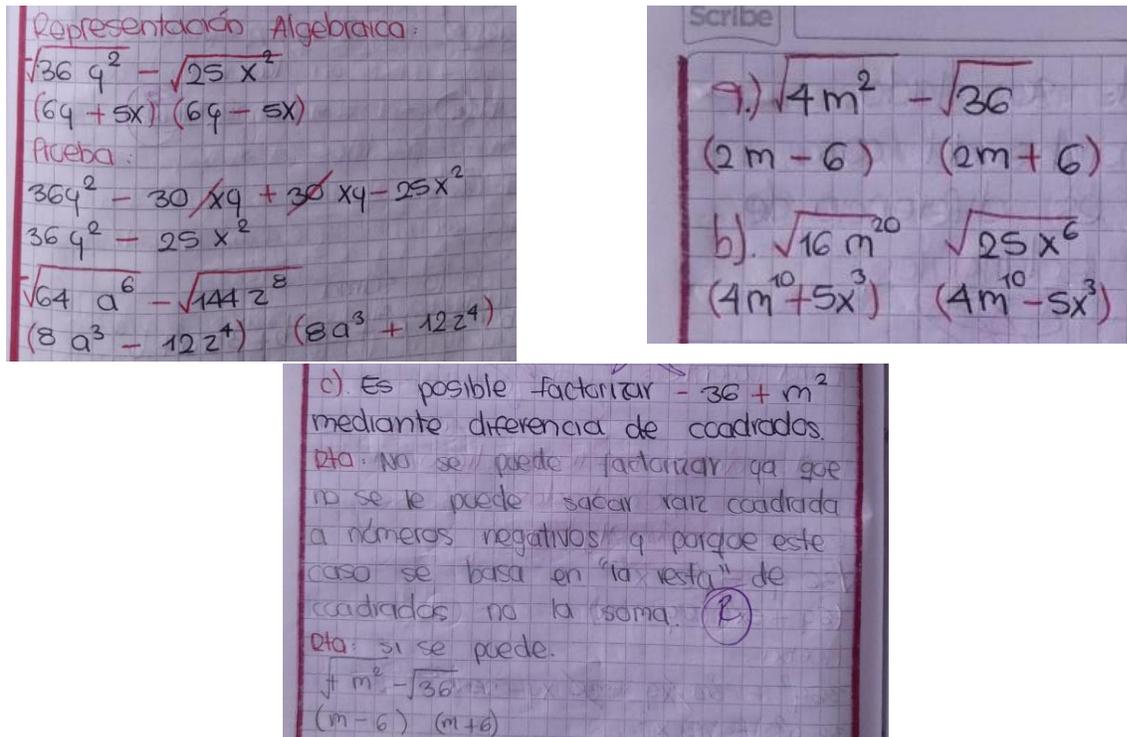
Se realiza actividad de metacognición, en el cual las estudiantes evalúan su proceso frente a los aprendizajes adquiridos de acuerdo a la construcción elaborada.



Nota: Cuaderno de trabajo de una estudiante durante la sesión de clase.

Figura 14

Las estudiantes aplican el algoritmo para representar algebraicamente el presente caso de factorización.



Nota: Cuaderno de trabajo de una estudiante durante la sesión de clase.

Anexo 8.

Primer diseño del material didáctico BoxSet.

La primera idea del BoxSet, se plantea en términos de una ruta de aprendizaje en el cual los estudiantes pueden aprender los diferentes casos de factorización. Así mismo, se plantea sobre las medidas de las dimensiones de las fichas, ya que se busca que los estudiantes no realicen representaciones por encaje, ya que esto puede generar obstáculos al momento de determinar la medida de su base y altura.

Para observar con mayor detalle, puede dirigirse al siguiente link:

[https://docs.google.com/spreadsheets/d/1mjbANA4_XU7hFpO_RM-oTdwvFDyXnytL/edit?usp=share link&ouid=113209373457246583111&rtpof=true&sd=true](https://docs.google.com/spreadsheets/d/1mjbANA4_XU7hFpO_RM-oTdwvFDyXnytL/edit?usp=share_link&ouid=113209373457246583111&rtpof=true&sd=true)

Anexo 9.

Diseño final de la cartilla BoxSet.

Teniendo en cuenta la retroalimentación por parte del grupo focal, las observaciones obtenidas en la prueba de pilotaje y las sugerencias por parte de la docente del CRAC; se realiza un segundo diseño del BoxSet, pensado en actividades que permitan desarrollar habilidades en los estudiantes, mejoramiento en el diseño de las fichas para las personas con algún grado de discapacidad visual, elaboración de procesos de metacognición; entre otros aspectos.

A través del siguiente link puede observar la versión definitiva de la cartilla BoxSet.

https://www.canva.com/design/DAE8LWhhyYg/_1lmVXpiDdUxiRS9-UupMg/view?utm_content=DAE8LWhhyYg&utm_campaign=designshare&utm_medium=link&utm_source=publishsharelink